INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVII. BAND 1959/1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle), Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften

Springer-Verlag OHG, Berlin · Göttingen · Heidelberg

Printed in Germany

Inhalt

Seite

Bauersfeld, W., Die Bewegungsgesetze des Raumkompasses 365

Biezeno, C. B., Zehnter Internationaler Kongreß für Angewandte Mechanik
Beilage in Heft 2 vor Seite 73

Bogunović, V., Der durchlaufende Balken auf äquidistanten elastischen Stützen . 104

Bufler, H., Zur Theorie der rollenden Reibung 137

Engl, W., Weiterführung der *Sobrero*schen Theorie des ebenen Spannungszustandes 128

Fadle, J., Der homogene, innerlich statisch unbestimmte Parallelfachwerkträger. 314

Giaever, I., G. Horvay and *J. A. Mirabal*, Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity 179

Horvay, G., I. Giaever and *J. A. Mirabal*, Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity 179

Isay, W.-H., Zur Theorie der nahe der Wasseroberfläche fahrenden Tragflächen . 295

Jäger, B., Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Turbomaschinen ... 33

Kämmel, G., Zur Theorie des räumlich gekrümmten Stabes 255

Klingbeil, E., Zur Theorie der Rotationsschalen vom Standpunkt numerischer Rechnungen 242

Kolberg, F., Der Wellenwiderstand von Schiffen auf flachem Wasser 268

Kurata, M., Bending of Simply Supported Rectangular Plates With Clamped Portions Along Arbitrary Sections of the Edges 485

Lippmann, H., Ebenes Hochkantbiegen eines schmalen Balkens unter Berücksichtigung der Verfestigung 153

McKinley, R. M. and *M. M. Stanišić*, A note on thermal stresses in hollow cylinders 227

Meyer zur Capellen, W., Die Beschleunigungsänderung. I. Mitteilung 53

Meyer zur Capellen, W., Die Beschleunigungsänderung. II. Mitteilung 73

Meyer zur Capellen, W., Berichtigung zum Beitrag „Die Beschleunigungsänderung, II. Mitteilung“ in Heft 2, S. 73 dieses Bandes 200

Meyer zur Capellen, W., Die Extrema der Übersetzungen in ebenen und sphärischen Kurbeltrieben 352

Mirabel, J. A., I. Giaever and *G. Horvay*, Thermal stresses in a heat-generating cylinder: The variational solution of a boundary layer problem in three-dimensional elasticity 179

Mitterlehner, G., Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen 88

Müller, K.-H., Spannungen in anisotropen kreiszylindrischen Rohren, I. Mitteilung 417

Ōba, R., Theory of flow through profiles with large camber and thickness arranged in cascade with small pitch chord ratio 276

Ohashi, H., Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Tandem-Pumpengittern starker Umlenkung 201

Pestel, E., Anwendung der Deltamatrizen auf inhomogene Probleme 250

Raabe, J., Beiträge zur Berechnung von Kaplanturbinen 1

Rimrott, F., Versagenszeit beim Kriechen 169

Roth, W., Die tordierte, einfach gekrümmte Welle mit konstanter Krümmung... 326

Rüdiger, D., Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper 421

Satō, K., Large deflection of a circular cantilever beam with uniformly distributed load 195

Schubart, H., Über die Grenzamplitude einer Klasse selbsterregter Schwingungen. 66

Seika, M., Stresses in a Semi-Infinite Plate Containing a *U*-type Notch Under Uniform Tension 285

Shen, M.-K., Eine Erweiterung des *Maxwell*schen Vertauschungssatzes 350

Stanišić, M. M. and *R. M. McKinley*, A note on thermal stresses in hollow cylinders 227

Tameroğlu, S., Zur Membran- und Biegetheorie der Kreiszylinderschale für ein nichtlineares Elastizitätsgesetz 372

Wittmeyer, H., Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben veränderlicher Dicke. 113

Wittmeyer, H., Biegeeigenfrequenzen eines gelenkig gelagerten Balkens 117

Einführung in die Technische Mechanik

Nach Vorlesungen

Von Dr.-Ing. **István Szabó**, o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg

Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage

Mit 525 Abbildungen. XII, 434 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 22,50

INHALTSÜBERSICHT

Die Statik des starren Körpers. Einleitung. Die Elemente der Vektorrechnung. Über die Kraft. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Ebene Kräftegruppen am starren Körper mit nicht gemeinsamem Angriffspunkt. Über Kräftepaar und Moment. Kräftezusammensetzung im Raume. Ebene Statik des starren Körpers. Über den Schwerpunkt. Die Schnittlasten des Balkens.

Einige elementare Probleme der Elastizitätstheorie. Allgemeine Bemerkungen und Gesetze zur Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre. Die elementare Theorie der Balkenbiegung. Flächenmomente zweiten Grades. Die elastische Linie des Balkens. Ergänzungen zur Theorie des Balkens.

Statik der Systeme starrer Körper. Systeme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper. Ebene Fachwerke. Statik der Systeme aus unendlich vielen starren Körpern (Statik der Seile und Ketten).

Einführung in die Dynamik. Kinematische Betrachtungen. Das Newtonsche Grundgesetz und seine Folgerungen. Kinetik des Schwerpunktes. Über Bewegungswiderstände (Reibung). Die einfachsten Schwingungsprobleme der Mechanik. Über den Stoß. Einblick in die Hydromechanik. Grundgesetze der Ähnlichkeitsmechanik.

Arbeitsprinzipien der Mechanik. Anhang. Namen- und Sachverzeichnis.

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Das Buch, das in kürzester Zeit in vierter Auflage erschien, enthält die Grundvorlesungen der Mechanik. Auf verhältnismäßig knappem Raum sind die Begriffe und Gesetze der Statik, Festigkeitslehre, Elastizitätstheorie, Dynamik (Kinematik und Kinetik) und Hydromechanik untergebracht . . .

Besonders reizvoll sind die Einfügungen geschichtlicher Bemerkungen, die dem Gedanken entspringen, daß sich die Geschichte der Mechanik bei jedem Lernenden wiederholt. Die vierte Auflage enthält gegenüber den früheren zusätzlich ein Kapitel über Energiemethoden der Mechanik.

Das Werk ist neben seinem eigentlichen Zweck als Lehrbuch für den Studierenden an Technischen Hochschulen auch als Nachschlagewerk sehr zu empfehlen. Sowohl im Aufbau wie auch in den geschickt gewählten Übungsbeispielen führt ein folgerichtiger Gedankengang rasch zur Wiederauffrischung verlorengegangener Erkenntnisse." *Der Stahlbau*

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen

Herausgegeben von W. Meyer-Eppler

I. Band: **Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie**

Von Dr. W. Meyer-Eppler, b. ao. Professor und Direktor des Instituts für Phonetik und Kommunikationsforschung an der Universität Bonn
Mit 178 Abbildungen und 1 Tafel. XVIII, 446 Seiten Gr.-8°. 1959.
Ganzleinen DM 98,—

INHALTSÜBERSICHT

Buchliteratur · Bibliographien · Zeichenerklärung · Die Kommunikationskette · Strukturtheorie der Signale · Eigenschaften linearer Übertragungssysteme · Symbolstatistik · Gestörte Systeme · Sicherung gegen Übertragungsfehler · Die Sinnesorgane als Informationsempfänger · Signal und Zeichen · Akustische und optische Valenzklassen als Zeichenträger · Formstrukturen und Konstruktionen · Die gestörte sprachliche Kommunikation · Anhang · Tabelle der Funktion $-p \operatorname{ld} p$ · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

In der Reihe „Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen" sollen Fragen der menschlichen, tierischen und apparativen Kommunikation sowie der Kybernetik (d. h. der Lehre von den physikalischen und physiologischen Regelsystemen) von Experten behandelt werden. Als Veröffentlichungssprachen sind Deutsch und Englisch vorgesehen.

Der erste Band über „Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie" gibt einen Überblick über die verschiedenen Zweige der informationstheoretischen Forschung im besonderen Hinblick auf die menschlichen Kommunikationspartner. Er beginnt mit der mathematischen Beschreibung von Signalen und linearen Übertragungssystemen und geht dann über zur Statistik von Symbolen und zur Übertragung von Symbolen über gestörte Systeme. Eine eingehende Betrachtung der Rolle der menschlichen Sinnesorgane als Informationsempfänger leitet über zum Problem „Signal und Zeichen" und damit zur sprachlichen Kommunikation in ihren verschiedenen Aspekten.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

INGENIEUR-ARCHIV

FESTSCHRIFT
RICHARD GRAMMEL

ZUM 70. GEBURTSTAG
AM 3. MÄRZ 1959

UNTER MITWIRKUNG VON
A. BETZ · H. GÖRTLER · K. KLOTTER
K. MARGUERRE · E. METTLER

HERAUSGEGEBEN VON
K. v. SANDEN

XXVIII. BAND **1959**

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 28. Februar 1959

Postverlagsort Berlin ***Preis DM 52,—***

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus,** Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersberg Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf — Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

FESTSCHRIFT RICHARD GRAMMEL

INGENIEUR-ARCHIV

FESTSCHRIFT

RICHARD GRAMMEL

ZUM 70. GEBURTSTAG
AM 3. MÄRZ 1959

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · H. GÖRTLER · K. KLOTTER
K. MARGUERRE · E. METTLER

HERAUSGEGEBEN VON

K. v. SANDEN

XXVIII. BAND 1959

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, diesen Band, einzelne Beiträge oder Teile daraus auf photomechanischen Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften

Springer-Verlag OHG, Berlin/Göttingen/Heidelberg
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Seite

C. B. Biezeno, Delft:

Zum Geleit 1

A. Betz, Göttingen:

Näherungsformeln zur konformen Abbildung von Streckenprofilgittern kleiner Teilung . . 6

Ch. Clavuot und *H. Ziegler*, Zürich:

Über einige Verfestigungsregeln 13

L. Cremer, Berlin und *K. Klotter*, Stanford:

Neuer Blick auf die elektrisch-mechanischen Analogien 27

K. Desoyer und *G. Heinrich*, Wien:

Zur Tilgung geradliniger Schwingungen mit Hilfe des Zentrifugalpendels 79

H. Favre, Zurich:

Etude théorique de l'influence des réflexions intérieures sur la marche d'un rayon lumineux traversant une lame transparente soumise à des forces agissant dans son plan moyen . 39

K. Federhofer, Graz:

Nicht-lineare Biegungsschwingungen des Kreisringes 53

W. Flügge, Stanford und *E. E. Zajac*, Murray Hill:

Bending Impact Waves in Beams 59

H. Görtler, Freiburg/Br.:

Über eine Analogie zwischen den Instabilitäten laminarer Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden 71

G. Heinrich und *K. Desoyer*, Wien:

Zur Tilgung geradliniger Schwingungen mit Hilfe des Zentrifugalpendels 79

N. J. Hoff, Stanford:

The idealized column 89

K. H. Hohenemser, St. Louis:

Neuere Ergebnisse aus dem Gebiet der Dynamik der Drehflügel 99

F. Jindra, Norwalk:

Wärmespannungen bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz 109

K. Karas, Darmstadt:

Stationäre Laminarströmungen durch Kanäle von elliptischem Querschnitt bei konstantem Druck oder statischer Druckverteilung 117

Seite

H. Kauderer, Hannover:
Über nichtlineare Schwingungen mit unstetiger Erregung 154

K. Klotter, Stanford und *L. Cremer*, Berlin:
Neuer Blick auf die elektrisch-mechanischen Analogien 27

W. T. Koiter, Delft:
An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet 168

H. Leinß, Stuttgart:
Die Durchbiegung stark belasteter, einseitig eingespannter Biegungsfedern 173

O. Lutz, Braunschweig:
Zur Thermo-Gasdynamik der Strömung im zylindrischen Rohr 178

K. Magnus, Stuttgart:
Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung 184

O. Mahrenholtz und *E. Pestel*, Hannover:
Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen 255

K. Marguerre, Darmstadt:
Über die *Lagrange*schen Gleichungen der Kinetik und der Elastostatik 199

G. Mesmer, St. Louis:
Über eine Gruppe von Singularitäten im Membranspannungszustand der Kugelschale . . 208

E. Mettler, Karlsruhe:
Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme 213

H. Neuber, Starnberg bei München:
Über allgemeine Eigenschaften der Schwingungszahlen linear-elastischer Systeme 229

F. K. G. Odqvist, Stockholm:
Die Näherungsformel von *Dunkerley* und ähnliche Formeln für die Eigenwerte bei Schwingungsaufgaben 242

W. Olszak und *P. Perzyna*, Warschau:
Variational Theorems in General Viscoelasticity 246

H. Parkus, Wien:
Spannungen beim Abkühlen einer Kugel 251

P. R. Paslay, Schenectady and *A. Slibar*, Stuttgart:
Behavior of Vehicles Subjected to Wind Gusts 313

P. Perzyna und *W. Olszak*, Warschau:
Variational Theorems in General Viscoelasticity 246

Seite

E. Pestel und *O. Mahrenholtz*, Hannover:
Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen 255

K.-A. Reckling, Berlin:
Zur Theorie der Plattenbeulung im plastischen Materialbereich 263

M. Roy, Chatillon:
Théorie thermodynamique condensée de l'Elasticité linéaire 277

D. Rüdiger, Freiberg/S.:
Zur Theorie elastischer Schalen 281

R. Sauer, München:
Überschallströmungen um Kreisschnittkörper mit gekrümmter Achse 289

H. Schaefer, Braunschweig:
Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums; statische Deutung und Randwerte 291

F. Schultz-Grunow, Aachen:
Abstoßende Wirkung von Wänden in reibungslosen Scherströmungen 307

A. Slibar, Stuttgart and *P. R. Paslay*, Schenectady:
Behavior of Vehicles Subjected to Wind Gusts 313

R. Sonntag, Karlsruhe:
Über einen durch Kreiselwirkung hervorgerufenen Reibungseffekt im Kugellager 327

C. A. Traenkle, Dayton:
Mechanics of the Power and Launching Phase for Missiles and Satellites 335

U. Wegner, Saarbrücken:
Ein Beitrag zu den Stabilitätskriterien der Elastizitätstheorie 357

W. Weibull, Bockamöllan:
Zur Abhängigkeit der Festigkeit von der Probengröße 360

E. E. Zajac, Murray Hill und *W. Flügge*, Stanford:
Bending Impact Waves in Beams 59

W. Zerna, Hannover:
Berechnung des Membranspannungszustandes doppelt gekrümmter Schalen über beliebigem Grundriß 363

H. Ziegler und *Ch. Clavuot*, Zürich:
Über einige Verfestigungsregeln 13

K. Zoller, Stuttgart:
Die Wärmeleitgleichung bei Wärmespannungen 366

INGENIEUR-ARCHIV

XXVIII. BAND FESTSCHRIFT FÜR RICHARD GRAMMEL 1959

Zum Geleit

Der vom Unterzeichneten als Auszeichnung empfundenen Bitte, zu dieser Festschrift eine Widmung zu schreiben, hat er mit Freude entsprochen. Nicht nur wegen der diese Bitte begleitenden Begründung, daß er viele Jahre mit Herrn *Grammel* aufs engste zusammengearbeitet hat und eine noch größere Anzahl von Jahren mit ihm durch nie zerstörte, wenn auch von außenher stark bedrohte Freundschaft verbunden war, sondern auch der Tatsache wegen, daß die Redaktion dieses Festbandes, deren Mitglieder je für sich das unbestrittene Recht und außerdem die unverkennbare Fähigkeit haben, *Grammel* gebührend zu ehren, implizite die Auffassung zu Tage treten ließ, daß ein Hauptmerkmal *Grammels*, nämlich seine wissenschaftlich-internationale Einstellung und Bedeutung, vielleicht am besten von einem „Ausländer" gewürdigt werden könnte.

In dem nachfolgenden wird nicht versucht, eine „Lebensbeschreibung" des jetzt 70jährigen Gelehrten und Menschen zu geben. Vielmehr soll gerade in der Beschränkung des Stoffes der Beweis geliefert werden, wie groß der Einfluß *Grammels* auf seine nahe Umgebung gewesen ist, wie vielseitig sich seine wissenschaftliche Arbeit gestaltet hat und wie sehr er die internationale Zusammenarbeit auf dem gesamten Mechanikgebiet unterstützt und gefördert hat.

Es ist nicht Sache der Höflichkeit allein, wenn an dieser Stelle die Gründung und die Führung des Ingenieur-Archivs in den Vordergrund unserer Betrachtungen gerückt wird, denn eine kritische Betrachtung dieser Zeitschrift allein liefert bereits, wenn auch nur „in erster Annäherung", eine Charakterisierung *Grammels*.

Die Gründung des Ingenieur-Archivs fand (Anfang 1929) zu einem Zeitpunkt statt, zu dem es nicht nur Einsicht und Voraussicht, sondern auch wissenschaftlichen Mut erforderte, eine Zeitschrift ins Leben zu rufen, die sich, wenn auch nicht in direkter Konkurrenz, so doch an die Seite der bereits von 1921 an bestehenden, von *von Mises* gegründeten und ausgezeichnet geführten „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" stellte. Es mag mancher Fachgenosse in jenen Tagen von leisem Zweifel erfüllt gewesen sein, ob neben der ZAMM wohl Platz und Anlaß für eine zweite — oberflächlich betrachtet — gleich gerichtete Zeitschrift bestünde; die Erfahrung hat alsbald nicht nur jeden Zweifel an ihrer Existenzberechtigung verstummen lassen, sondern außerdem im Laufe der Jahre gezeigt, daß dem Ingenieur-Archiv ein unbestrittener Ehrenplatz zukommt in der Reihe der nach 1929 in anderen Ländern erschienenen Fachzeitschriften gleicher — oder nahezu gleicher — Art.

Betrachtet man den ersten Absatz des ersten Bandes, wo angekündigt wird, „die Beziehungen zwischen der wissenschaftlichen Forschung und der technischen Praxis zu pflegen, insbesondere zwischen der Mechanik (einschließlich Hydro- und Elastomechanik) und Thermodynamik einerseits und dem Maschinen- und Bauingenieurwesen andererseits", als die Definition der Zeitschrift, dann „definiert" der zweite Absatz sozusagen ihren Herausgeber: „Die Beziehungen zwischen Wissenschaft und Technik" — so schreibt dieser — „sind durchaus wechselseitig: beide sind gebend, beide empfangend. Wenn Wissenschaft eine Voraussetzung der Technik, und Technik eine Anwendung der Wissenschaft ist, so ist doch auch Technik immer wieder eine Anregerin der Wissenschaft und Wissenschaft eine Nutznießerin der Technik gewesen. Der Grund für diese Wechselwirkung liegt wohl darin, daß Wissenschaft eine Ökonomie des Erkennens und Denkens, Technik eine Ökonomie des Gestaltens und des Kräfteverbrauches darstellt. Diese Ökonomie gegenseitig nutzbar zu machen, ist ganz natürlich. Die Freundschaft jedoch, die so zwischen Technik und Wissenschaft bestehen sollte, ist nicht immer ungetrübt" (um es nur gelinde zu sagen; C. B. B.). „Vielfach herrscht zwischen beiden ein Mißtrauen, das teils oberflächliche, teils aber tiefere Ursachen hat". „Diese beseitigen zu helfen, stellt sich der Herausgeber als ein wesentliches Arbeitsziel."

Wie dieses Ziel gefördert werden kann, wird alsdann auseinandergesetzt, indem die Fehler aufgezählt werden, auf welche Mißverständnis sowie Mißtrauen öfters zurückzuführen sind. Sie werden in derartiger Prägnanz und Klarheit formuliert, daß sie auch jetzt noch ungeschwächt die volle Aufmerksamkeit aller Forscher, seien es Theoretiker oder Experimentatoren, verdienen.

„Erstlich vergißt der Forscher allzu leicht, daß er selbst zu seinem Gegenstand anders eingestellt ist als der Leser, der naiv und vielleicht unvorbereitet an ihn herantritt und in den meisten Fällen zunächst nur wissen will, um was es sich handelt. Ihm dies verständlich und eindringlich zu sagen, ist die erste Pflicht des Schreibenden.

Jedes Forschungsergebnis ist an bestimmte Voraussetzungen geknüpft. Diese klar und eindeutig auszusprechen, ist seine zweite Pflicht; hier liegt die Hauptwurzel vieler wissenschaftlicher Streite und der Hauptgrund für die Ablehnung des Praktikers gegen manche Theorien, die an sich durchaus richtig und wertvoll sind.

Die Theorie bedient sich zumeist der mathematischen Formelsprache, weil diese eine sonst nirgends erreichte Bestimmtheit des Ausdrucks gestattet und eine ganz besonders rationelle Führung der Schlüsse verbürgt. Der Theoretiker hat durchaus das Recht, von seinem Leser die Kenntnis dieses scharf geschliffenen Werkzeuges in dem — mitunter sehr weiten — Umfang zu verlangen, der für die Entwicklung seiner Theorie notwendig ist. Aber er mißbrauche dieses Recht nicht! Er denke daran, daß die Formel nicht zum Formalismus führen und die Anschaulichkeit des Gedankenganges überwuchern darf, und er vergesse nie, daß einfache Tatsachen sich fast immer auch auf einfache Weise erklären lassen müssen. Die Befolgung dieses wichtigen Ökonomiegesetzes ist die dritte und schwerste Pflicht des wissenschaftlichen Schriftstellers, dem daran gelegen sein mag, daß die alte Abneigung vieler Praktiker gegen die Theorie allmählich der Erkenntnis Platz mache, daß Theorie eine Helferin der Praxis sein will."

Mit der Aufstellung der zitierten Anforderungen, vor allem aber mit dem konsequenten Festhalten an im voraus festgelegten wohlüberlegten Richtlinien, welche der Zeitschrift bis auf den heutigen Tag ihre besondere äußere Form und ihre innere Charakteristik geben, hat *Grammel* sich ein außerordentliches Verdienst der Fachwelt gegenüber erworben, nicht nur in sachlicher, sondern auch in persönlicher Hinsicht. Denn viele seiner Autoren werden ihm Dank wissen für die äußerst taktvolle Weise, in welcher er mit lobenden Worten den Eingang eines Manuskriptes zu bestätigen weiß und trotzdem die Annahme desselben abhängig zu machen versteht von „gefälliger Berücksichtigung" einer Anzahl kritischer, äußerst sachkundiger Bemerkungen.

Stellt man fest, daß seit Erscheinen der Zeitschrift die Zahl der aufgenommenen Aufsätze die Zahl 1000 merklich überschreitet, so erhält man einen gleich imposanten Eindruck von der Bedeutung der Zeitschrift selbst wie von der Arbeitskraft ihres Herausgebers.

Ebenso wie *Grammel* bei der Gründung des Ingenieur-Archivs unbeirrt seinen Weg ging, unabhängig von der Tatsache, daß schon eine ausgezeichnete Zeitschrift auf demselben Fachgebiet bestand und also nur bei einer Höchstleistung die Lebensfähigkeit der neuen Zeitschrift zu sichern sei, ebenso unbeirrt unterzog er sich der Aufgabe, sein heute in allen Fachkreisen bekanntes „Kreisel"-Buch zu schreiben, ungeachtet der Existenz des weltberühmten *Klein-Sommerfeld*schen Buches über den gleichen Gegenstand. Eine gebührende Würdigung dieses ausgezeichneten Werkes ist schon des hier zur Verfügung stehenden beschränkten Raumes wegen nicht möglich; aber ein Zitat aus dem Vorwort bietet Gelegenheit, diesmal *Grammels* Auffassungen auf didaktischem Gebiet erkennen zu lassen und ihn selbst als einen vorzüglichen Lehrer einer wahrhaft technischen Wissenschaft zu kennzeichnen. Nachdem er sich gegen jeden undurchsichtigen Formalismus gekehrt hat, schreibt er: „Die Formel kann in der reinen Mathematik einen hohen Selbstzweck haben; in der Mechanik ist sie lediglich ein scharf geschliffenes Werkzeug, und sie soll nie zum Automaten werden, der, taktmäßig ablaufend, am Schluß ein zwar vielleicht richtiges, aber schemenhaftes Ergebnis zum Vorschein bringt, welches dann erst wieder mit Fleisch und Blut gefüllt werden muß. Der Erkenntnistrieb ist nur dann befriedigt, wenn jede Formel selber sagt, warum sie da ist, wenn also in keinem Augenblick der Zusammenhang der Formel mit dem mechanischen Geschehen verloren geht." Gepriesen jede Hochschule, wo im Mechanikunterricht das hier beschriebene Verhältnis Mathematik-Mechanik anerkannt und verwirklicht wird!

Grammels sich auf ebenso tiefe wie breite Fachkenntnis stützende besondere Begabung für wissenschaftlich-organisatorische Arbeit hatte ihn übrigens schon vor dem Erscheinen des Ingenieur-Archivs als den prädestinierten Herausgeber der drei Mechanikbände des Handbuches der Physik erkennen lassen (Bd. V, Grundlagen der Mechanik, Mechanik der Punkte und starren Körper; Bd. VI, Mechanik der elastischen Körper; Bd. VII, Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper). Auch diese Aufgabe hat *Grammel* ebenso durch glänzende eigene Beiträge wie durch außerordentlich sachkundige Gliederung des gewaltigen Gesamtgebietes in bewundernswerter Weise — wenn auch nicht ohne Kummer und Sorgen — zu einem siegreichen Ende geführt. Denn bei der Erfüllung dieser außerordentlich verantwortungsvollen Aufgabe konnte diesem in jeder seiner Handlungen pünktlichen Menschen kein größerer Ärger entstehen, als grobe und nicht zu entschuldigende Nachlässigkeit einiger Autoren bei der Innehaltung verabredeter Ablieferungstermine, welche nicht nur Verzögerung in der gesamten Herausgabe, sondern ernstliche persönliche Überbelastung für ihn mit sich brachten. Noch viele Jahre hindurch werden die Mechanikbände des Handbuches der Physik eine Quelle enzyklopädischer Erkenntnis bleiben.

Einige Jahre, nachdem diese Bände erschienen waren und das Ingenieur-Archiv in Gang gesetzt worden war, ergriff *Grammel* die Initiative zu einem Unternehmen, das für den Unterzeichneten ebenso wie für ihn selbst größere Bedeutung haben sollte, als sie in dem betreffenden Augenblick ahnen konnten. Aus einem durch den ersten Internationalen Mechanik-Kongreß (1924) angeregten steten Briefwechsel hatte sich zwischen beiden Autoren eine wissenschaftliche Verständigung entwickelt, die anläßlich eines Besuches in Holland zu *Grammels* Vorschlag führte, gemeinsam ein Buch zu schreiben, das einerseits als eine Art Fortführung der gebräuchlichen Mechanik-Lehrbücher anzusehen wäre, andererseits sich als Ziel zu setzen hätte, nur solche Lösungsmethoden zu behandeln, die mit einem erträglichen Rechenaufwand zu numerischen Ergebnissen führen und also auch wirklich vom rechnenden — und wissenschaftlich gebildeten! — Ingenieur durchgeführt werden konnten. Die Erreichung des Zieles ging über die Kraft jedes Einzelnen, schien aber — wegen der sehr übereinstimmenden Einstellung beider Autoren — nicht ausgeschlossen. Aus begreiflichen Gründen bleibt die Frage hier unberührt, ob (oder in welchem Maße) dieses Ziel auch wirklich erreicht wurde. Dafür möge aber eine Bemerkung ganz anderer und persönlicher Art an die Stelle treten. Für beide Verfasser ist das Schreiben dieses Buches — trotz der damit verbundenen vieljährigen Anstrengung — eine Quelle der Freude und der sittlichen Genugtuung gewesen. Nicht etwa nur dadurch, daß sich trotz aller gegenseitigen, scharfsachlichen wissenschaftlichen Kritik nie eine Spur des Mißverständnisses oder der Verletzung gezeigt hat, sondern vielmehr aus dem Grunde, daß die Verfasser in dem Schlußsatz ihres Vorwortes, wenn auch in kürzester Form, ihre innerliche Einstellung bekanntgeben konnten, indem sie ihre Arbeit als Beweis dafür anführten, daß „wissenschaftliche Arbeit die Grenzen von Ländern und Sprachen zu überbrücken vermag". Leider muß in tiefster Trauer und mit nie zu tilgendem Abscheu festgestellt werden, wie sehr während des zweiten Weltkrieges alles daran gesetzt wurde, jeden Idealismus zu töten und mühsam errungene Kultur zu Grunde zu richten. Niemals in der Geschichte ist so deutlich zutage getreten, wie politische Macht in Händen von Verbrechern die Welt zu Grunde richtet und jeden edlen Menschentrieb erstickt. Wie sehr *Grammel* in der Kriegszeit seelisch gelitten hat, weiß jeder, der ihm persönlich nahe steht; doch erfährt auch ein jeder, der von seiner gesamten Arbeit in der Nachkriegszeit Kenntnis nimmt, eine Arbeit die erstens darauf gerichtet war, die Stuttgarter Hochschule aus ihren Trümmern neu aufzubauen und dieser ihren alten Glanz wiederzuverleihen, die aber zweitens überall da, wo Kunst, Wissenschaft und Kultur, kurzum die Ehre seines Landes durch das „dritte Reich" zertreten worden war, für die Anerkennung alles dessen eintrat, was Deutschland unleugbar zu der Gesamtkultur der Menschheit beigetragen hat.

Man nehme Kenntnis von der Ansprache, die *Grammel* beim Festakt der Technischen Hochschule Stuttgart zur Feier ihrer Wiedereröffnung am 23. Februar 1946 hielt, und erkenne in dieser Rede einen Mann, der in tiefster Bedrängnis nicht nur seine eigene Pflicht, sondern auch die seiner gleichgesinnten Zeitgenossen in aller Klarheit umschreibt und zugleich dieser Pflicht bis zur äußersten Möglichkeit nachzukommen auf sich nimmt!

Zu welch unerhörtem Erfolg *Grammels* Tätigkeit, trotz kaum überwindlicher Schwierigkeiten, geführt hat, — dank natürlich auch der uneigennützigen und aufopfernden Arbeit zahlreicher

Anderer — beweist der heutige Stand der Stuttgarter Hochschule, die ihm als ihr höchstes Ehrenzeichen ihre Ehrenbürgerschaft verliehen hat.

Es ist bekannt, daß *Grammel* schon sehr früh in das Internationale Komitee für die seit 1924 organisierten internationalen Kongresse für angewandte Mechanik gewählt wurde, und daß er nach dem zweiten Weltkrieg dazu berufen war, in dieses Komitee nicht nur so bald wie möglich wieder aufgenommen zu werden, sondern außerdem aufgefordert wurde, an der Arbeit der nach dem Kriege ins Leben gerufenen I.U.T.A.M. („International Union of Theoretical and Applied Mechanics") teilzunehmen. Welche Autorität er in dieser Union alsbald hatte, erhellt aus der an ihn gerichteten Aufforderung, den Vorsitz des 1955 in Madrid abgehaltenen Colloquiums über „Verformung und Fließen des Festkörpers" zu übernehmen. Von seinen zahlreichen Bemühungen, diesem Kolloquium einen unbestrittenen wissenschaftlichen Erfolg zu verschaffen, seien lediglich zwei Tatsachen erwähnt, beide in bezug auf die von ihm redigierten Abhandlungen: die erste, daß man sich keine bessere und knappere Einführung zu den gehaltenen Vorträgen denken kann als die nur zwei Seiten umfassende Darstellung des heutigen Standes des behandelten Wissenschaftsgebietes und dessen neuer Ziele; die zweite, daß diese Abhandlungen, sorgfältig redigiert und in vorzüglicher Ausstattung, innerhalb eines Jahres im Besitze aller Interessenten waren. Möge allen zukünftigen Kongreß- und Kolloquiumverhandlungen ein ähnliches nutzbringendes Los beschieden sein!

Wie aus allem Vorangehenden hervorgeht, hat *Grammel* einen sehr großen Teil seiner Zeit, seiner Arbeitskraft und seiner Begabung den Interessen seiner Fachgenossen und darüber hinaus seiner Hochschule und seinem Lande gewidmet. Daneben aber hat er eine erstaunliche persönliche wissenschaftliche Produktivität entwickelt, die zur wirklichen Würdigung eine gesonderte Bibliographie erfordert. Da diese Skizze nur Hauptmerkmale eines außerordentlich tätigen Lebens und eines Charakters festhalten soll, so sei darauf verzichtet, auf Einzelheiten dieser wissenschaftlichen Produktion einzugehen, wie verlockend eine solche Aufgabe an sich auch wäre. Dafür sei aber festgestellt, daß *Grammels* Arbeiten fast jedes Teilgebiet der Mechanik erfassen. In vielen dieser Teilgebiete spielen Kreiselwirkungen eine wichtige Rolle, und es nimmt also nicht Wunder, daß der Verfasser eines Standardwerkes über diesen Gegenstand zahlreiche Möglichkeiten ergriff, seine Kräfte der Lösung technischer Kreiselprobleme zu widmen. Die sowohl dem Gebiete der Dynamik starrer als der Dynamik deformierbarer Körper angehörigen Schwingungen sowie deren Stabilität haben in der vielseitigsten Form sein Interesse erregt. Elastische Stabilität vielerlei technischer Gebilde (Ringe, Stäbe, Scheiben u.s.w.) war Gegenstand origineller Behandlung; prinzipielle Fragen mathematischer Natur wie die Bestimmung oberer und unterer Grenzen von Eigenwerten sowie viele andere weit auseinander liegende Fragestellungen waren Gegenstand seiner Untersuchungen!

Nach dieser äußerst summarischen und notwendig unvollständigen Aufzählung von Daten möge jetzt der Anlaß zu diesem Aufsatz ins Licht gerückt werden.

Man pflegt im abgegriffenen täglichen Sprachgebrauch einem j e d e n, der das Alter von 70 Jahren erreicht, damit zu schmeicheln, daß er in die „Kategorie der Starken" eingetreten ist, ohne sich auch nur im geringsten vor Augen zu stellen, daß für j e d e n Sterblichen — bis auf die allerwenigsten Ausnahmen — nach dem Erreichen einer gewissen Altersgrenze, (die nach dem modernen Prinzip der Gleichschaltung auf 70 Jahre festgesetzt wird), die körperliche, geistige und seelische Kraft abnimmt — gegen jedes Bestreben sie zu erhalten.

Wir wollen uns trivialer Worte hier enthalten und fragen, was einem bedeutenden Menschen Quelle der Freude sein kann beim Erreichen eines Alters, in dem man — durchschnittlich — mit der Verringerung von aufgebürdeten oder freiwillig übernommenen Verpflichtungen und mit einer Schwächung der Arbeitskraft zu rechnen hat.

Wer mit der Verringerung von Pflichten sich „abfinden" muß, hat in der Erfüllung dieser Pflichten — welcher Art sie auch gewesen sein mögen — seine Lebensaufgabe und seine Lebensfreude gesehen! Wer sich außerdem wissenschaftliche Ziele gesetzt hat, wird wohl meistens in Zweifel über den Erfolg seiner Bemühungen verfallen; denn beim Erreichen jedes einzelnen Zieles eröffnet sich jedem Wissenschaftler ein neuer, ausweichender Horizont, und es ist fast unvermeidlich, daß ihm dadurch eine richtige Wertschätzung seiner eigenen Arbeit versagt ist.

Auch im Falle *Grammel* würden wir von ihm selbst sicherlich ein wenn auch nicht gänzlich verzerrtes so doch sehr unvollständiges und unbefriedigendes Bild seiner Wirksamkeit und seines Erfolges erhalten, und aus diesem Grunde ergreifen denn auch seine zahlreichen Schüler, Freunde und Fachgenossen mit Freude die Gelegenheit, ihn richtiger zu beurteilen. Fassen sie dieses Urteil in größter Kürze zusammen, wobei jedem Wort volle Bedeutung zukommt, so ehren sie in ihm den großen Gelehrten, der seinem Fachgebiete national und international sehr bedeutsame Dienste geleistet hat; den vorzüglichen Lehrer; den integren, in seinen Auffassungen nicht zu erschütternden Menschen, der in einer ebenso wahnwitzigen wie verbrecherischen Zeit seiner Hochschule, seiner Stadt und seinem Land mit Einsatz seiner ganzen Persönlichkeit und seiner ganzen Arbeitskraft mit großem Erfolg gedient hat.

Dieser kurzen Widmung „erster Art" — in Worten — schließt sich eine andere, bedeutsamere „zweiter Art" — in Taten — an. Soll doch dieser ganze 28. Band des Ingenieur-Archivs ein bleibendes Zeugnis der Verehrung aller derer sein, die an ihm mitwirkten; und möge er dabei als ein zweifaches Symbol dienen: im Hinblick auf die Vergangenheit als Zeichen der Anerkennung, Hochachtung und Freundschaft; im Hinblick auf die Zukunft als Äußerung von Hoffnung und Zuversicht, daß in dem Fortbestehen dieser Zeitschrift *Grammels* Wirksamkeit noch lange zum Ausdruck komme!

Im Namen aller, die persönlich oder im Geiste heute an den 70jährigen Jubilar herantreten, seien ihm, nebst Dank für sein Werk, die besten Glückwünsche für die vor ihm liegenden Jahre dargeboten.

C. B. Biezeno.

Näherungsformeln zur konformen Abbildung von Streckenprofilgittern kleiner Teilung

Von **A. Betz**

Die meisten Verfahren zur Berechnung von Strömungsgittern führen bei Gittern mit einigermaßen großer Teilung t oder Kanalweite b im Verhältnis zur Profillänge l der Schaufeln (Abb. 1) ohne allzu großen Arbeitsaufwand zu brauchbaren Ergebnissen. Die Schwierigkeiten wachsen aber mit kleiner werdendem Teilungsverhältnis t/l bzw. Kanalweitenverhältnis b/l stark an. Nun kommen aber hauptsächlich bei Gittern, die radial durchströmten Rädern entsprechen, sehr kleine Teilungsverhältnisse vor. Es besteht daher ein Bedürfnis, auch hierfür einfache Berechnungsverfahren zu besitzen. An sich entsprechen den radial durchströmten Rädern am nächsten sogenannte Kreisgitter, bei denen eine endliche Anzahl von Schaufeln auf einem Kreis angeordnet ist. Durch eine einfache konforme Abbildung[1] lassen sich solche Kreisgitter aber leicht in sogenannte gerade Gitter umformen. Bei diesen ist eine unendliche Anzahl von Schaufeln auf einer Geraden angeordnet. Da sich diese leichter und übersichtlicher behandeln lassen, sollen sie den folgenden Überlegungen zugrundegelegt werden. Die Ergebnisse lassen sich aber durch die erwähnte konforme Abbildung leicht auf Kreisgitter übertragen.

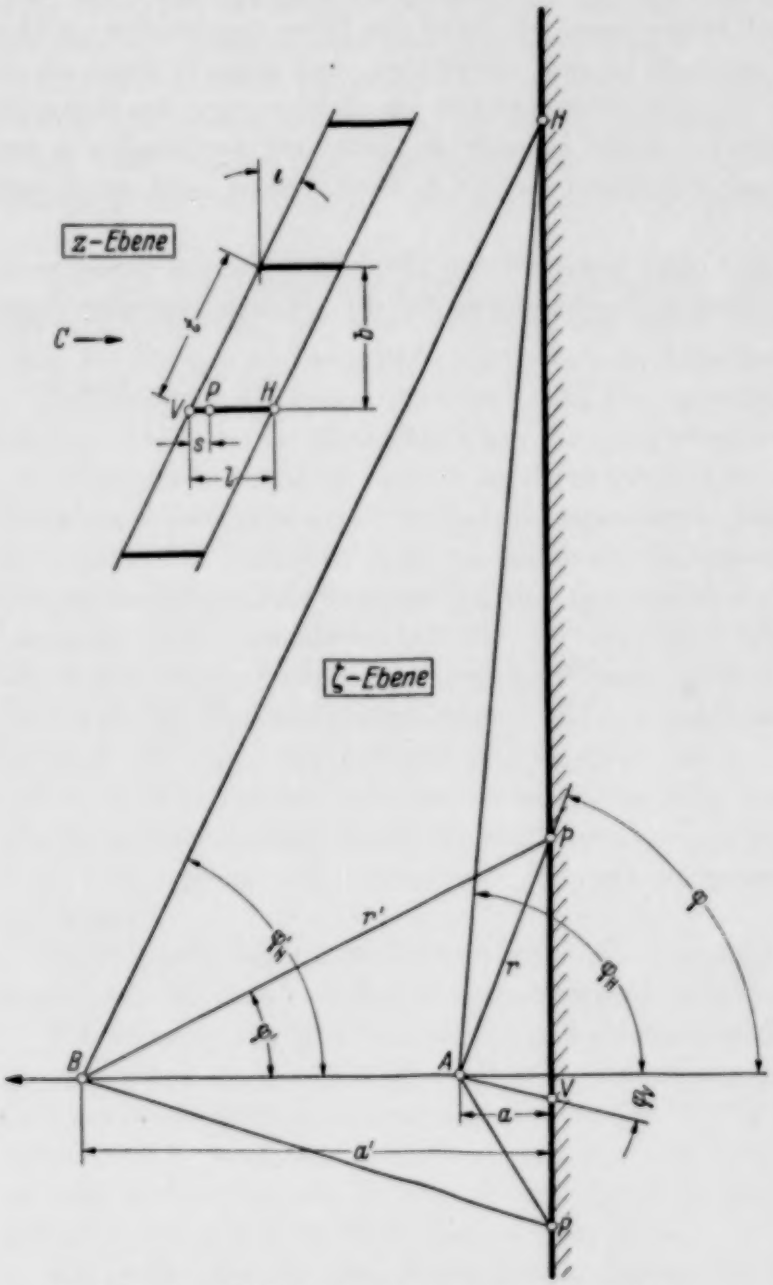


Abb. 1. Konforme Abbildung eines Streifens eines Streckenprofilgitters der z-Ebene auf die halbe ζ-Ebene.

1. Das Streckenprofilgitter. Die einfachste Form der geraden Gitter ist das sogenannte Streckenprofilgitter, bei dem die Schaufeln aus ebenen Platten bestehen. Solche Gitter sind hauptsächlich von *Weinig*[2] sehr eingehend behandelt worden. Die Strömung durch sie läßt sich durch geschlossene Formeln weitgehend darstellen. Aber diese exakten Zusammenhänge sind recht verwickelt und unübersichtlich. Deshalb soll im folgenden versucht werden, Näherungsbeziehungen aufzustellen, die einigermaßen bequem zu verwenden sind, deren Genauigkeit aber doch für die meisten praktischen Zwecke ausreicht.

In Abb. 1 ist links oben in einer z-Ebene ein Streckenprofilgitter dargestellt. Die kennzeichnenden Größen sind der Staffelungswinkel ι und das Verhältnis der Teilung t oder der Weite

$$b = t \cos \iota \tag{1}$$

der von den Schaufeln gebildeten Kanäle zur Schaufellänge l. Für unsere Aufgabe hat es sich als zweckmäßig erwiesen, anstatt des Teilungsverhältnisses t/l das letztere Verhältnis, das Kanalweitenverhältnis b/l zu verwenden.

[1] *A. Betz*, Konforme Abbildung. Springer: Berlin/Göttingen/Heidelberg 1948.
[2] *F. Weinig*, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig: Joh. Ambr. Barth, 1935.

Wird das Gitter mit einer Geschwindigkeit c in Richtung der Schaufelebenen angeströmt, so stören die Schaufeln, da sie ja in Stromrichtung liegen, die Strömung nicht. Diese ist eine ungestörte Parallelströmung. Ein Punkt P der Schaufel im Abstand s von der Vorderkante hat gegenüber der Vorderkante das Strömungspotential

$$\Phi = c\,s\,. \tag{2}$$

Ein Streifen dieser Strömung von der Breite b möge nun so auf eine Halbebene ζ abgebildet werden, daß das Schaufelprofil in den Rand der Halbebene und die Unendlichkeitspunkte der Zu- und Abströmung in der z-Ebene in zwei Punkte A und B der ζ-Ebene übergehen, die auf einer zum Halbebenenrande senkrechten Geraden im Abstande a und a' vom Halbebenenrande liegen (Abb. 1 rechts unten). Das Verhältnis der beiden Abstände sei

$$a/a' = \varepsilon\,. \tag{3}$$

(Die Abbildung auf eine Halbebene ist bereits in der ersten Bearbeitung derartiger Abbildungen von *König*[1] verwandt worden. Doch waren dort die Unendlichkeitspunkte etwas anders gelegt.) Im Punkte A ergibt sich dann als Abbild der Strömung eine Wirbelquelle mit der Quellstärke

$$E = c\,b \tag{4}$$

und der Zirkulation

$$\Gamma = E \operatorname{tg} \iota\,. \tag{5}$$

Im Punkte B ergibt sich entsprechend eine Wirbelquelle mit der Quellstärke

$$E' = -E = -c\,b \tag{6}$$

und der Zirkulation

$$\Gamma' = -\Gamma = -E \operatorname{tg} \iota\,. \tag{7}$$

Bei der Ergänzung der Halbebene zur Vollebene durch Spiegelung erscheinen auf der rechten Halbebene die entsprechenden gespiegelten Wirbelquellen. Ihre Wirkungen auf die Geschwindigkeiten und Potentiale längs des Halbebenenrandes sind die gleichen wie die der linken Wirbelquellen. Wir brauchen daher die Wirkungen der letzteren nur jeweils zu verdoppeln.

Die Strömung, die sich als Feld dieser Wirbelquellen in der ζ-Ebene ergibt, entspricht der Parallelströmung in einem waagerechten Streifen der z-Ebene von der Breite b. Auf dem Halbebenenrand ergeben sich zwei Staupunkte V und H. Sie entsprechen der Vorderkante und Hinterkante der Schaufel. Das Gebiet des Halbebenenrandes oberhalb V, zwischen V und H, entspricht der Schaufeloberseite, das Gebiet unterhalb V und oberhalb H der Unterseite. Einem Punkte P der Schaufel im Abstande s von der Vorderkante entsprechen daher zwei Punkte P des Halbebenenrandes. Von diesen ist der eine dem Punkte P der Schaufeloberseite zugeordnet und liegt in dem entsprechenden Bereich; der andere in dem anderen Bereich liegende ist dem gleichgelegenen Punkte P der Unterseite zugeordnet. Die Zuordnung ergibt sich jeweils daraus, daß die beiden Punkte P im Felde der beiden Wirbelquellen, die gleiche Potentialdifferenz gegenüber dem Vorderkantenpunkte V ergeben, wie sie sich für den Punkt P der Schaufel nach (2) ergibt.

In der ζ-Ebene lassen sich die meisten Strömungsaufgaben für das Gitter leicht lösen und mittels der gewonnenen Zuordnung der Punkte auch leicht in die z-Ebene des Gitters übertragen. Die wesentliche Aufgabe besteht also darin, für eine gegebene Gitteranordnung die Zuordnung der Punkte zu finden. Dabei ist es meist nicht sehr schwer zu einem gegebenen Punkt des Halbebenenrandes der ζ-Ebene den zugehörigen Punkt der Schaufeloberfläche zu finden. In der Regel liegt aber die umgekehrte Aufgabe vor, zu einem Punkt der Schaufeloberfläche den entsprechenden Punkt des Halbebenenrandes zu finden. Insbesondere braucht man meist neben der Zuordnung eines Punktes der Oberseite des Schaufelprofiles auch die Zuordnung des gleichen Punktes der Unterseite und umgekehrt. Dies erfordert die Lösung einer recht unbequemen Gleichung. Man kann grundsätzlich natürlich so vorgehen, daß man für eine Reihe von Punkten der ζ-Ebene, die zugehörigen der z-Ebene berechnet und durch Interpolation dieser Punkte auch die Zuordnung für den gerade benötigten Punkt der Schaufel ermittelt. Aber dieses Verfahren ist recht umständlich. Für viele Aufgaben wäre eine bequemere leicht zu handhabende Feststellung der Zuordnung erwünscht, selbst wenn sie nicht ganz streng genau ist. Insbesondere sind solche formelmäßigen Beziehungen erwünscht, um sie für analytisch weiter zu behandelnde Aufgaben verwenden zu können. Im folgenden soll eine solche einfache Näherungslösung gesucht werden. Dabei erleichtert der Umstand, daß wir uns auf große Schaufellängen beschränken, die Aufgabe.

Bei unendlich langen Schaufeln wird das Potential der Hinterkante gegenüber dem der Vorderkante ∞. Dementsprechend rückt der Abbildungspunkt H der Hinterkante in der ζ-Ebene und gleichzeitig auch der dem Unendlichkeitspunkte der Abströmung entsprechende Punkt B mit der

[1] *E. König*, ZAMM, II (1922), S. 422.

negativen Wirbelquelle ins Unendliche. Es bleibt nur die Wirbelquelle A und der Staupunkt V, der der Vorderkante entspricht, bestehen. Bei endlicher aber einigermaßen großer Schaufellänge im Verhältnis zur Teilung t bzw. zur Kanalweite b liegt der Punkt B mit der negativen Wirbelquelle in großer Entfernung vom Halbebenenrand. Es ist $\varepsilon = a/a' \ll 1$. Der Einfluß dieser Wirbelquelle ist also klein. Es ist daher zweckmäßig, ihn zunächst zu vernachlässigen, d. h. unendlich lange Schaufeln zu betrachten und den Einfluß der endlichen Schaufellänge, falls es nötig sein sollte, nachträglich als kleine Korrektur zu berücksichtigen.

2. Gitter mit unendlich langen Schaufeln. Den Abstand a der im Endlichen liegenden Wirbelquelle vom Halbebenenrand können wir als Maßeinheit der ζ-Ebene beliebig wählen. Der Abstand eines Punktes P von der Wirbelquelle A sei r und der Winkel, den der Strahl AP mit der Normalen zum Halbebenenrand bildet, sei φ (Abb. 1). Dann ist

$$r = a/\cos\varphi\,. \tag{8}$$

Die Geschwindigkeit, die als Feld der Wirbelquelle und ihres Spiegelbildes im Punkte P herrscht, wird

$$w = \frac{E}{r\pi}\sin\varphi + \frac{\Gamma}{r\pi}\cos\varphi = \frac{E}{a\pi}\cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\iota)\,. \tag{9}$$

Im Staupunkt V ist $w = 0$. Für seine Lage ergibt sich hiernach

$$\operatorname{tg}\varphi_V + \operatorname{tg}\iota = 0\,, \qquad \varphi_V = -\iota\,. \tag{10}$$

Das Potential im Punkte P gegenüber diesem Staupunkt V, der ja der Schaufelvorderkante entspricht, ist

$$\Phi = \frac{E}{\pi}\ln\frac{r}{r_V} + \frac{\Gamma}{\pi}(\varphi - \varphi_V) = \frac{E}{\pi}\left[\ln\frac{\cos\iota}{\cos\varphi} + (\varphi + \iota)\operatorname{tg}\iota\right]. \tag{11}$$

Dieses Potential muß gleich sein dem in dem entsprechenden Punkt P der Schaufel, im Abstand s von der Vorderkante herrschenden, das nach (2) $\Phi = c\,s$ ist. Da nach (4) $E = c\,b$ ist, so ergibt sich zwischen s und φ der Zusammenhang

$$\frac{s\pi}{b} = \ln\frac{\cos\iota}{\cos\varphi} + (\varphi + \iota)\operatorname{tg}\iota\,. \tag{12}$$

Diese Gleichung ist nun nach φ aufzulösen. Da jeweils $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ ist, ergeben sich zu einem Punkte der Schaufel im Abstande s von der Vorderkante im allgemeinen zwei durch die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmte Punkte des Halbebenenrandes der ζ-Ebene. Von diesen entspricht der eine der Oberseite, der andere der Unterseite der Schaufel. Nur für die Vorderkante ($s = 0$) und für die Hinterkante ($s = \infty$) fallen die beiden Werte von φ zusammen ($\varphi_1 = \varphi_2 = -\iota$ bzw. $= \pi/2$). Die Aufgabe besteht nun darin, bei gegebenem Staffelungswinkel ι zu einem gegebenen Punkte s die zugehörigen Werte φ_1 und φ_2 zu bestimmen, d. h. Gleichung (12) nach φ aufzulösen. Darin besteht aber gerade die Schwierigkeit der Aufgabe, da φ in Gleichung (12) in einem mathematisch recht unbequemen Zusammenhang auftritt.

Man kann Gleichung (12) auch in der Form

$$e^{-\pi s/b} = \cos\vartheta = \frac{\cos\varphi}{\cos\iota}\cdot e^{-(\varphi+\iota)\operatorname{tg}\iota} \tag{13}$$

schreiben. Dabei ist anstatt des Abstandes s des Schaufelpunktes von der Vorderkante der Winkel

$$\vartheta = \pm\arccos e^{-\pi s/b} \tag{14}$$

eingeführt, der die Lösung $\varphi = \vartheta$ für den Spezialfall $\iota = 0$ darstellt. Da zu jedem Wert s nach (13) ein Wert $\cos\vartheta$ gehört, dieser aber durch die beiden Werte $+\vartheta$ und $-\vartheta$ befriedigt wird, kann man festlegen, daß jeweils $+\vartheta$ der Oberseite und $-\vartheta$ der Unterseite der Schaufel zugeordnet sein soll. Dadurch erhält man eine eindeutige Zuordnung der Größen φ, ϑ und ι.

Um zunächst einen Überblick über diese Zusammenhänge zu gewinnen, kann man jeweils zu gegebenen Werten ι und φ das zugehörige ϑ berechnen. Das Ergebnis ist in Abb. 2 dargestellt. Dabei ist zur Vereinfachung und bequemeren Darstellung

$$x = 2\,\iota/\pi\,, \qquad y = 2\,\vartheta/\pi\,, \qquad z = 2\,\varphi/\pi \tag{15}$$

eingeführt. Bei der erwähnten Festsetzung, daß $+\vartheta$ die Oberseite, $-\vartheta$ die Unterseite darstellt, die z-Werte in der oberen Hälfte also $z_1 = 2\,\varphi_1/\pi$ in der unteren $z_2 = 2\,\varphi_2/\pi$ bedeuten, bestehen folgende Symmetriebeziehungen[1]

$$\begin{aligned} z_1 &= z\langle +x, +y\rangle = -z\langle -x, -y\rangle\,,\\ z_2 &= z\langle +x, -y\rangle = -z\langle -x, +y\rangle\,. \end{aligned} \tag{16}$$

[1] $\langle\,\rangle$ bedeutet „Funktion von".

Für die Achsen und Ränder des Schaubildes lassen sich die Zusammenhänge leicht ermitteln. Es ist

$$\begin{aligned}
&z_1 = y\,, \quad z_2 = -y && \text{für } x = 0\,,\\
&z_1 = z_2 = -x && \text{für } y = 0\,,\\
&z_1 = -z_2 = \frac{\pi}{2} && \text{für } y = \frac{\pi}{2}\,,\\
&z_1 = -z_2 = -\frac{\pi}{2} && \text{für } y = -\frac{\pi}{2}\,,\\
&z_1 = z_2 = -\frac{\pi}{2} && \text{für } x = \frac{\pi}{2}\,,\\
&z_1 = z_2 = \frac{\pi}{2} && \text{für } x = -\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

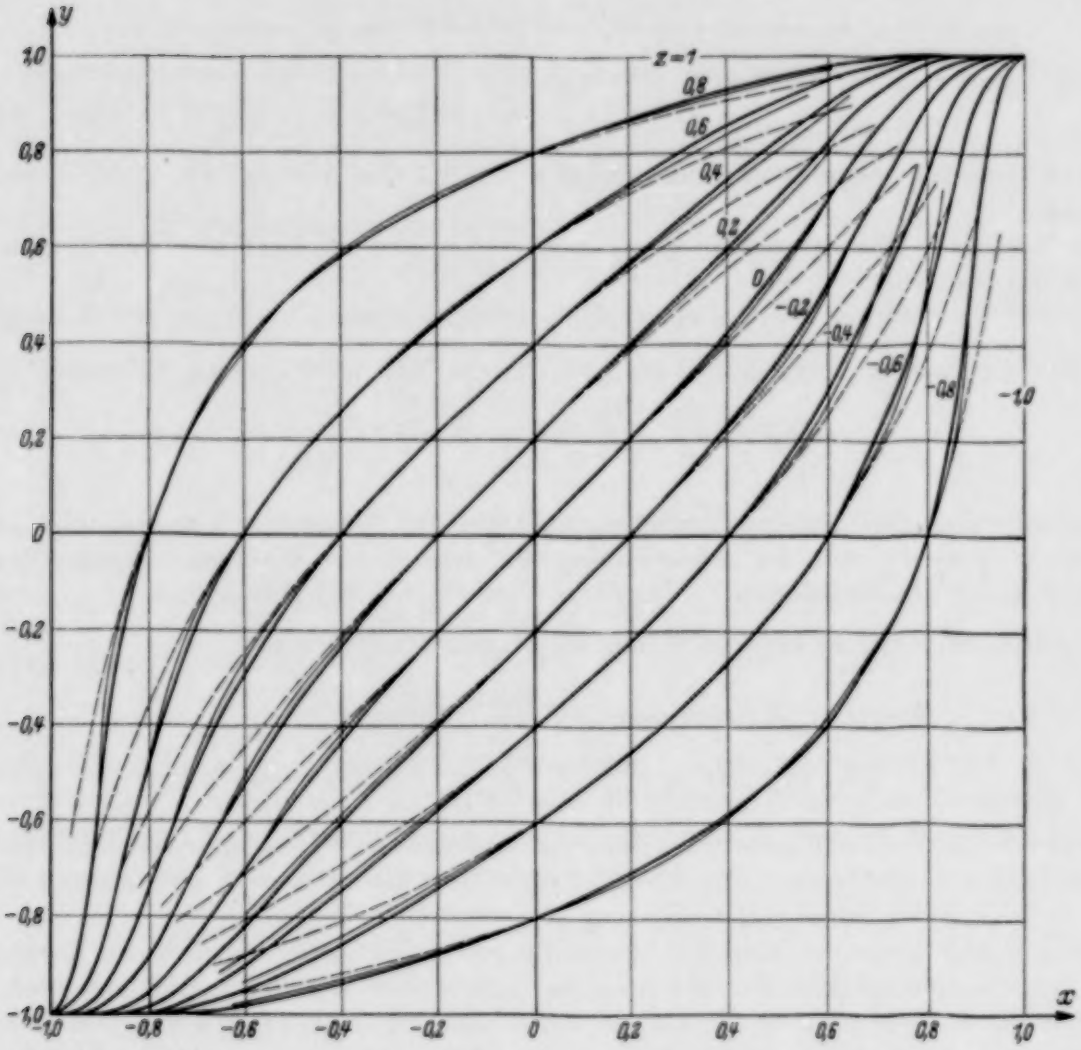


Abb. 2. Zusammenhang der Größen $x = 2\,\iota/\pi$, $y = 2\,\vartheta/\pi$ und $z = 2\,\varphi/\pi$. Stark ausgezogen: genaue Werte gemäß Gleichung (13), dünn gestrichelt: Näherung I nach Gleichung (17), dünn ausgezogen: Näherung II nach Gleichung (23).

Diese Randwerte sind symmetrisch zur Diagonale $y = x$. Aber in den beiden Eckpunkten $y = x = \pm 1$ befindet sich eine recht unangenehme, mathematisch schwer zu erfassende Singularität, welche die Symmetrie zur Diagonale stört. Diese Störung wird aber um so geringer, je mehr man sich den Achsen $x = 0$ oder $y = 0$ nähert. Für die Umgebung der Achsen kann man deshalb für z bzw. φ eine sehr einfache Näherungsfunktion verwenden, welche die Randbedingungen erfüllt, im übrigen aber symmetrisch zur Diagonale $y = x$ ist. Eine solche Funktion ist

$$\varphi_{\mathrm{I}} \approx \frac{\vartheta - \iota}{1 - 4\,\vartheta\,\iota/\pi^2} \qquad \text{bzw.} \qquad z_{\mathrm{I}} \approx \frac{y - x}{1 - x\,y}\,. \tag{17}$$

Sie ist in Abb. 2 als dünne gestrichelte Linien eingezeichnet. Man erkennt, daß sie etwa in einem Bereich $x\,y < 0{,}2$ die wahren Werte z (bzw. φ) gut darstellt. Da dieser Bereich, kleiner Staffelungswinkel ι oder nächste Umgebung der Eintrittskante, praktisch besonders häufig interessiert, so kann man in diesen Fällen mit dieser einfachen Näherung auskommen.

Würde man eine Ersatzfunktion verwenden, welche sich in den singulären Eckpunkten ebenso verhält, wie die richtige Funktion, so wäre zu erwarten, daß sie den ganzen Bereich gut annähert. Aber gerade dieses Verhalten in den singulären Eckpunkten ist mathematisch sehr schwer zu

erfassen und läßt sich nicht durch einfache bequeme Formeln darstellen. Näherungslösungen, welche die singulären Stellen nicht richtig wiedergeben, können natürlich den Bereich in der Umgebung der singulären Stellen auch nicht richtig wiedergeben. Das ist aber praktisch nicht von Bedeutung, da dieser Bereich, sehr große Staffelungswinkel und gleichzeitig sehr große Entfernung von der Vorderkante, nur selten vorkommt und außerdem mit anderen Methoden behandelt werden kann.

Um die Abweichung der Kurven vom symmetrischen Verlauf zu verfolgen, führen wir statt der Ordinaten x und y die Verbindung $y - x$ und $y + x$ ein. Dabei ist $y - x$ das $\sqrt{2}$-fache des Abstandes eines Punktes x, y von der Diagonale $y = x$ und $y + x$ das $\sqrt{2}$-fache des Abstandes von der Diagonale $y = -x$. Wenn man beachtet, daß

$$2 \cos\vartheta \cos\iota = \cos(\vartheta - \iota) + \cos(\vartheta + \iota) \tag{18}$$

ist, kann man Gleichung (13) auch schreiben

$$\cos(\vartheta - \iota) = \cos(y - x)\,\pi/2 = e^{-(\varphi + \iota)\operatorname{tg}\iota} \cos\varphi - \cos(x + y)\,\pi/2\,. \tag{19}$$

Insbesondere ergibt sich für die Kurve $\varphi = z = 0$

$$\cos(y - x)_0\,\pi/2 = 2\,e^{-\iota \operatorname{tg}\iota} - \cos(x + y)_0\,\pi/2\,. \tag{20}$$

Hieraus kann man für jeden Staffelungswinkel $\iota = x\,\pi/2$ den Abstand $(y - x)/\sqrt{2}$ von der Diagonale berechnen.

Da diese Rechnung aber immerhin noch etwas unbequem ist, kann man den Verlauf der Kurve $z = 0$ durch die Näherung

$$(y - x)_0 \approx 0{,}7\,(x\,y)^2\,(x + y)\,(1 - x\,y) \tag{21}$$

darstellen. Für die Punkte dieser Kurve muß $z = 0$ sein. Man muß also die Näherung (17) hierfür zu

$$z \approx z_1 - \frac{(y - x)_0}{1 - x\,y} \approx z_1 - 0{,}7\,(x\,y)^2\,(x + y) \tag{22}$$

korrigieren.

Die Abweichungen der übrigen Kurven $z \neq 0$ von der symmetrischen Formel (17) kann man nun angenähert proportional der Abweichung der Kurve $z = 0$ setzen. Wenn man weiterhin beachtet, daß diese Abweichungen der anderen Kurven an den Rändern $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$ gegen Null gehen müssen, so liegt es nahe, als Proportionalitätsfaktor $1 - \left(\frac{y - x}{1 - x\,y}\right)^2 = 1 - z_1^2$ zu verwenden.

Für die z- bzw. φ-Werte ergibt sich demnach die Näherung

$$z_{II} = 2\,\varphi_{II}/\pi \approx \frac{y - x}{1 - x\,y} - 0{,}7\,(x\,y)^2\,(x + y)\left[1 - \left(\frac{y - x}{1 - x\,y}\right)^2\right] = z_1 - 0{,}7\,(x\,y)^2\,(x + y)\,(1 - z_1^2)\,. \tag{23}$$

Die sich hiernach für die verschiedenen z-Kurven ergebenden Näherungen sind in Abb. 2 als dünne ausgezogene Linien eingetragen. Die Abweichungen der Kurve $z = 0$ vom wahren Wert (starke Kurve) ist auf die Näherung nach Gleichung (21) zurückzuführen.

Wie man aus Abb. 2 ersieht, sind die Abweichungen dieser Näherung in einem Bereich $x\,y < 0{,}6$ so gering, daß die Genauigkeit für die meisten praktischen Zwecke ausreichen wird. Will man aber trotzdem noch höhere Genauigkeit, so kann man die Näherungswerte von φ beliebig verbessern. Man berechnet dazu mittels (12) zu dem Näherungswert φ_{II} den zugehörigen Wert s_{II}. Dieser wird von dem Sollwert s um $\Delta s = s_{II} - s$ abweichen. Entsprechend weicht dann auch φ_{II} vom richtigen Wert um $\Delta\varphi = \varphi_{II} - \varphi$ ab. Da Δs und $\Delta\varphi$ gleiche Potentialunterschiede $\Delta\Phi$ ergeben müssen, ist

$$\Delta\Phi = c\,\Delta s \approx a\,w\,\Delta \operatorname{tg}\varphi \approx a\,w\,\Delta\varphi/\cos^2\varphi\,. \tag{24}$$

Nach (9) ist mit $E = c\,b$

$$a\,w = \frac{c\,b}{\pi} \cos^2\varphi\,[\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\iota]\,. \tag{25}$$

Demnach wird

$$\Delta\varphi \approx \Delta s \frac{\pi}{b\,(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\iota)}\,. \tag{26}$$

Für φ kann man dabei den Näherungswert φ_{II} nach (23) verwenden. Der dann noch verbleibende Fehler kann grundsätzlich durch iterative Wiederholung dieses Verfahrens beliebig verkleinert werden. Im allgemeinen wird aber ein erster Verbesserungsschritt so genaue Werte liefern, daß sie auch sehr hohen Ansprüchen genügen. In der Nähe des Staupunktes V geht $w \to 0$, so daß sich hier dieses Verbesserungsverfahren nicht anwenden läßt. Aber in der Umgebung dieses Punktes, also für $y \to 0$ ist auch kein Verbesserungsverfahren nötig, da hier bereits die Näherung φ_1 in die exakte Lösung übergeht.

3. Einfluß der endlichen Schaufellänge. Bei endlicher Schaufellänge tritt im Punkte B im Abstand $a' = a/\varepsilon$ vom Halbebenenrand die schon in Gleichung (6) und (7) erwähnte Wirbelquelle mit der Quellstärke $E' = -E$ und der Zirkulation $\Gamma' = -\Gamma$ auf. Diese bewirkt auf dem Halbebenenrand entsprechend (9) die zusätzliche Geschwindigkeit

$$w' = -\frac{E}{a'\pi}\cos^2\varphi'\,(\operatorname{tg}\varphi' + \operatorname{tg}\iota)\,. \tag{27}$$

Dabei ist φ' der Winkel des vom Punkte B zum betrachteten Punkt P gezogenen Fahrstrahles mit der Achse BA. Zwischen φ' und φ besteht der Zusammenhang

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{a}{a'}\operatorname{tg}\varphi = \varepsilon\operatorname{tg}\varphi \tag{28}$$

oder

$$\cos^2\varphi' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi'} = \frac{1}{1+\varepsilon^2\operatorname{tg}^2\varphi}\,. \tag{29}$$

Infolge der Zusatzgeschwindigkeit erhält man für die Richtungswinkel φ_V und φ_H nach den Staupunkten V und H jetzt die Bedingung

$$w + w' = 0 = \frac{E}{a\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\iota}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right) - \varepsilon\left(\frac{\varepsilon\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\iota}{1+\varepsilon^2\operatorname{tg}^2\varphi}\right)\right]. \tag{30}$$

Dies ergibt für $\operatorname{tg}\varphi$ die quadratische Gleichung

$$(1+\varepsilon)\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\iota\,(1-\varepsilon\operatorname{tg}^2\varphi) \tag{31}$$

mit den beiden Lösungen für die der Vorder- und Hinterkante entsprechenden Staupunkte

$$\operatorname{tg}\varphi_V = \frac{1+\varepsilon}{2\,\varepsilon\operatorname{tg}\iota}\left[1 - \sqrt{1+\varepsilon\left(\frac{2\operatorname{tg}\iota}{\varepsilon+1}\right)^2}\right], \tag{32}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_H = \frac{1+\varepsilon}{2\,\varepsilon\operatorname{tg}\iota}\left[1 + \sqrt{1+\varepsilon\left(\frac{2\operatorname{tg}\iota}{\varepsilon+1}\right)^2}\right]. \tag{33}$$

Zwischen den der Vorder- und Hinterkante entsprechenden Punkten V und H ergeben sich demnach die Beziehungen

$$\operatorname{tg}\varphi_V + \operatorname{tg}\varphi_H = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon\operatorname{tg}\iota} \tag{34}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi_V \cdot \operatorname{tg}\varphi_H = -\frac{1}{\varepsilon}\,. \tag{35}$$[1]

Die Schaufellänge sei nun so groß vorausgesetzt, daß $\varepsilon \ll 1$ und auch $\varepsilon\operatorname{tg}^2\iota \ll 1$ ist. Es wird sich zeigen, daß diese Forderung schon bei ziemlich mäßigen Schaufellängen erfüllt wird. Unter diesen Voraussetzungen kann man sich auf lineare Glieder in ε beschränken und erhält aus (32) durch eine Potenzentwicklung der Wurzel näherungsweise

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\varphi_V &\approx -\frac{1+\varepsilon}{2\,\varepsilon\operatorname{tg}\iota}\left[2\,\varepsilon\left(\frac{\operatorname{tg}\iota}{1+\varepsilon}\right)^2 - 2\,\varepsilon^2\left(\frac{\operatorname{tg}\iota}{1+\varepsilon}\right)^4 + \cdots\cdots\right]\\ &= -\frac{\operatorname{tg}\iota}{1+\varepsilon}\left[1-\varepsilon\left(\frac{\operatorname{tg}\iota}{1+\varepsilon}\right)^2 + \cdot\cdot\right] \approx -\operatorname{tg}\iota + \varepsilon\operatorname{tg}\iota + \varepsilon\operatorname{tg}^3\iota\\ &= -\operatorname{tg}\iota + \varepsilon\operatorname{tg}\iota\,(1+\operatorname{tg}^2\iota) = -\operatorname{tg}\iota + \frac{\varepsilon\operatorname{tg}\iota}{\cos^2\iota}\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

oder

$$\varphi_V + \iota \approx \operatorname{tg}(\varphi_V + \iota) \approx (\operatorname{tg}\varphi_V + \operatorname{tg}\iota)\cos^2\iota \approx \varepsilon\operatorname{tg}\iota\,. \tag{37}$$

Der Richtungswinkel φ_V zum Staupunkt V wird demnach bei endlicher Schaufellänge um die kleine Größe $\varepsilon\operatorname{tg}\iota$ verschoben. In vielen Fällen kann man diese kleine Verschiebung vernachlässigen.

Für den Richtungswinkel zu dem der Hinterkante der Schaufeln entsprechenden Staupunkt H erhält man nach (35) und (36)

$$\operatorname{tg}\varphi_H = -\frac{1}{\varepsilon\operatorname{tg}\varphi_V} \approx \frac{1}{\varepsilon\operatorname{tg}\iota\,(1-\varepsilon/\cos^2\iota)} \approx \frac{1}{\varepsilon\operatorname{tg}(\iota-\varepsilon\operatorname{tg}\iota)} \approx \frac{1}{\varepsilon\operatorname{tg}\iota} \tag{38}$$

und somit

$$\varphi_H \approx \frac{\pi}{2} - \varepsilon\operatorname{tg}(\iota - \varepsilon\operatorname{tg}\iota) \approx \frac{\pi}{2} - \varepsilon\operatorname{tg}\iota\,, \qquad \cos\varphi_H \approx \sin(\varepsilon\operatorname{tg}\iota) \approx \varepsilon\operatorname{tg}\iota\,. \tag{39}$$

[1] Diese Beziehung ergibt sich auch unmittelbar, wenn man Vorder- und Hinterkante der Schaufeln vertauscht, wobei sowohl a' und a, wie H und V ihre Lage vertauschen. Dies wird für a und a' durch die lineare Transformation $\zeta' = a\,a'/\zeta = a^2/\varepsilon\,\zeta$ erreicht. Durch die gleiche Transformation muß $i\,a\operatorname{tg}\varphi_H$ in $i\,a\operatorname{tg}\varphi_V$ übergehen, also $i\,a\operatorname{tg}\varphi_V = \dfrac{a^2}{\varepsilon\,i\,a\operatorname{tg}\varphi_H}$ oder $\operatorname{tg}\varphi_V\operatorname{tg}\varphi_H = \dfrac{1}{i^2\varepsilon} = -\dfrac{1}{\varepsilon}$ sein.

Ferner wird nach (28), (37) und (38)

$$\operatorname{tg}\varphi'_V = \varepsilon \operatorname{tg}\varphi_V\,, \qquad \varphi'_V \approx -\varepsilon \operatorname{tg}(\iota - \varepsilon \operatorname{tg}\iota)\,, \qquad \cos\varphi'_V \approx 1 \tag{40}$$

$$\operatorname{tg}\varphi'_H = \varepsilon \operatorname{tg}\varphi_H \approx \frac{1}{\operatorname{tg}(\iota - \varepsilon \operatorname{tg}\iota)}\,, \qquad \varphi'_H \approx \frac{\pi}{2} - \iota + \varepsilon \operatorname{tg}\iota\,. \tag{41}$$

Für die Zuordnung eines Punktes s der Schaufel und des Richtungswinkels φ zum entsprechenden Punkte des Halbebenenrandes ergibt sich analog (12) bei endlicher Schaufellänge die um den Einfluß der zweiten Wirbelquelle erweiterte Beziehung

$$\frac{\pi s}{b} = \ln\frac{\cos\varphi_V}{\cos\varphi} - \ln\frac{\cos\varphi'_V}{\cos\varphi'} + \operatorname{tg}\iota\,[\varphi - \varphi_V - (\varphi' - \varphi'_V)\,. \tag{42}$$

Wenn durch die Zusatzglieder der Punkt s unverändert bleiben soll, muß φ in $\varphi + \Delta\varphi$ geändert werden. Wenn man beachtet, daß für hinreichend kleine $\Delta\varphi$

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) \approx (1 - \operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi)\cos\varphi \tag{43}$$

ist, ergibt sich bei Beschränkung auf lineare Glieder in ε für $\Delta\varphi$ die Beziehung

$$0 = -\ln(1 - \operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi) + \operatorname{tg}\iota\,[\Delta\varphi - (\varphi' - \varphi'_V)\,. \tag{44}$$

Beschränken wir uns auf nicht allzu große Winkel φ, so daß $\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi \ll 1$ und $\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \ll 1$ ist, so ergibt sich aus (44)

$$\Delta\varphi\,(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\iota) \approx \varepsilon\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_V)\operatorname{tg}\iota\,. \tag{45}$$

$$\Delta\varphi \approx \varepsilon \operatorname{tg}\iota\,. \tag{46}$$

Nach (37) hat sich diese Verschiebung als Änderung $\Delta\varphi_V$ des Richtungswinkels zum Vorderkantenpunkt V ergeben. Sie zeigt sich jetzt in gleicher Größe, unabhängig von φ in einem Bereich nicht allzu großer φ-Werte ($\varepsilon \operatorname{tg}\varphi \ll 1$), der praktisch ja hauptsächlich interessiert.

Der Punkt mit dem Richtungswinkel φ_H entspricht der Hinterkante der Platte, also einem Wert $s = l$. Nach (42) gilt hiernach

$$\frac{\pi l}{b} = \ln\frac{\cos\varphi_V}{\cos\varphi_H} - \ln\frac{\cos\varphi'_V}{\cos\varphi'_H} + \operatorname{tg}\iota\,[\varphi_H - \varphi_V - (\varphi'_H - \varphi'_V)]\,. \tag{47}$$

Setzt man die Näherungswerte (36) bis (41) ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen ε und ι. Es wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi l}{b} &\approx \ln\frac{\cos\iota}{\varepsilon\operatorname{tg}\iota}\sin\iota + \operatorname{tg}\iota\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\operatorname{tg}\iota + \iota - \varepsilon\operatorname{tg}\iota - \frac{\pi}{2} + \iota - \varepsilon\operatorname{tg}\iota + \varepsilon\operatorname{tg}\iota\right) \\ &= \ln\frac{\cos^2\iota}{\varepsilon} + 2\operatorname{tg}\iota\,(\iota - \varepsilon\operatorname{tg}\iota) \approx \ln\frac{\cos^2\iota}{\varepsilon} + 2\,\iota\operatorname{tg}\iota \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und somit

$$\varepsilon \approx \cos^2\iota\, e^{-\frac{\pi l}{b} + 2\iota\operatorname{tg}\iota} = \cos^2\iota\, e^{-\frac{\pi l}{t\cos\iota} + 2\iota\operatorname{tg}\iota}\,. \tag{49}$$

Für ungestaffelte Gitter, also für $\iota = 0$, wird $\varepsilon = e^{-\pi l/t}$. Das ergibt schon für die recht mäßige Schaufellänge $l = t$ einen Wert $\varepsilon = e^{-\pi} = 0{,}043$. Mit wachsender Schaufellänge nimmt ε sehr rasch weiter ab; für $l = 2\,t$ z. B. ist es bereits auf $\varepsilon = 0{,}002$ gesunken. Bei endlichem Staffelungswinkel ι ist ε stets noch kleiner als bei $\iota = 0$. Da ε-Werte, die kleiner als etwa 0,01 sind, praktisch bedeutungslos werden, kann man etwa mit einer groben Näherung

$$\varepsilon \approx e^{-\pi l/t}\cos\iota \tag{50}$$

auskommen. Bei einigermaßen großen Schaufellängen, etwa von $l > 1{,}5\,t$ an, wird ε und damit der Einfluß der endlichen Schaufellänge bereits so klein, daß man ihn vernachlässigen und die Formel (17) bzw. (23) für die unendlich langen Schaufeln ohne weitere Korrektur verwenden kann.

Zusammenfassung. Bei Kreiselrädern mit radialem Durchfluß kommen vielfach sehr lange Schaufeln vor. Zur konformen Abbildung der entsprechenden Streckenprofilgitter, deren strenge Behandlung recht umständlich ist, werden einfache Näherungsformeln (17) und (23) angegeben. Dabei werden die Schaufeln zunächst als unendlich lang angenommen. Der Einfluß der endlichen Schaufellänge wird dann als Korrektur behandelt. Dabei zeigt sich, daß dieser Einfluß schon bei mäßigen Schaufellängen recht gering ist, so daß man ihn meistens gar nicht zu berücksichtigen braucht.

(Eingegangen am 31. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Albert Betz*, Göttingen, Herzberger Landstr. 39a.

Über einige Verfestigungsregeln

Von **Christian Clavuot** und **Hans Ziegler**

1. Einleitung. Das plastische Verhalten eines Werkstoffes mit Spannungsverfestigung wird beschrieben durch: a) die ursprüngliche Fließbedingung, die angibt, unter welchen Spannungszuständen erstmals plastischer Fluß einsetzt; b) das Fließgesetz, welches das plastische Verzerrungsinkrement mit der Spannung und dem Spannungsinkrement verknüpft; c) das Verfestigungsgesetz, das die Änderung der Fließbedingung im Laufe des plastischen Flusses beschreibt.

Bei Metallen werden allgemein die Fließbedingungen von *R. v. Mises*[1] und von *H. Tresca*[2] verwendet und durch konvexe, den Ursprung enthaltende Flächen im Spannungsraum, die sogenannten Fließflächen, dargestellt. Als Fließgesetz darf die Regel von *R. v. Mises*[3] heute als anerkannt gelten[4], wonach der Vektor des Verzerrungsinkrements in die äußere Normale der Fließfläche im Spannungspunkt fällt.

Was das Verfestigungsgesetz anbelangt, so gibt es zur Zeit verschiedene Regeln, die noch alle den Charakter von Hypothesen haben. Nach einer von *R. Hill*[5] postulierten Regel expandiert die Fließfläche mit dem Spannungspunkt unter Beibehaltung ihrer Form und Orientation im Spannungsraum. Da dabei das Material isotrop bleibt, spricht man auch von isotroper Verfestigung; diese trägt aber dem *Bauschinger*-Effekt keine Rechnung. Nach der Regel von *W. Prager*[6] verschiebt sich die Fließfläche im neundimensionalen Spannungsraum in Richtung der äußeren Normale im Spannungspunkt, und zwar translatorisch als Ganzes. In den Unterräumen, die für das Studium einfacher Anwendungen ausreichen, ist das Verhalten der Fließfläche, wie *P. G. Hodge Jr.* und *N. Perrone*[7] in Sonderfällen sowie *R. T. Shield* und *H. Ziegler*[8] allgemein nachgewiesen haben, nicht so einfach; in gewissen Fällen sind sogar Deformationen der Fließfläche zu erwarten. Nach einer von *H. Ziegler*[9] vorgeschlagenen Modifikation der Regel von *W. Prager* verschiebt sich die Fließfläche nicht nur im neundimensionalen Spannungsraum, sondern auch in jedem Unterraum, in Richtung des vom Zentrum der Fläche nach dem Spannungspunkt gezogenen Strahles.

Sieht man von einem Vorschlag von *P. G. Hodge Jr.*[10] ab, die isotrope Verfestigung mit der Regel von *W. Prager* zu kombinieren, dann sind das Verfestigungsgesetz von *W. Prager* und seine von *H. Ziegler* vorgeschlagene Modifikation die einfachsten, dem *Bauschinger*-Effekt Rechnung tragenden, Regeln. Sie weisen trotz der verschiedenen Ausgangsannahmen sowohl grundsätzlich wie auch in ihren Spielarten für einfachere Situationen manches Gemeinsame auf. Die beiden Regeln sollen hier — in Anlehnung an die in den Fußnoten 8 und 9 zitierten Arbeiten — nochmals verglichen sowie auf ihre Unterschiede bzw. Ähnlichkeiten hin untersucht werden. Dabei können auch einige Korrekturen und Ergänzungen angebracht werden.

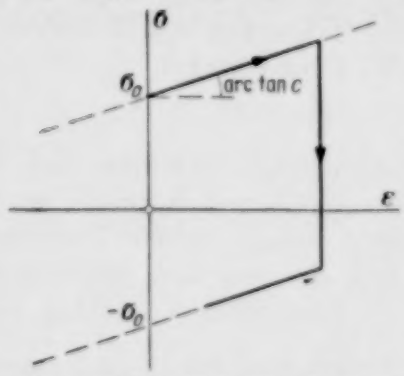


Abb. 1. Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines starr-plastischen Materials mit linearer Spannungsverfestigung.

2. Die Regeln im neundimensionalen Spannungsraum. Wir beschränken uns, um unnötige Komplikationen zu vermeiden, auf starr-plastische Stoffe, welche erstens ursprünglich isotrop sind und zweitens unter einachsigem Zug oder Druck das lineare Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Abb. 1 mit der ursprünglichen Fließ-

[1] *R. v. Mises*, Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, Goettinger Nachr., Math. Phys. Klasse, (1913) S. 582.

[2] *H. Tresca*, Mémoire sur l'écoulement des corps solides, Mém. prés. Acad. Sci., Paris, 18 (1868) S. 733.

[3] *R. v. Mises*, Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, Z. Angew. Math. Mech. 8, (1928) S. 161.

[4] vgl. *H. Ziegler*, An Attempt to Generalize Onsager's Principle, and its Significance for Rheological Problems, Ackeret-Festschrift, Z. Angew. Math. Phys. 9b (1958) S. 748.

[5] *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford 1950.

[6] *W. Prager*, The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements, James Clayton Lecture, Proc. Inst. Mech. Eng. 169 (1955) S. 41.

[7] *P. G. Hodge Jr.*, Piecewise Linear Plasticity, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels 1956. Siehe auch *N. Perrone* and *P. G. Hodge Jr.*, Applications of a Consistent Theory for Strain Hardening Plastic Solids, PIBAL Report 403, Polytechnic Inst. of Brooklyn, Brooklyn N. Y. (1958).

[8] *R. T. Shield* and *H. Ziegler*, On Prager's Hardening Rule, Z. Angew. Math. Phys. 9a (1958) S. 260.

[9] *H. Ziegler*, A Modification of Prager's Hardening Rule, Quart. Appl. Math. 17 (1959), erscheint demnächst.

[10] *P. G. Hodge Jr.*, a. a. O.

grenze σ_0 und dem Verfestigungsmodul c aufweisen. (Grundsätzlich ist eine Erweiterung auf elastisch-plastische Körper mit vorbestehender Anisotropie sowie auf Verfestigungsmoduln c, welche noch von der Dehnung abhängen, ohne weiteres möglich.) Wird ein Element dieses Materials auf ein Koordinatensystem x_i bezogen und einem beliebigen Spannungszustand σ_{ik} unterworfen, so kann dieser Spannungszustand durch einen Spannungspunkt S im 9-dimensionalen Spannungsraum σ_{ik} dargestellt werden. Die ursprüngliche Fließfläche ist in diesem Raum durch eine Gleichung der Form

$$F(\sigma_{ik}) = k^2 = \text{const} \tag{2.1}$$

gegeben, wobei die Funktion F mit Rücksicht auf die Voraussetzung anfänglicher Isotropie gegenüber Drehungen des physikalischen Koordinatensystems x_i invariant oder kurz eine Invariante des Spannungszustandes sein muß.

Beide hier zu besprechenden Regeln postulieren, daß sich die Fließfläche während des plastischen Flusses translatorisch verschiebe. Sie hat also später die Gleichung

$$F(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) = k^2\,, \tag{2.2}$$

wobei der Tensor α_{ik} die gesamte Translation der Fläche und somit in gewissem Sinne die eingetretene Verfestigung darstellt. Die linke Seite von (2.2) ist im allgemeinen keine Invariante des Spannungszustandes σ_{ik} mehr, und daraus folgt, daß das Material mit der Verfestigung anisotrop wird. Bei größeren Deformationen muß daher das Koordinatensystem x_i mit dem Element verbunden werden.

Nach dem Fließgesetz von *R. v. Mises* liegt das Verzerrungsinkrement $d\varepsilon_{ik}$, als Vektor im Spannungsraum σ_{ik} aufgefaßt, in der äußeren Normale der Fließfläche im Spannungspunkt S. Demnach ist

$$d\varepsilon_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}\, d\lambda\,, \quad d\lambda > 0\,. \tag{2.3}$$

Damit ist aber erst die Richtung des Vektors $d\varepsilon_{ik}$ festgelegt. Was seinen Betrag anbelangt, liegt es nahe, diesen der Projektion des Spannungsinkrements $d\sigma_{ik}$ auf die äußere Normale der Fließfläche proportional, also unter Verwendung der Summationsregel

$$\left(\frac{2}{3}\, c\, d\varepsilon_{ik} - d\sigma_{ik}\right)\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 0 \tag{2.4}$$

zu setzen. Wenn dabei der Proportionalitätsfaktor mit $2\,c/3$ angeschrieben wurde, dann deshalb, weil sich später herausstellen wird, daß die Konstante c in (2.4) mit dem Verfestigungsmodul von Abb. 1 identisch ist.

Im Spannungsraum ist α_{ik} der Fahrstrahl des Punktes C, der anfänglich im Ursprung lag und im folgenden als Zentrum der Fließfläche bezeichnet werden soll. Die Verfestigungsregel von *W. Prager* lautet

$$d\alpha_{ik} = \frac{2}{3}\, c\, d\varepsilon_{ik}\,. \tag{2.5}$$

Ihr zufolge verschiebt sich, wie der Vergleich von (2.5) mit (2.3) zeigt, die Fließfläche in Richtung ihrer äußeren Normale im Spannungspunkt (Abb. 2). Dabei liegt nach (2.5) und (2.4) der Vektor $d\alpha_{ik} - d\sigma_{ik}$ in der Tangentialebene der Fließfläche; die Fläche verschiebt sich mithin derart, daß sie stets den Spannungspunkt enthält.

Nach dem Vorschlag von *H. Ziegler* wird die Verfestigungsregel statt mit (2.5) mit

$$d\alpha_{ik} = (\sigma_{ik} - \alpha_{ik})\, d\mu\,, \quad d\mu > 0 \tag{2.6}$$

angesetzt. Die Fließfläche verschiebt sich dann nicht in Richtung ihrer äußeren Normale im Spannungspunkt, sondern (Abb. 3) in Richtung des von ihrem Mittelpunkt C nach dem Spannungspunkt S gezogenen Fahrstrahls. Mit (2.6) ist wiederum nur die Richtung des Vektors $d\alpha_{ik}$ festgelegt; wenn aber der Spannungspunkt auch hier stets auf der Fließfläche liegen soll, muß

$$(d\alpha_{ik} - d\sigma_{ik})\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 0 \tag{2.7}$$

sein.

Es ist klar, daß sowohl die Regel (2.5) wie auch ihre Modifikation (2.6), (2.7) physikalisch annehmbare Verallgemeinerungen des in Abb. 1 geschilderten Verhaltens unter einachsigem Zug oder Druck darstellen. Aus (2.5) folgt, daß bei der Regel von *W. Prager* der Fahrstrahl α_{ik} des Punktes C im 9-dimensionalen Spannungsraum σ_{ik} (bis auf den Faktor $2\,c/3$) die totale Verzerrung verkörpert. Bei der Modifikation (2.6), (2.7) trifft dies nicht mehr zu. Wohl kann man hier (2.7) mit Rücksicht auf (2.4) durch

$$\left(d\alpha_{ik} - \frac{2}{3}\, c\, d\varepsilon_{ik}\right)\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 0 \tag{2.8}$$

ersetzen und so feststellen, daß sich die Gesamtverzerrung (wiederum bis auf den Faktor $2c/3$) aus den Normalkomponenten der Schritte $d\alpha_{ik}$ zusammensetzt; als Ganzes läßt sie sich aber in Abb. 3 nicht mehr interpretieren. Das ist indessen kein entscheidender Nachteil, da in den praktisch meist verwendeten Unterräumen — wie sich bald zeigen wird — die besprochene einfache Interpretation der totalen Verzerrung auch unter der Regel von *W. Prager* nicht mehr direkt möglich ist. Vielmehr wird sich herausstellen, daß auch die modifizierte Regel ihre Vorzüge hat, und daß bei vielen einfachen Anwendungen beide Regeln zum gleichen Ergebnis führen.

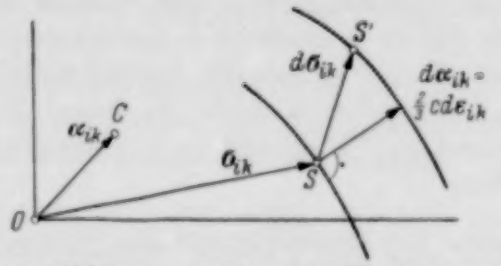


Abb. 2. Fließgesetz und *Pragersche* Verfestigungsregel im 9-dimensionalen Spannungsraum.

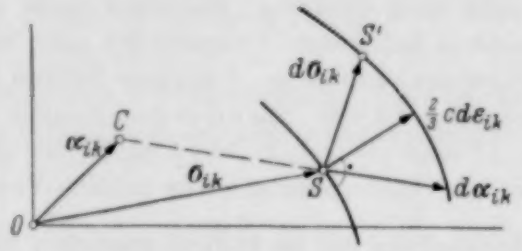


Abb. 3. Fließgesetz und modifizierte Verfestigungsregel im 9-dimensionalen Spannungsraum.

3. Einige gemeinsame Eigenschaften. Im ursprünglich isotropen Körper hat die Fließfunktion die Form

$$F(\sigma_{ik}) = G[I_1(\sigma_{ik}), I_2(\sigma_{ik}), I_3(\sigma_{ik})]\,, \tag{3.1}$$

wobei

$$I_1 = \sigma_{ii}\,, \qquad I_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}\,, \qquad I_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \tag{3.2}$$

die fundamentalen Invarianten des Spannungstensors sind. Ist der Fließbeginn anfänglich unabhängig von der mittleren Normalspannung, dann gilt mit dem *Kroneckerschen* δ_{ik} und einem beliebigen Wert von β

$$F(\sigma_{ik} + \beta\,\delta_{ik}) = F(\sigma_{ik})\,. \tag{3.3}$$

Wenn einmal plastischer Fluß eingesetzt hat, lautet die Fließfunktion gemäß (3.1) und (2.2)

$$F(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) = G[I_1(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}), I_2(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}), I_3(\sigma_{ik} - \alpha_{ik})]\,. \tag{3.4}$$

Ersetzt man σ_{ik} durch $\sigma_{ik} + \beta\,\delta_{ik}$, so bleibt (3.4) nach (3.3) unverändert, und daraus folgt, daß **das plastische Fließen unabhängig von der mittleren Normalspannung bleibt, wenn sein erstes Einsetzen von ihr unabhängig war.**

Mit (3.4) nimmt das Fließgesetz (2.3) die Form

$$d\varepsilon_{ik} = \left(\frac{\partial G}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial G}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial G}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ik}}\right) d\lambda\,, \qquad d\lambda > 0 \tag{3.5}$$

an, und hieraus wird, wenn man die partielle Ableitung der Invarianten ausführt,

$$d\varepsilon_{ik} = \left[\frac{\partial G}{\partial I_1}\delta_{ik} + \frac{\partial G}{\partial I_2}(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) + \frac{\partial G}{\partial I_3}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{jk} - \alpha_{jk})\right] d\lambda\,. \tag{3.6}$$

Nimmt man jetzt an, daß das physikalische Koordinatensystem x_i ursprünglich mit dem Hauptachsensystem des Spannungszustandes zusammenfalle, dann gilt zunächst

$$\sigma_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad \text{und} \quad \alpha_{ik} = 0\,. \tag{3.7}$$

Aus (3.6) folgt dann

$$d\varepsilon_{ik} = 0 \qquad (i \neq k)\,, \tag{3.8}$$

und damit ergibt sich sowohl nach (2.5) wie nach (2.6)

$$d\alpha_{ik} = 0 \qquad (i \neq k)\,. \tag{3.9}$$

In Worten: da das Material ursprünglich isotrop ist, sind sowohl der Tensor des ersten Verzerrungsinkrements $d\varepsilon_{ik}$ als auch der Tensor $d\alpha_{ik}$ mit dem Spannungstensor koaxial. Die Gleichungen (3.8) und (3.9) bleiben auch richtig, wenn man die zweite Annahme (3.7) durch die schwächere

$$\alpha_{ik} = 0 \qquad (i \neq k) \tag{3.10}$$

ersetzt. **Wenn also die Hauptachsen des Spannungszustandes von Anfang an im Element fest sind, dann bleibt der Tensor des Verzerrungsinkrements und damit auch der Verzerrungstensor mit dem Spannungstensor koaxial.**

Dreht sich das Hauptachsensystem des Spannungstensors, dann gelten (3.8) und (3.9) zwar noch in einem ersten infinitesimalen Schritt, vorausgesetzt, daß die Hauptachsen des Spannungszustandes als physikalische Koordinatenachsen gewählt werden. Sollen sie auch in einem zweiten Schritt bestehen bleiben, dann muß das Koordinatensystem vorher ins neue Hauptachsensystem des Spannungstensors weitergedreht werden. Damit wird aber (3.10) verletzt, und es folgt, daß mit Rücksicht auf die mit der Verfestigung auftretende Anisotropie der Tensor des Verzerrungsinkrements im allgemeinen nicht mit dem Spannungstensor koaxial ist.

Es gibt kein Problem, das man nicht auch in einem Spannungsraum von weniger als neun Dimensionen behandeln könnte. So wird man in vielen Fällen in einem 3-dimensionalen Hauptspannungsraum arbeiten. Unserem letzten Ergebnis zufolge ist dies indessen nicht möglich, wenn die Hauptachsen des Spannungszustandes im Element nicht fest sind, da in diesem Falle die ε_{ik} $(i \neq k)$ und die α_{ik} $(i \neq k)$ nicht identisch verschwinden. Überhaupt ist bei der Reduktion der Zahl der Dimensionen stets größte Vorsicht am Platz.

4. Behandlung im sechsdimensionalen Spannungsraum. Mit Rücksicht auf die Symmetrie des Spannungstensors (und des Verzerrungstensors) kann man jedes Problem auch im 6-dimensionalen Spannungsraum behandeln. Dabei empfiehlt es sich, vor allem auch im Hinblick auf die noch vorzunehmenden Spezialisierungen, die physikalischen Koordinaten mit x, y, z, die Spannungen mit $\sigma_x, \ldots, \tau_{yz}, \ldots$ und die Verzerrungen mit $\varepsilon_x, \ldots, \varepsilon_{yz}, \ldots$ zu bezeichnen, wobei die Punkte zyklische Permutationen anzeigen.

In den neuen Bezeichnungen lautet die Fließbedingung (2.2)

$$F(\sigma_x - \alpha_x, \ldots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \ldots, \tau_{zy} - \alpha_{zy}, \ldots) = k^2, \tag{4.1}$$

und zwar müssen hier $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \ldots$ noch als unabhängige Veränderliche aufgefaßt werden. Im 6-dimensionalen Spannungsraum wird man aber die drei Spannungskomponenten $\tau_{zy}, \ldots$ durch $\tau_{yz}, \ldots$ ausdrücken und die Fließbedingung in der Form

$$f(\sigma_x - \alpha_x, \ldots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \ldots) = k^2 \tag{4.2}$$

anschreiben. Aus (4.1) und (4.2) folgt dann

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \tau_{zy}} d\tau_{zy} + \cdots = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \cdots, \tag{4.3}$$

und hieraus erhält man mit Rücksicht auf die Symmetrie des Spannungstensors

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \ldots, \qquad 2\frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \ldots. \tag{4.4}$$

Bei den Verzerrungen kann man $\varepsilon_{zy}, \ldots$ durch $\varepsilon_{yz}, \ldots$ und ferner diese drei Größen durch die halben Schiebungen $\gamma_{yz}/2, \ldots$ ersetzen. Das Fließgesetz (2.3) nimmt dann wegen (4.4) im 6-dimensionalen Spannungsraum die Form

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda, \ldots, \qquad d\gamma_{yz} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\lambda, \ldots, \qquad d\lambda > 0 \tag{4.5}$$

an, und statt (2.4) hat man

$$\left(\frac{2}{3} c\, d\varepsilon_x - d\sigma_x\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \cdots + \left(\frac{1}{3} c\, d\gamma_{yz} - d\tau_{yz}\right)\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} + \cdots = 0. \tag{4.6}$$

Es stellt sich also heraus, daß das Verzerrungsinkrement auch im 6-dimensionalen Spannungsraum in die äußere Normale der Fließfläche fällt, vorausgesetzt, daß man es durch die Komponenten $d\varepsilon_x, \ldots, d\gamma_{yz}, \ldots$ darstellt. Es ist aber nicht mehr (wie in Abb. 2 und 3) der Projektion des Spannungsinkrements auf die Normale proportional.

Sowohl aus (2.5) wie aus (2.6) folgt $\alpha_{zy} = \alpha_{yz}, \ldots$. Die Verfestigungsregel (2.5) von *W. Prager* nimmt im 6-dimensionalen Raum die Gestalt

$$d\alpha_x = \frac{2}{3} c\, d\varepsilon_x, \ldots, \qquad d\alpha_{yz} = \frac{1}{3} c\, d\gamma_{yz}, \ldots \tag{4.7}$$

an. Hier verschiebt sich also die Fließfläche im allgemeinen nicht mehr (wie in Abb. 2) in Richtung der äußeren Normale im Spannungspunkt, wenn auch offensichtlich noch immer so, daß der Spannungspunkt auf ihr liegen bleibt. Damit hängt zusammen, daß die Koordinaten des Zentrums, wie schon am Schluß von Abschnitt 2 bemerkt wurde, nicht mehr den totalen Verzerrungszustand darstellen.

Dagegen geht die Modifikation (2.6) der Regel von *W. Prager* in

$$d\alpha_x = (\sigma_x - \alpha_x)\, d\mu, \ldots, \qquad d\alpha_{yz} = (\tau_{yz} - \alpha_{yz})\, d\mu, \ldots, \qquad d\mu > 0 \tag{4.8}$$

über, und statt (2.7) kommt nach (4.4)

$$(d\alpha_x - d\sigma_x)\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \cdots + (d\alpha_{yz} - d\tau_{yz})\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} + \cdots = 0\,. \tag{4.9}$$

Ferner hat man statt (2.8) jetzt

$$\left(d\alpha_x - \frac{2}{3}\,c\,d\varepsilon_x\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \cdots + \left(d\alpha_{yz} - \frac{1}{3}\,c\,d\gamma_{yz}\right)\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} + \cdots = 0\,. \tag{4.10}$$

Die Fließfläche verschiebt sich also auch im 6-dimensionalen Spannungsraum (wie in Abb. 3) in Richtung des Fahrstrahls vom Zentrum nach dem Spannungspunkt, und zwar auch hier so, daß sie stets den Spannungspunkt enthält.

5. Spezialfälle. Bei vielen praktisch wichtigen Anwendungen kommt es vor, daß gewisse Spannungskomponenten identisch null sind. Bezeichnet man die vorhandenen Spannungskomponenten mit $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ und die identisch verschwindenden mit $\sigma''_x, \ldots, \tau''_{yz}, \ldots$, wobei jetzt natürlich jede Komponente nur einmal, nämlich entweder als einfach oder als doppelt gestrichene Größe auftreten darf, dann lautet die ursprüngliche Fließbedingung

$$f(\sigma'_x, \ldots, \sigma''_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots, \tau''_{yz}, \ldots) = h(\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots) = k^2\,. \tag{5.1}$$

Interessiert man sich nicht für die Verzerrungskomponenten $\varepsilon''_x, \ldots, \gamma''_{yz}, \ldots$, die zu den verschwindenden Spannungskomponenten $\sigma''_x, \ldots, \tau''_{yz}, \ldots$ gehören, dann wird man versuchen, das Problem im Unterraum $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ zu behandeln. In diesem definiert die Funktion h die ursprüngliche Fließfläche, und es gilt, wenn einmal plastischer Fluß eingesetzt hat,

$$f(\sigma'_x - \alpha'_x, \ldots, -\alpha''_x, \ldots, \tau'_{yz} - \alpha'_{yz}, \ldots, -\alpha''_{yz}, \ldots) = k^2\,. \tag{5.2}$$

Das Fließgesetz (4.5) nimmt jetzt die Form

$$d\varepsilon'_x = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_x}\, d\lambda, \ldots, \qquad d\gamma'_{yz} = \frac{\partial f}{\partial \tau'_{yz}}\, d\lambda, \ldots, \qquad d\lambda > 0 \tag{5.3}$$

an; das Verzerrungsinkrement im Raum $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ (das die möglicherweise auch von null verschiedenen Komponenten $d\varepsilon''_x, \ldots, d\gamma''_{yz}, \ldots$ nicht enthält) fällt also noch immer in die äußere Normale der Fließfläche.

Geht man nun zunächst von der Modifikation der *Prager*schen Verfestigungsregel aus, dann folgt aus (4.8)

$$\alpha''_x = \cdots = \alpha''_{yz} = \cdots = 0\,. \tag{5.4}$$

Somit nimmt die Fließfläche (5.2) die Form

$$h(\sigma'_x - \alpha'_x, \ldots, \tau'_{yz} - \alpha'_{yz}, \ldots) = k^2 \tag{5.5}$$

an; sie bewegt sich also auch im Unterraum $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ translatorisch. Dabei ist nach (4.8) ferner

$$d\alpha'_x = (\sigma'_x - \alpha'_x)\, d\mu, \ldots, \qquad d\alpha'_{yz} = (\tau'_{yz} - \alpha'_{yz})\, d\mu, \ldots, \qquad d\mu > 0\,, \tag{5.6}$$

sowie nach (4.9) und (5.5)

$$(d\alpha'_x - d\sigma'_x)\frac{\partial h}{\partial \sigma'_x} + \cdots + (d\alpha'_{yz} - d\tau'_{yz})\frac{\partial h}{\partial \tau'_{yz}} + \cdots = 0\,. \tag{5.7}$$

Die Translation erfolgt also wieder in Richtung des Fahrstrahls vom Zentrum nach dem Spannungspunkt, und zwar derart, daß dieser stets auf der Fließfläche bleibt. Das Fließgesetz (5.3) schreibt sich mit (5.5) in der Gestalt

$$d\varepsilon'_x = \frac{\partial h}{\partial \sigma'_x}\, d\lambda, \ldots, \qquad d\gamma'_{yz} = \frac{\partial h}{\partial \tau'_{yz}}\, d\lambda, \ldots, \qquad d\lambda > 0\,; \tag{5.8}$$

da aber die Verzerrungen $\varepsilon''_x, \ldots, \gamma''_{yz}, \ldots$ im allgemeinen nicht null sind, läßt sich die Beziehung (4.6) nicht wie (4.9) dadurch in den verwendeten Unterraum übertragen, daß man die Tensorkomponenten mit einem Strich versieht und gleichzeitig die Funktion f durch h ersetzt. Man muß also, um den Betrag des Verzerrungsinkrements zu bestimmen, auf (4.6) zurückgreifen, und das bedeutet, daß die vollständige Behandlung des Problems im Unterraum $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ im allgemeinen auch dann nicht möglich ist, wenn man auf die Kenntnis der Verzerrungen $\varepsilon''_x, \ldots, \gamma''_{yz}, \ldots$ verzichtet.

Unter der *Prager*schen Regel tritt eine weitere Schwierigkeit auf. Wiederum deshalb, weil $d\varepsilon''_x, \ldots, d\gamma''_{yz}, \ldots$ nicht zu verschwinden brauchen, folgt aus (4.7) nicht ohne weiteres (5.4). Es ist also im allgemeinen nicht möglich, die Fließfläche (5.2) in der Form (5.5) darzustellen, und daraus folgt, daß sich die Fläche im Laufe des plastischen Flusses deformieren kann.

Wie wir weiter unten feststellen werden, gibt es indessen Fälle, wo sich die linke Seite von (5.2) obschon die Gleichungen (5.4) nicht erfüllt sind, derart umformen läßt, daß (5.2) in

$$h(\sigma'_x - \bar{\alpha}_x, \ldots, \tau'_{yz} - \bar{\alpha}_{yz}, \ldots) = k^2 \tag{5.9}$$

übergeht wobei die Größen $\bar{\alpha}_x, \ldots, \bar{\alpha}_{yz}, \ldots$ Funktionen der $\alpha_x, \ldots, \alpha_{yz}, \ldots$ sind. In diesen Fällen bewegt sich die Fläche wieder translatorisch, und das Fließgesetz ist durch (5.8) gegeben, wobei aber für die Ermittlung des Betrages des Verzerrungsinkrements wieder auf (4.6) zurückgegriffen werden muß. Die *Prager*sche Regel (4.7) hat zunächst die Gestalt

$$d\alpha'_x = \frac{2}{3} c\, d\varepsilon'_x, \ldots, \qquad d\alpha'_{yz} = \frac{1}{3} c\, d\gamma'_{yz}, \ldots, \tag{5.10}$$

muß aber noch in die Inkremente $d\bar{\alpha}_x, \ldots, d\bar{\alpha}_{yz}, \ldots$ umgeschrieben werden, um direkt verwendbar zu sein.

Auch im zuletzt besprochenen Fall bleibt die Tatsache bestehen, daß man im allgemeinen nicht alles im Unterraum $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ erledigen kann. Dennoch ist dies, wie sich noch zeigen wird, in vielen Spezialfällen möglich.

6. Erleichterungen. Für die Behandlung im Unterraum $\sigma'_x, \ldots, \tau'_{yz}, \ldots$ ist es nach den Feststellungen in Abschnitt 5 wichtig, zu wissen, wie weit mit den Spannungskomponenten $\sigma''_x, \ldots, \tau''_{yz}, \ldots$ auch die Verzerrungskomponenten $\varepsilon''_x, \ldots, \gamma''_{yz}, \ldots$ sowie die $\alpha''_x, \ldots, \alpha''_{yz}, \ldots$ verschwinden oder sich wenigstens eliminieren lassen.

Hängt der plastische Fluß nicht von der mittleren Normalspannung ab, dann kann die ursprüngliche Fließbedingung in der Form

$$f(\sigma_x, \ldots, \tau_{yz}, \ldots) = g(J_2, J_3) = k^2 \tag{6.1}$$

angeschrieben werden, wobei

$$\left.\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{3}\sigma_x^2 + \cdots - \frac{1}{3}\sigma_y\sigma_z - \cdots + \tau_{yz}^2 + \cdots, \\ J_3 &= \frac{2}{27}\sigma_x^3 + \cdots - \frac{1}{9}\sigma_y\sigma_z(\sigma_y + \sigma_z) - \cdots + \frac{4}{9}\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \\ &\quad - \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)\tau_{yz}^2 - \cdots + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

die fundamentalen Invarianten des Spannungsdeviators sind. Das Fließgesetz (4.5) lautet mit (6.1)

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \left(\frac{\partial g}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial g}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x}\right) d\lambda, \ldots, \\ d\gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial g}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} + \frac{\partial g}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}}\right) d\lambda, \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad d\lambda > 0\,, \tag{6.3}$$

und zwar sind hier unter der Annahme, daß das Material bereits plastisch geflossen sei, die partiellen Ableitungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{3}[2(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)], \ldots, \\ \frac{\partial J_2}{\partial \tau_{yz}} &= 2(\tau_{yz} - \alpha_{yz}), \ldots, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{9}[2(\sigma_x - \alpha_x)^2 - (\sigma_y - \alpha_y)^2 - (\sigma_z - \alpha_z)^2 + 4(\sigma_y - \alpha_y)(\sigma_z - \alpha_z) - \\ &\quad - 2(\sigma_z - \alpha_z)(\sigma_x - \alpha_x) - 2(\sigma_x - \alpha_x)(\sigma_y - \alpha_y)] - \\ &\quad - \frac{1}{3}[2(\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 - (\tau_{zx} - \alpha_{zx})^2 - (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2], \ldots, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \tau_{yz}} &= -\frac{2}{3}[2(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)](\tau_{yz} - \alpha_{yz}) + \\ &\quad + 2(\tau_{zx} - \alpha_{zx})(\tau_{xy} - \alpha_{xy}), \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

einzusetzen.

Nun folgt zunächst aus (3.3)

$$f(\sigma_x - \alpha_x + \beta, \ldots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \ldots) = f(\sigma_x - \alpha_x, \ldots, \tau_{yz} - \alpha_{yz}, \ldots)\,. \tag{6.5}$$

Setzt man hier für β die Größe $d\lambda$ ein, so kann man statt (6.5) auch

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\right) d\lambda = 0 \tag{6.6}$$

schreiben, und nach (4.5) folgt hieraus

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0\,, \tag{6.7}$$

d. h. die Inkompressibilität des Materials.

Wir leiten zunächst einige allgemein, d. h. für beliebige Fließbedingungen und beide Verfestigungsregeln, gültige Ergebnisse her:

Ist eine Normalspannung, zum Beispiel σ_z, identisch null, dann kann die zugehörige Größe $-\alpha_z$, die im allgemeinen selbst nicht null ist, gemäß (6.5) durch Addition von α_z zu den Normalspannungen eliminiert werden. Die zugehörige Verzerrungskomponente ε_z braucht aber keineswegs zu verschwinden, und zudem ist klar, daß man auf diese Weise im allgemeinen nicht mehr als ein α wegschaffen kann.

Sind zwei Schubspannungen, beispielsweise τ_{zx} und τ_{xy}, identisch null, dann ergibt sich aus (6.4) und (6.3), daß unter der Annahme $\alpha_{zx} = \alpha_{xy} = 0$ die Verzerrungsinkremente $d\gamma_{zx}$ und $d\gamma_{xy}$ verschwinden. Für die *Prager*sche Regel folgt dann aus (4.7) $d\alpha_{zx} = d\alpha_{xy} = 0$; für ihre Modifikation entnimmt man aus (5.4) $\alpha_{zx} = \alpha_{xy} = 0$. Man schließt also in jedem Fall auf das Verschwinden von γ_{zx}, γ_{xy} und α_{zx}, α_{xy}. Für eine einzelne Schubspannung gilt ein entsprechendes Resultat nicht allgemein, dagegen natürlich für drei Schubspannungen, und hieraus folgt insbesondere, daß sich die Fließfläche im Hauptspannungsraum nicht verformt.

Bei Beschränkung auf die Modifikation der *Prager*schen Regel ergibt sich aus (5.4), daß das zu jeder verschwindenden Spannungskomponente gehörende α selbst identisch null ist, und hierauf beruht ja, wie schon in Abschnitt 5 bemerkt, die Formbeständigkeit der Fließfläche. Für die Verzerrungskomponenten ergibt sich dagegen keine Vereinfachung.

Beschränkt man sich auf die Fließbedingung von *R. v. Mises*, so reduziert sich die Fließfunktion auf die Invariante J_2, und man hat statt (6.1)

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_0^2\,. \tag{6.8}$$

Verschwinden nun zwei Normalspannungen, zum Beispiel σ_y und σ_z, so gilt unter der modifizierten *Prager*schen Regel nach (5.4) $\alpha_y = \alpha_z = 0$, und aus (6.4) sowie (6.3) schließt man, daß $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ ist. Unter der *Prager*schen Regel schließt man aus diesen Beziehungen und (4.7) durch vollständige Induktion auf $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ sowie auf die Gleichheit und somit die Eliminierbarkeit von α_y und α_z. Entsprechend folgt für drei verschwindende Normalspannungen, daß alle drei Dehnungen wie auch die Größen $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ identisch verschwinden. Schließlich ergibt sich jetzt aus dem Verschwinden einer einzigen Schubspannung, etwa von τ_{yz}, daß α_{yz} und γ_{yz} identisch null sind.

7. Zusammenfallen beider Verfestigungsregeln. Bei Beschränkung auf die Fließbedingung von *R. v. Mises* sind die *Prager*sche Regel und ihre Modifikation in gewissen Unterräumen des 6-dimensionalen Spannungsraumes äquivalent. Das hängt damit zusammen, daß bei der Modifikation der *Prager*schen Regel, wenn man sich auf die Fließbedingung von *R. v. Mises* beschränkt und also $f = J_2$ setzt, zwischen den Größen $d\mu$ und $d\lambda$ aus (4.8), (4.10), (4.5) und unter Benützung von (6.4) die Beziehung

$$d\mu = \frac{2}{3}\, c\, d\lambda \tag{7.1}$$

folgt.

Ist eine Normalspannung, beispielsweise σ_z, identisch null, dann erhält man, indem man die Fließbedingung (6.8) mit (6.2) für bereits eingetretenen plastischen Fluß anschreibt und zu den Normalspannungen α_z addiert,

$$h = \frac{1}{3}(\sigma_x - \bar{\alpha}_x)^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x - \bar{\alpha}_x)(\sigma_y - \bar{\alpha}_y) + \frac{1}{3}(\sigma_y - \bar{\alpha}_y)^2 + (\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 + \cdots = \frac{1}{3}\sigma_0^2\,, \tag{7.2}$$

wobei

$$\alpha_x - \alpha_z = \bar{\alpha}_x\,, \qquad \alpha_y - \alpha_z = \bar{\alpha}_y \tag{7.3}$$

gesetzt ist. Hieraus erhält man, wenn man jetzt zunächst die *Prager*sche Regel (4.7) verwendet und die Inkompressibilitätsbedingung (6.7) benützt,

$$d\bar{\alpha}_x = \frac{2}{3}\, c\,(2\, d\varepsilon_x + d\varepsilon_y)\,, \qquad d\bar{\alpha}_y = \frac{2}{3}\, c\,(2\, d\varepsilon_y + d\varepsilon_x)\,, \qquad d\alpha_{yz} = \frac{1}{3}\, c\, d\gamma_{yz}, \ldots, \tag{7.4}$$

Beziehungen, die offensichtlich auch unter der Fließbedingung von *H. Tresca* ihre Gültigkeit behalten. Dafür kann man aber nach (6.3) mit $g = J_2$ und (6.4) auch

$$d\bar{\alpha}_x = \frac{2}{3} c\,(\sigma_x - \bar{\alpha}_x)\,d\lambda\,, \qquad d\bar{\alpha}_y = \frac{2}{3} c\,(\sigma_y - \bar{\alpha}_y)\,d\lambda\,, \qquad d\alpha_{yz} = \frac{2}{3} c\,(\tau_{yz} - \alpha_{yz})\,d\lambda, \ldots \tag{7.5}$$

schreiben, und da aus (7.2) $dh = 0$ oder ausführlich

$$(d\bar{\alpha}_x - d\sigma_x)\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} + (d\bar{\alpha}_y - d\sigma_y)\frac{\partial h}{\partial \sigma_y} + (d\alpha_{yz} - d\tau_{yz})\frac{\partial h}{\partial \tau_{yz}} + \cdots = 0 \tag{7.6}$$

folgt, bewegt sich die Fließfläche genau so wie bei der Modifikation der *Prager*schen Regel, nämlich in Richtung des Fahrstrahls CS und derart, daß S auf der Fläche bleibt. Nach (7.4) lassen sich dabei aus den Koordinaten des Zentrums C die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2c}(2\,\bar{\alpha}_x - \bar{\alpha}_y)\,, \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{2c}(2\,\bar{\alpha}_y - \bar{\alpha}_x)\,, \qquad \gamma_{yz} = \frac{3}{c}\alpha_{yz}, \ldots \tag{7.7}$$

ablesen.

Bei der Modifikation der *Prager*schen Regel verschwindet nach (5.4) mit σ_z auch α_z identisch; Beziehung (7.2) gilt also ohne Querstrich, während (7.3) trivial wird. Es stimmen demnach für eine gegebene Spannungsgeschichte die Verschiebungen α_x, α_y in jeder Phase mit den oben verwendeten Größen $\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_y$ überein, und in der Tat hat man nach (5.6) die Beziehungen

$$d\alpha_x = (\sigma_x - \alpha_x)\,d\mu\,, \qquad d\alpha_y = (\sigma_y - \alpha_y)\,d\mu\,, \qquad d\alpha_{yz} = (\tau_{yz} - \alpha_{yz})\,d\mu, \ldots, \tag{7.8}$$

welche mit (7.1) bis auf die Querstriche in (7.5) übergehen. Aus (5.8) erhält man sodann

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{3}\,[2\,(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y)]\,d\lambda\,, \\ d\gamma_{yz} &= 2\,(\tau_{yz} - \alpha_{yz})\,d\lambda, \ldots, \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{3}\,[2\,(\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_x - \alpha_x)]\,d\lambda\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

und wenn man hier (7.8) einsetzt und gleichzeitig $d\lambda$ vermittelst (7.1) durch $d\mu$ ausdrückt, kommt man auf die Beziehungen (7.7) zurück, in denen jetzt die Querstriche wegzulassen sind. Es stimmen also auch die Verzerrungen für beide Regeln überein. Sie lassen sich in diesem Fall auch unter der modifizierten *Prager*schen Regel aus den Koordinaten des Punktes C ablesen.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die eben bewiesene Übereinstimmung auch dann besteht, wenn zwei oder alle drei Normalspannungen identisch verschwinden. Sind etwa σ_y und σ_z null, dann gilt statt (7.7)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{c}\,\bar{\alpha}_x\,, \qquad \gamma_{yz} = \frac{3}{c}\alpha_{yz}, \ldots\,; \tag{7.10}$$

verschwinden alle drei Normalspannungen, dann fällt in (7.10) die erste Beziehung weg.

Sind alle drei Normalspannungen von null verschieden, dann sind die beiden Regeln im allgemeinen nicht äquivalent. Es kann aber leicht eine notwendige und hinreichende Bedingung für ihr Zusammenfallen — immer unter der Fließbedingung von *R. v. Mises* — angegeben werden. Da nämlich nach der *Prager*schen Regel (4.7) und der Inkompressibilitätsbedingung (6.7)

$$d\alpha_x + d\alpha_y + d\alpha_z = \frac{2}{3} c\,(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z) = 0 \tag{7.11}$$

ist, muß

$$(\sigma_x - \alpha_x) + (\sigma_y - \alpha_y) + (\sigma_z - \alpha_z) = 0 \tag{7.12}$$

sein, und hieraus ergibt sich, wenn man nochmals (7.11) verwendet, als notwendige Bedingung

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0\,, \tag{7.13}$$

d. h. das Verschwinden der mittleren Normalspannung. Die Bedignung (7.13) ist aber auch hinreichend. Aus (7.11) folgt nämlich, daß (7.13) durch (7.12) ersetzt werden darf, so daß die mit der *Prager*schen Regel (4.7) sowie (6.4) gebildeten Inkremente

$$\left.\begin{aligned} d\alpha_x &= \frac{2}{9} c\,[2\,(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) - (\sigma_z - \alpha_z)]\,d\lambda, \ldots, \\ d\alpha_{yz} &= \frac{2}{3} c\,(\tau_{yz} - \alpha_{yz})\,d\lambda, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

auch in der Form

$$d\alpha_x = \frac{2}{3} c\,(\sigma_x - \alpha_x)\,d\lambda, \ldots, \qquad d\alpha_{yz} = \frac{2}{3} c\,(\tau_{yz} - \alpha_{yz})\,d\lambda, \ldots \tag{7.15}$$

angeschrieben werden können, wobei sich $d\lambda$ wie immer aus der Forderung bestimmt, daß der Spannungspunkt auf der Fließfläche verbleiben muß. Auf das gleiche Resultat führt aber unter Berücksichtigung von (7.1) die modifizierte *Prager*sche Regel (4.8), (4.9), und damit ergibt sich gemäß (4.5) insbesondere auch die Gleichheit der Verzerrungen.

8. Der ebene Verschiebungszustand. Hier gilt bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems

$$\varepsilon_z = 0\,, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\,, \tag{8.1}$$

und hieraus folgt mit (4.5), daß die Fließfunktion nicht explizit von σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, mithin auch nicht von $\sigma_z - \alpha_z$, $\tau_{yz} - \alpha_{yz}$, $\tau_{zx} - \alpha_{zx}$ abhängt. Sie nimmt somit die Gestalt

$$h\,(\sigma_x - \alpha_x\,,\ \sigma_y - \alpha_y\,,\ \tau_{xy} - \alpha_{xy}) = k^2 \tag{8.2}$$

an; ferner folgt aus der ersten Gleichung (8.1) gemäß (6.7)

$$\varepsilon_y = -\varepsilon_x\,. \tag{8.3}$$

Von jetzt an müssen wir die verschiedenen Verfestigungsregeln und Fließbedingungen auseinanderhalten und werden zur Abkürzung die *Prager*sche Regel mit (*P*), ihre Modifikation mit (*Z*), die Fließbedingung von *R. v. Mises* mit (*M*) und diejenige von *H. Tresca* mit (*T*) bezeichnen.

(*M*) Aus (6.3) mit $g = J_2$ sowie (6.4) folgt im Zusammenhang mit (8.1)

$$2\,(\sigma_z - \alpha_z) - (\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y) = 0\,, \qquad \tau_{yz} - \alpha_{yz} = 0\,, \qquad \tau_{zx} - \alpha_{zx} = 0\,. \tag{8.4}$$

(*PM*) Nach (4.7), (8.3) und (8.1) gilt

$$\alpha_y = -\alpha_x\,, \qquad \alpha_z = 0\,, \qquad \alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0 \tag{8.5}$$

sowie

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2\,c}\,\alpha_x\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{3}{c}\,\alpha_{xy}\,. \tag{8.6}$$

Die Verzerrungen sind also (bis auf die Proportionalitätsfaktoren $3/2\,c$ bzw. $3/c$ durch die Koordinaten des Punktes C dargestellt. Aus (8.5) und (8.4) gewinnt man die Spannungskomponenten

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\,(\sigma_x + \sigma_y)\,, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\,; \tag{8.7}$$

ferner erhält man, indem man (8.5) und (8.7) in die (für bereits eingetretenen plastischen Fluß angeschriebene) Fließbedingung (6.8) einsetzt,

$$h = \frac{1}{4}\,[(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y + \alpha_x)]^2 + (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2 = \frac{1}{3}\,\sigma_0^2\,, \tag{8.8}$$

und dafür kann man mit (8.6) auch

$$h = \frac{1}{4}\left(\sigma_x - \sigma_y - \frac{4\,c}{3}\,\varepsilon_x\right)^2 + \left(\tau_{xy} - \frac{c}{3}\,\gamma_{xy}\right)^2 = \frac{1}{3}\,\sigma_0^2 \tag{8.9}$$

schreiben. Die Fließfläche ist also ein elliptischer Zylinder mit den in Abb. 4 gegebenen Querschnittshalbachsen, dessen Achse zur Winkelhalbierenden des ersten Quadranten der Ebene σ_x, σ_y parallel ist, und der sich stets normal zur Achse verschiebt.

(*ZM*) Aus (4.8) erhält man statt (8.5)

$$\alpha_z = \frac{1}{2}\,(\alpha_x + \alpha_y)\,, \qquad \alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0\,, \tag{8.10}$$

und damit geht die Beziehung (8.4) wieder in (8.7) über. Setzt man (8.7) und (8.10) in die Fließbedingung (6.8) ein, so kommt

$$h = \frac{1}{4}\,[(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y)]^2 + (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2 = \frac{1}{3}\,\sigma_0^2\,. \tag{8.11}$$

Die Verzerrungsinkremente ergeben sich jetzt nach (5.8) zu

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{2}\,[(\sigma_x - \alpha_x) - (\sigma_y - \alpha_y)]\,d\lambda\,, \qquad d\gamma_{xy} = 2\,(\tau_{xy} - \alpha_{xy})\,d\lambda\,, \tag{8.12}$$

und wenn man noch (4.8) sowie (7.1) benützt, folgt hieraus

$$\varepsilon_x = \frac{3}{4\,c}\,(\alpha_x - \alpha_y)\,, \qquad \gamma_{xy} = \frac{3}{c}\,\alpha_{xy}\,. \tag{8.13}$$

Fließfläche ist also wieder der Zylinder von Abb. 4, der sich jetzt aber auch in axialer Richtung verschieben kann. Da indessen jede axiale Verschiebung den Zylinder in sich selbst überführt, sind die Ergebnisse, was den Zusammenhang zwischen der Spannungsgeschichte und den Verzerrungen anbelangt, dieselben wie unter (*PM*). In der Tat geht die Gleichung (8.11) der Fließfläche, wenn man (8.13) einsetzt, in (8.9) über.

(*T*) Hier wird, da man aus (6.3) und (6.4) nicht mehr ohne weiteres auf (8.4) schließen kann, die Behandlung äußerst umständlich. Das Problem bedarf noch der näheren Untersuchung; jedenfalls scheint nichts dafür zu sprechen, daß sich die beiden letzten Gleichungen (8.7) aufrecht erhalten lassen, daß also aus $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ auch $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ folgt.

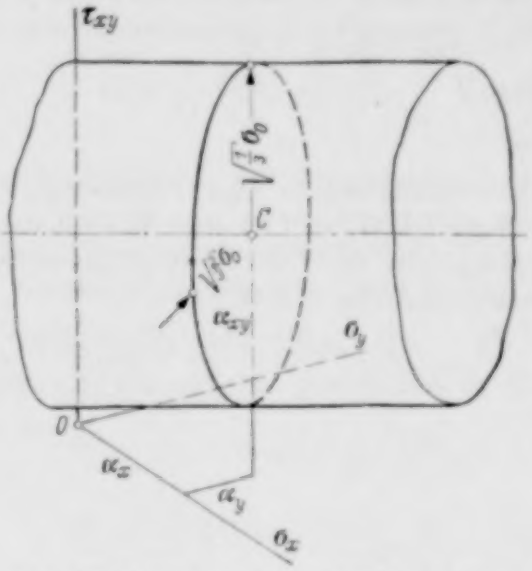


Abb. 4. Fließfigur beim ebenen Verschiebungszustand.

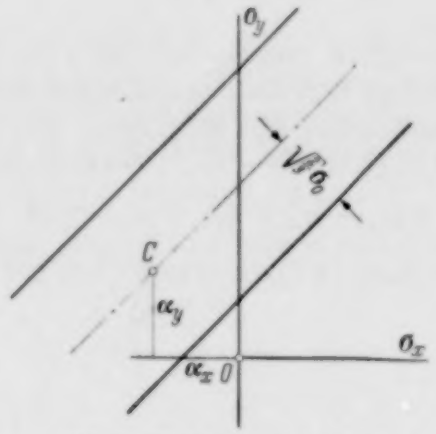


Abb. 5. Fließstreifen beim ebenen Verschiebungszustand mit $\tau_{xy} = 0$.

9. Sonderfälle. Wir beschränken uns hier wie in Abschnitt 8 auf die *v. Mises*sche Fließbedingung (*M*) und können dann (*P*) und (*Z*) gleichzeitig behandeln.

Ist τ_{xy} identisch null, (und damit auch γ_{xy} und α_{xy}), dann kann das Problem in der Ebene σ_x, σ_y behandelt werden. Die Fließfläche wird zum Streifen

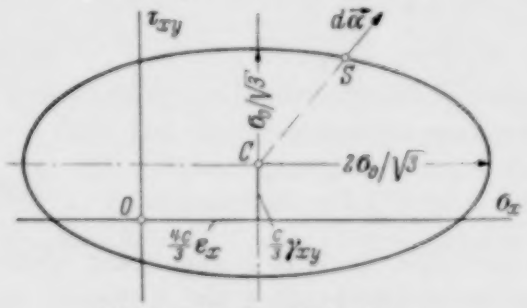


Abb. 6. Fließellipse beim ebenen Verschiebungszustand mit $\sigma_y = 0$.

$$\left(\sigma_x - \sigma_y - \frac{4c}{3}\varepsilon_x\right)^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2, \qquad \varepsilon_y = -\varepsilon_x, \tag{9.1}$$

wie er in Abb. 5 dargestellt ist.

Ist σ_y identisch null, so hat man in der Ebene σ_x, τ_{xy} die Fließellipse

$$\left(\sigma_x - \frac{4c}{3}\varepsilon_x\right)^2 + 4\left(\tau_{xy} - \frac{c}{3}\gamma_{xy}\right)^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2 \tag{9.2}$$

von Abb. 6, die sich in Richtung *CS* verschiebt.

10. Der ebene Spannungszustand. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems gilt hier

$$\sigma_z = 0, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \tag{10.1}$$

und nach Abschnitt 6 auch

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \qquad \alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0. \tag{10.2}$$

Die Fließbedingung kann durch Elimination von α_z gemäß Abschnitt 6 auf die Form

$$h(\sigma_x - \bar{\alpha}_x, \sigma_y - \bar{\alpha}_y, \tau_{xy} - \alpha_{xy}) = k^2 \tag{10.3}$$

gebracht werden, wobei $\bar{\alpha}_x$, $\bar{\alpha}_y$ für (*P*) durch (7.3) gegeben sind, während bei (*Z*) die Querstriche weggelassen werden können. Die Verzerrungskomponenten ε_x, ε_y, γ_{xy} ergeben sich mit Ausnahme von (*ZT*) gemäß (7.7) aus den Koordinaten des Punktes *C*.

(*M*) Hier sind nach Abschnitt 7 die Ergebnisse für (*P*) und (*Z*) dieselben. Die Fließbedingung (6.8) geht in

$$\frac{1}{3}(\sigma_x - \bar{\alpha}_x)^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x - \bar{\alpha}_x)(\sigma_y - \bar{\alpha}_y) + \frac{1}{3}(\sigma_y - \bar{\alpha}_y)^2 + (\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2 = \frac{1}{3}\sigma_0^2 \tag{10.4}$$

über, und dafür kann man unter Benützung von (7.7) auch

$$\left[\sigma_x - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]^2 - \left[\sigma_x - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]\left[\sigma_y - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_y + \varepsilon_x)\right] + \left[\sigma_y - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_y + \varepsilon_x)\right]^2 + 3\left(\tau_{xy} - \frac{c}{3}\gamma_{xy}\right)^2 = \sigma_0^2 \tag{10.5}$$

schreiben. Fließfläche ist somit das Ellipsoid von Abb. 7 mit Achsen parallel zur Achse τ_{xy} und zu den Winkelhalbierenden der Quadranten in der Ebene σ_x, σ_y; es verschiebt sich nach Abschnitt 7 in Richtung des Fahrstrahls CS.

(T) Geht man von den drei Hauptspannungen

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}, \qquad \sigma_3 = 0 \tag{10.6}$$

aus und verlangt man, daß eine der drei Hauptschubspannungen $|\sigma_2 - \sigma_3|/2, \ldots$ an der Grenze $\sigma_0/2$ liege, so erhält man (für bereits eingetretenes plastisches Fließen) die Fließbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &+\{[(\sigma_x - \bar{\alpha}_x) - (\sigma_y - \bar{\alpha}_y)]^2 + 4(\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2\}^{1/2} = \sigma_0, \\ &\frac{1}{2}\left|(\sigma_x - \bar{\alpha}_x) + (\sigma_y - \bar{\alpha}_y) \pm \{[(\sigma_x - \bar{\alpha}_x) - (\sigma_y - \bar{\alpha}_y)]^2 + 4(\tau_{xy} - \alpha_{xy})^2\}^{1/2}\right| = \sigma_0. \end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

Die Fließfläche besteht also hier aus einem elliptischen Zylinder (Abb. 8), der durch zwei unter sich und mit ihm koaxiale elliptische Kegel abgeschlossen ist, wobei aber $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, nur unter ($PT$) aus (7.7) folgen.

Wir begegnen hier erstmals einer Fließfläche mit Singularitäten. Als solche kommen im dreidimensionalen Spannungsraum Kanten oder Ecken in Frage, je nachdem sich zwei oder mehr glatte Flächen treffen. Spitzen lassen sich als Grenzfälle von Ecken auffassen. Soll der Spannungspunkt S in einer Ecke oder Spitze bleiben, so muß sich die Fließfläche mit S verschieben, d. h. das Verschiebungsinkrement $d\vec{\bar{x}}$ muß mit dem Spannungsinkrement $d\vec{\sigma}$ übereinstimmen. Damit S auf einer Kante bleibt, müssen die zu ihr normalen Komponenten von $d\vec{\bar{x}}$ und $d\vec{\sigma}$ zusammenfallen, und das Fließgesetz verlangt in diesem Fall, daß das Verzerrungsinkrement $d\vec{\varepsilon}$ normal zur Kante sei.

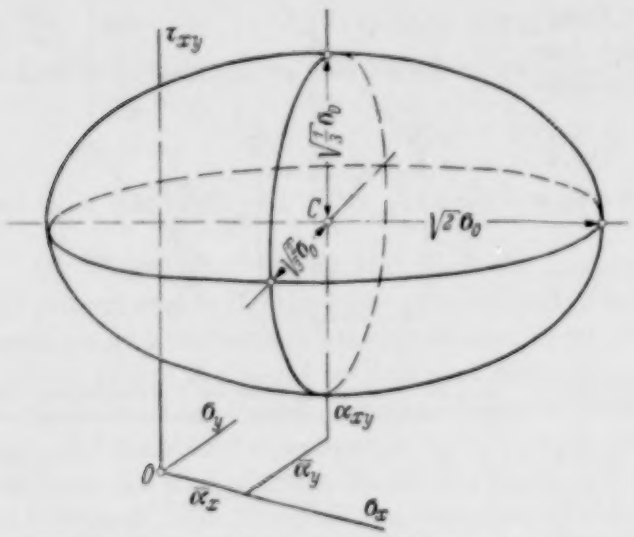


Abb. 7. Fließellipsoid für die Fließbedingung von *R. v. Mises* beim ebenen Spannungszustand.

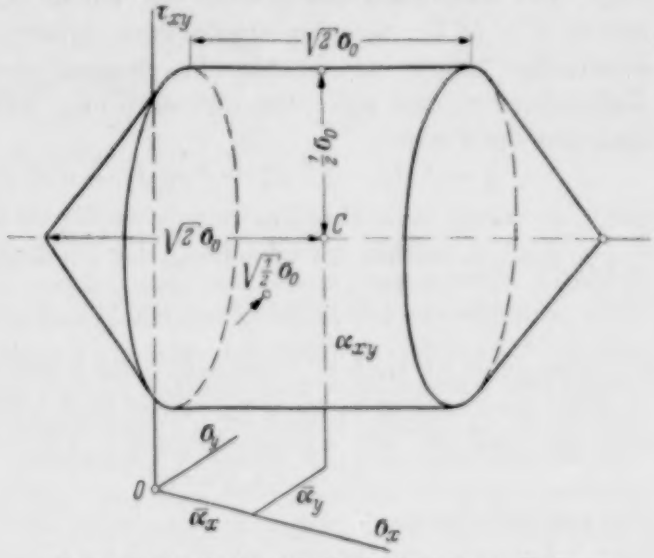


Abb. 8. Fließfläche für die Fließbedingung von *H. Tresca* beim ebenen Spannungszustand.

(PT) Hier sind die dx bekannte Funktionen der dx, und da diese ihrerseits gemäß (4.7) mit den Verzerrungsinkrementen zusammenhängen, kennt man den Zusammenhang zwischen den Komponenten von $d\vec{\bar{x}}$ und $d\vec{\varepsilon}$. So hat man beim ebenen Spannungszustand auch bei (T) wie in (7.4)

$$d\bar{x}_x = \frac{2c}{3}(2\,d\varepsilon_x + d\varepsilon_y), \qquad d\bar{x}_y = \frac{2c}{3}(2\,d\varepsilon_y + d\varepsilon_x), \qquad dx_{xy} = \frac{c}{3}\,d\gamma_{xy}. \tag{10.8}$$

Läßt man den Spannungspunkt von allen Seiten her gegen die Singularität gehen, so erhält man die zugehörigen Grenzlagen von $d\vec{\varepsilon}$ und damit auch diejenigen von $d\vec{\bar{x}}$. Sie definieren je nach dem Charakter der Singularität zwei Grenzkörper in Form von Pyramiden, Kegeln oder Keilen. Solange $d\vec{\sigma}$ im Grenzkörper liegt, der durch die Grenzlagen von $d\vec{\bar{x}}$ definiert wird, bleibt S in der Singularität liegen, und damit ist neben $d\vec{\bar{x}}$ auch $d\vec{\varepsilon}$ festgelegt.

(ZT) Hier fehlt im allgemeinen ein direkter Zusammenhang zwischen $d\vec{\varepsilon}$ und $d\vec{\bar{x}}$ (die Querstriche können jetzt weggelassen werden), und das bedeutet, daß $d\vec{\varepsilon}$ (bis auf die Bedingung, in einer Kante

normal zu dieser zu sein) innerhalb des durch die Grenzlagen von $d\vec{\varepsilon}$ definierten Körpers frei ist und somit die gleiche Unbestimmtheit aufweist wie beim idealplastischen Körper. Der Spannungspunkt S bleibt aber nach (4.8) nur dann in der Singularität liegen, wenn $d\vec{\sigma}$ (bzw. im Falle einer Kante die Normalkomponente) die Richtung des Fahrstrahls CS (bzw. seiner Normalkomponente) hat.

11. Sonderfälle. Im Hinblick auf die Anwendungen sind diese besonders wichtig.

Ist τ_{xy} identisch null, so hat man für (M) als Fließfigur die Ellipse

$$\left[\sigma_x - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]^2 - \left[\sigma_x - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]\left[\sigma_y - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_y + \varepsilon_x)\right] + \left[\sigma_y - \frac{2c}{3}(2\varepsilon_y + \varepsilon_x)\right]^2 = \sigma_0^2 \quad (11.1)$$

von Abb. 9. Für (T) erhält man an ihrer Stelle das Sechseck von Abb. 10. Für (PT) ergibt sich $d\vec{\varkappa}$ auf den einzelnen Seiten nach (7.4) und (5.8) konstant und mit den in Abb. 10 eingetragenen Richtungen. Für den Fall, daß S in einer Ecke bleibt, ergeben die ersten beiden Gleichungen (10.8) mit $d\vec{\varkappa} = d\vec{\sigma}$

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{2c}(2\,d\sigma_x - d\sigma_y), \qquad d\varepsilon_y = \frac{1}{2c}(2\,d\sigma_y - d\sigma_x). \quad (11.2)$$

Bei (ZT) hat $d\vec{\varkappa}$ stets die Richtung CS, $d\vec{\varepsilon}$ ist auf den vertikalen Seiten des Sechsecks durch $d\varepsilon_x = 3\,d\varkappa_x/4c$, $d\varepsilon_y = 0$, auf den horizontalen durch $d\varepsilon_x = 0$, $d\varepsilon_y = 3\,d\varkappa_y/4c$, auf den schiefen durch $d\varepsilon_x = -d\varepsilon_y = 3(d\varkappa_x - d\varkappa_y)/4c$ gegeben und bleibt in den Ecken unbestimmt.

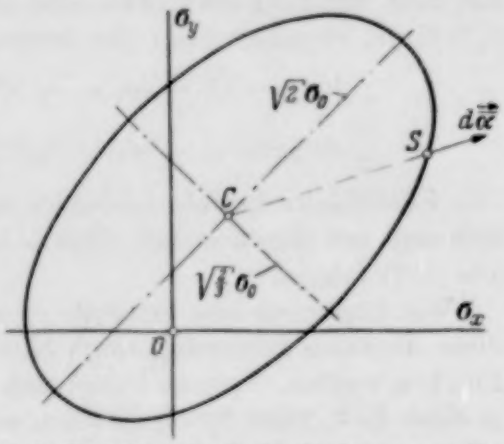


Abb. 9. Fließellipse für die Fließbedingung von *R. v. Mises* beim ebenen Spannungszustand mit $\tau_{xy} = 0$.

Ist σ_y identisch null, so kommt als Fließfigur für (M) die Ellipse

$$(\sigma_x - c\,\varepsilon_x)^2 + 3\left(\tau_{xy} - \frac{c}{3}\gamma_{xy}\right)^2 = \sigma_0^2 \quad (11.3)$$

von Abb. 11 mit den Halbachsen σ_0 und $3^{-1/2}\sigma_0$. Bei (PT) können α_y und α_z nicht beide eliminiert werden, und daraus folgt, daß sich die Fließfigur in der Ebene σ_x, τ_{xy} deformiert. Für (ZT) dagegen erhält man wieder eine formbeständige Ellipse wie in Abb. 11, diesmal aber mit den Halbachsen σ_0 und $\sigma_0/2$. Benützt man hier, daß die Fließfunktion die Form

$$g = 4\,J_2^3 - 27\,J_3^2 - 9\,\sigma_0^2\,J_2^2 + 6\,\sigma_0^4\,J_2 \quad (11.4)$$

hat[1], so kann man überdies zeigen, daß $\varepsilon_x = 3\,\alpha_x/4c$ und $\gamma_{xy} = 3\,\alpha_{xy}/c$, mithin die Gleichung der Fließellipse

$$\left(\sigma_x - \frac{4c}{3}\varepsilon_x\right)^2 + 4\left(\tau_{xy} - \frac{c}{3}\gamma_{xy}\right)^2 = \sigma_0^2 \quad (11.5)$$

ist, solange nicht auch τ_{xy} identisch verschwindet.

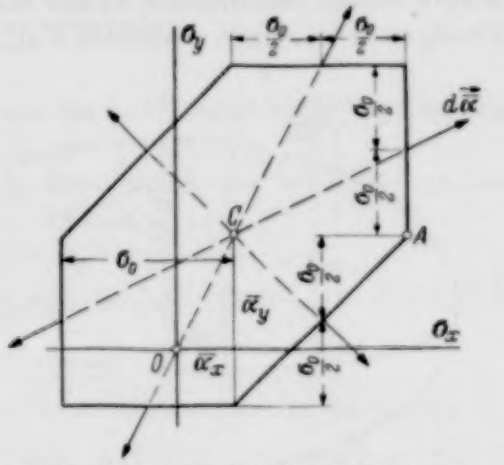


Abb. 10. Fließhexagon für die Fließbedingung von *H. Tresca* beim ebenen Spannungszustand mit $\tau_{xy} = 0$.

Sind gleichzeitig σ_y und τ_{xy} identisch null, so reduziert sich bei (M) die Fließbedingung (11.3) auf

$$(\sigma_x - c\,\varepsilon_x)^2 = \sigma_0^2, \quad (11.6)$$

und auf das gleiche Resultat kommt man auch mit (PT). Damit bestätigt sich nachträglich, daß die Konstante c mit dem Verfestigungsmodul von Abb. 1 identisch ist. Dagegen zeigt ein Blick auf (11.5), daß sich für (ZT) die Fließbedingung nicht auf (11.6) reduzieren läßt. Der Grund dafür liegt darin, daß $d\vec{\varepsilon}$ auf der Kante der Fließfläche von Abb. 8 unbestimmt bleibt. Das Verhalten unter einachsigem Zug ist demnach weitgehend zufällig, und damit ist das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines solchen Materials gemäß Abb. 1 überhaupt nicht definiert.

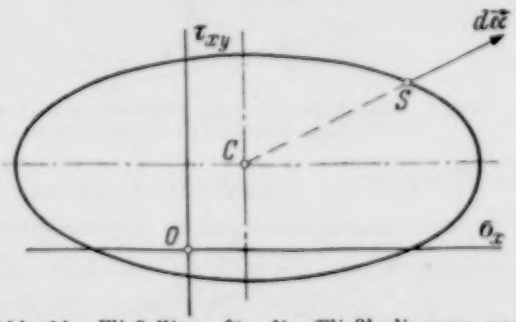


Abb. 11. Fließellipse für die Fließbedingung von *R. v. Mises* oder die mit der modifizierten *Prager*schen Regel kombinierte Fließbedingung von *H. Tresca* beim ebenen Spannungszustand mit $\sigma_y = 0$.

12. Ein weiterer Fall. Es kommt gelegentlich vor — und ist unter gewissen Voraussetzungen etwa bei Wellen unter Zug und Torsion zu erwarten —, daß in einem geeignet gewählten Koordinatensystem

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (12.1)$$

ist.

[1] Siehe etwa *W. Prager* und *P. G. Hodge Jr.*, Theorie ideal plastischer Körper, Wien: Springer, 1954, S. 25.

(*M*) Hier hat man gemäß Abschnitt 6

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y, \quad \gamma_{xy} = 0, \qquad \alpha_x = \alpha_y, \quad \alpha_{xy} = 0, \tag{12.2}$$

und die Fließbedingung (6.8) geht in

$$\frac{1}{3}(\sigma_z - \bar{\alpha}_z)^2 + (\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 + (\tau_{zx} - \alpha_{zx})^2 = \frac{1}{3}\sigma_0^2 \tag{12.3}$$

über. Unter Verwendung der für diesen Fall modifizierten Beziehungen (7.10) kann man hiefür auch

$$(\sigma_z - c\,\varepsilon_z)^2 + 3\left(\tau_{yz} - \frac{c}{3}\gamma_{yz}\right)^2 + 3\left(\tau_{zx} - \frac{c}{3}\gamma_{zx}\right)^2 = \sigma_0^2 \tag{12.4}$$

schreiben. Die Fließfläche ist also ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen σ_0 und $3^{-1/2}\sigma_0$, das sich nach Abschnitt 7 in Richtung des Fahrstrahls *CS* verschiebt.

(*PT*) Da im allgemeinen nicht gleichzeitig α_x und α_y eliminiert werden können, und da aus $\tau_{xy} = 0$ nicht $\alpha_{xy} = 0$ folgt, deformiert sich die Fließfläche.

(*ZT*) Aus den Hauptspannungen

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_{2,3} = \frac{1}{2}\left[\sigma_z \pm (\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2 + 4\tau_{zx}^2)^{1/2}\right] \tag{12.5}$$

berechnet man leicht die größte Schubspannung $|\sigma_2 - \sigma_3|/2$, und hieraus gewinnt man die Fließbedingung

$$(\sigma_z - \alpha_z)^2 + 4(\tau_{yz} - \alpha_{yz})^2 + 4(\tau_{zx} - \alpha_{zx})^2 = \sigma_0^2. \tag{12.6}$$

Man hat also wieder ein Rotationsellipsoid, diesmal mit den Halbachsen σ_0 und $\sigma_0/2$; die Verzerrungen lassen sich indessen nicht in einfacher Weise aus den Koordinaten des Zentrums ableiten.

13. Sonderfälle. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß man unter der Voraussetzung, daß τ_{yz} identisch null sei, (bis auf eine zyklische Vertauschung der Zeiger) den zweiten Sonderfall des ebenen Spannungszustandes (Abschnitt 11) vor sich hat.

Ist σ_z identisch null, so kann man für jede Fließfunktion, die J_3 nicht oder mindestens quadratisch enthält, also insbesondere für (*M*) und (*T*), aus $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ auch

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \qquad \alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha_{xy} = 0 \tag{13.1}$$

schließen. Fließfigur in der Ebene τ_{yz}, τ_{zx} ist daher der Kreis

$$\left(\tau_{yz} - \frac{c}{3}\gamma_{yz}\right)^2 + \left(\tau_{zx} - \frac{c}{3}\gamma_{zx}\right)^2 = k^2 \tag{13.2}$$

mit dem Radius $k = 3^{-1/2}\sigma_0$ für (*M*) bzw. $k = \sigma_0/2$ für (*T*).

14. Diskussion. Es ist klar, daß die Ergebnisse, welche man mit den verschiedenen Fließbedingungen und Verfestigungsregeln in einem gegebenen Fall erhält, meist nicht übereinstimmen, auch wenn sie sich numerisch im allgemeinen nicht allzu stark unterscheiden dürften. Aber auch der zur Lösung nötige Aufwand an Zeit und Mühe streut von Fall zu Fall mit den verwendeten Methoden.

Geht man die letzten Abschnitte unter diesem Gesichtspunkt noch einmal durch, so stellt man fest, daß bei den Verfestigungsregeln je nach dem vorliegenden Problem die eine oder andere vorzuziehen ist, daß aber im Mittel die Regel von *W. Prager* und ihre Modifikation etwa gleichwertig sein dürften. Ein Nachteil der *Prager*schen Regel ist die hier mögliche Deformation der Fließfläche, während sich bei ihrer Modifikation vor allem die Unbestimmtheit des Verzerrungsinkrements in singulären Stellen der Fließfläche und in einzelnen Fällen die Unmöglichkeit einer geometrischen Deutung der Verzerrungen im Spannungsraum unvorteilhaft auswirkt. So ist beispielsweise beim zweiten Sonderfall ($\sigma_y = 0$) des ebenen Spannungszustandes (Abschnitt 11) mit (*T*) die Modifikation bequem zu handhaben, während sich unter der *Prager*schen Regel die Fließfigur deformiert. Umgekehrt bietet im ersten Sonderfall ($\tau_{xy} = 0$) bei der Modifikation die Unbestimmtheit des Verzerrungsinkrements in den Ecken des Sechsecks Schwierigkeiten, wie übrigens auch seine Veränderlichkeit längs der Seiten.

Bei den Fließbedingungen ist unter dem hier zur Diskussion stehenden Gesichtspunkt diejenige von *R. v. Mises* eindeutig die einfachere. Mit ihr lassen sich alle in den Abschnitten 8 bis 13 betrachteten Sonderfälle im gegebenen Unterraum behandeln, und zwar — in weitgehender Übereinstimmung — sowohl mit (*P*) wie mit (*Z*). Unter der Fließbedingung von *H. Tresca* dagegen bleibt das Problem des ebenen Verschiebungszustandes (Abschnitt 8) unverhältnismäßig kompliziert, ebenso der in Abschnitt 12 behandelte Fall sowie mit (*P*) der zweite Sonderfall ($\sigma_y = 0$) des ebenen Spannungszustandes (Abschnitt 11).

Die Fließbedingung von *H. Tresca* hat in gewissen Fällen, nämlich dann, wenn die Fließfläche ebene bzw. die Fließfigur gradlinige Grenzen besitzt, den Vorteil, daß innerhalb bestimmter Schranken die Deformation von der Spannungsgeschichte unabhängig ist. Aus diesem Grunde wird sie oft derjenigen von *R. v. Mises* vorgezogen. Solch ebene bzw. gradlinige Grenzen sind indessen, wie die Ausführungen der Abschnitte 8 bis 13 gezeigt haben, recht selten, und es erscheint daher fraglich, ob die damit verbundenen Vorteile im großen ganzen die hier festgestellten Mängel überwiegen. Es wird also wohl auch hier so sein, daß man sich von Fall zu Fall für die eine oder andere Fließbedingung entscheiden muß.

Es ist aber nicht zu übersehen, daß die *Tresca*sche Fließbedingung zu einigen recht unerwarteten und merkwürdigen Folgerungen zwingt, die wohl geeignet sind, sie ganz in Frage zu stellen, falls sie sich nicht durch die Erfahrung bestätigen lassen. Es handelt sich um Abweichungen vom symmetrischen Verhalten, wie sie sonst nirgends in der Kontinuumsmechanik vorkommen.

Ein erster Fall ist uns beim ebenen Verschiebungszustand (Abschnitt 8) begegnet. Ist x, y die Verschiebungsebene, dann verschwinden γ_{yz} und γ_{zx} identisch, und man ist versucht, die Symmetrie des Verschiebungszustandes bezüglich der Ebene x, y zum Nachweis dafür heranzuziehen, daß auch τ_{yz} und τ_{zx} identisch null seien. Wie oben bemerkt wurde, bedarf der Fall noch der weiteren Abklärung; zur Zeit ist aber kein Grund dafür bekannt, daß bei einem *Tresca*-Material τ_{yz} und τ_{zx} identisch verschwinden und damit der Spannungszustand die gleiche Symmetrie aufweist wie der Verschiebungszustand.

Noch merkwürdiger verhält sich, wie am Schluß von Abschnitt 11 angedeutet wurde, das *Tresca*-Material unter einachsigem Zug oder Druck, beispielsweise in Richtung z. Der Spannungspunkt liegt hier in der Ecke A des Fließhexagons von Abb. 10, und daraus folgt, daß schon beim idealplastischen Material das Verzerrungsinkrement unbestimmt wird. Das bedeutet, daß die Dehnungen ε_x und ε_y, davon abgesehen, daß sie das umgekehrte Vorzeichen wie ε_z besitzen und der Inkompressibilitätsbedingung genügen müssen, frei sind. Der Verzerrungszustand weist also nicht die gleiche Symmetrie bezüglich der Achse z auf wie der Spannungszustand, und es spricht nichts dagegen, daß sich ein Zugstab aus diesem Material etwa nur in der einen Querrichtung kontrahiert. Bei einem *v. Mises*-Material ist dieses unerwartete Verhalten ausgeschlossen, ebenso bei einem *Tresca*-Material, das sich nach der *Prager*schen Regel verfestigt. Bei Verfestigung eines *Tresca*-Materials nach der modifizierten Regel bleibt aber die Unbestimmtheit des Verzerrungsinkrements und damit auch die Möglichkeit einer unsymmetrischen Verformung erhalten, und eine weitere Folge hiervon ist, daß ein solches Material gar kein wohldefiniertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm und damit auch nicht einen eindeutigen Verfestigungsmodul besitzt.

(Eingegangen am 18. Oktober 1958.)

Anschrift der Verfasser: Dipl. Math. *Christian Clavuot* und Prof. Dr. *Hans Ziegler*, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Eidg. Technische Hochschule, Zürich, Schweiz.

Neuer Blick auf die elektrisch-mechanischen Analogien

Von **L. Cremer** und **K. Klotter**

I. Ein einfaches Modell zur „Schaltung" mechanischer Schwinger

1. Bedeutung der Schaltbilder. Darstellungsarten und Bezeichnungsweisen sind immer bis zu einem gewissen Grade willkürlich und somit Geschmackssache. Gerade deshalb ist der Streit um sie besonders hartnäckig und dauert oft noch an, wenn die eigentlichen Probleme längst gelöst sind. Dies gilt auch für die immer wieder neuen Vorschläge für die schaltungsmäßige Darstellung von mechanischen Schwingungsgebilden; dabei ist nicht nur die Frage umstritten, wie man die Gebilde darstellen soll, sondern sogar die Grundfrage, ob derartige Schaltbilder überhaupt lohnen.

Im Rahmen der Elektrotechnik ist die Nützlichkeit des Schaltbildes längst erwiesen. Sie besteht nicht nur darin, daß eine schematische Übersicht über konstruktive Gegebenheiten erreicht wird; der Elektrotechniker sieht vielmehr der Schaltung unmittelbar ihre Funktion an, insbesondere die Wirkung bei verschiedenen Frequenzen: er denkt in Schaltungen. Da er weiß, daß die Widerstände aller Kondensatoren mit der Frequenz abnehmen und die der Spulen mit

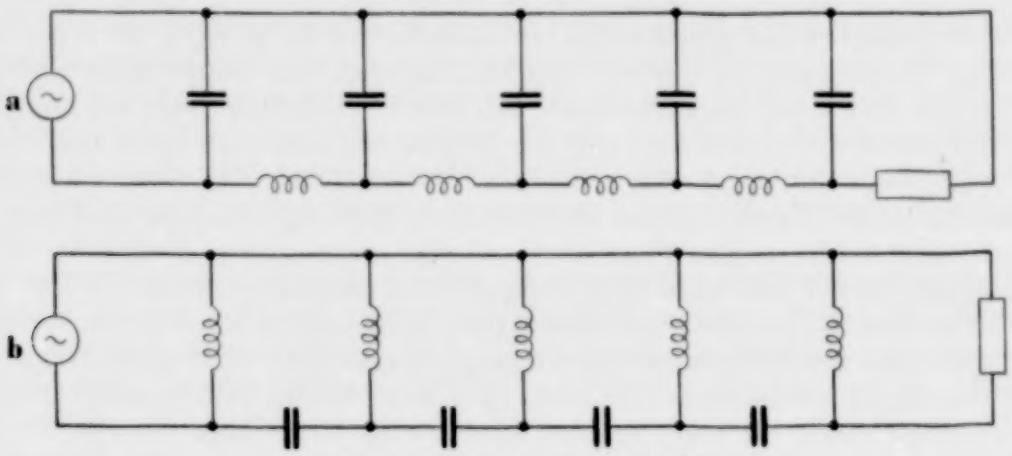


Abb. 1. Beispiele elektrischer Schaltbilder.
a) Tiefpaß b) Hochpaß.

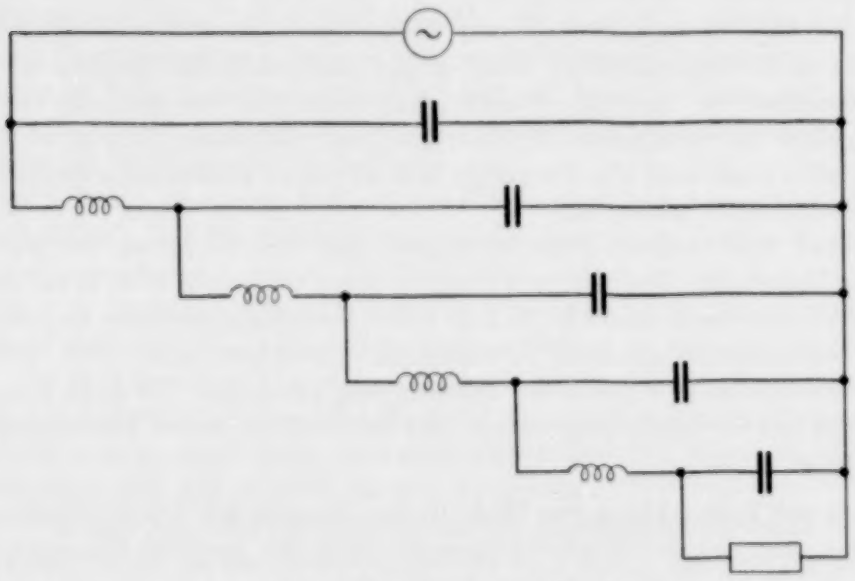


Abb. 2. Umzeichnung der Abb. 1a.

der Frequenz zunehmen, sieht er z. B., daß im Falle der Abb. 1a (wo die Spulen die Längswiderstände, die Kondensatoren die Querwiderstände bilden) die Übertragung von der Spannungsquelle links zum Verbraucher rechts um so schlechter wird, je höher die Frequenz ist, während das in Abb. 1b (wo Spulen und Kondensatoren ihre Rollen vertauscht haben) umgekehrt ist.

Erst wenn er die Wirkungsweise dieses Tiefpasses und dieses Hochpasses quantitativ behandeln will, ist der Elektrotechniker gezwungen, anhand des Schaltbildes Gleichungen aufzustellen und auszuwerten. Dabei stellen die Gleichungen eine speziellere Repräsentation der Netzwerke dar als die Schaltbilder, da der Aufbau der Gleichungen von der willkürlichen Wahl der Koordinaten abhängt.

Der Elektrotechniker vollzieht aber bei der Aufzeichnung eines Schaltbildes noch einen zweiten Prozeß, der ihm so in Fleisch und Blut übergegangen ist, daß er meist ganz vergessen wird. Er überblickt nämlich bei der Aufzeichnung eines Schaltbildes zugleich dessen Identität mit allen, zwar auf den ersten Blick anders aussehenden, aber topologisch gleichwertigen Anordnungen der Elemente. So besteht für ihn z. B. zwischen den Schaltbildern in Abb. 1a und Abb. 2 kaum ein größerer Unterschied, als etwa zwischen der Schreibweise für den Gesamtwiderstand $\mathfrak{Z}$ in der Form

$$\mathfrak{Z} = \cfrac{1}{j\omega C_1 + \cfrac{1}{j\omega L_2 + \cfrac{1}{j\omega C_3 + \cdots}}}$$

und der Form

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{j\omega C_3} + \cdots,$$

bei der das Platz sparende Bruchstrichsymbol $\frac{1}{\quad}$ benutzt wird.

Wegen dieser Fähigkeit, in Schaltungen zu denken, waren es auch zunächst vorzugsweise mit elektrischen Schaltungen vertraute Verfasser, die sich um mechanische Schaltbilder bemühten[1...4] und so Neues auf Bekanntes zurückzuführen versuchten, während die „Mechaniker" in den Schaltbildern eher eine Erschwerung der Darstellung oder eine reine Spielerei erblickten. Einer der Hauptgründe für diese unterschiedliche Einschätzung des Wertes von Schaltbildern liegt sicher darin, daß die Elemente einer elektrischen Schaltung jedenfalls getrennten Konstruktionselementen entsprechen, mögen diese auch räumlich ganz anders zueinander liegen, als die Schaltung sie zeigt. In der Mechanik muß dagegen etwa ein starrer Körper, selbst wenn er sich nur in einer Ebene bewegt, in wenigstens drei Massen aufgespalten werden, von denen zwei seine Trägheit gegenüber den translatorischen Beschleunigungen und die dritte seine Trägheit gegenüber der Drehbeschleunigung ausdrücken. Bei beliebiger Koordinatenwahl kommen hierzu noch sogenannte Kopplungsmassen, die sogar negativ ausfallen können.[5] Man sieht an diesem Beispiel, daß in der Übersetzung der konstruktiven Gegebenheit in ein aus einzelnen Schaltelementen bestehendes Gebilde die Hauptschwierigkeit, ja, die Hauptfragwürdigkeit, des Verfahrens liegt (siehe Abschn. 4).

Daß eine solche Aufteilung konstruktiver Elemente in mehrere Schaltelemente von Vorteil sein kann, braucht andrerseits in einer Zeit, in der man sich der Analogrechner bedient, kaum noch besonders bewiesen zu werden. Dabei wird meist das mechanisch zerlegte Modell übersprungen und sogleich das elektrische realisiert, einmal weil seine Elemente kleiner und leichter veränderbar sind, aber auch weil alle Vorgänge bei der dabei zusätzlich zweckmäßigen Verkürzung des Zeitmaßstabes schneller ablaufen.

Andrerseits haben mechanische Schwingungssysteme vor elektrischen den Vorteil, daß man das Spiel der Koordinaten mit den Augen verfolgen kann und nicht erst über Instrumente sichtbar machen muß. Dabei ist gerade wesentlich, daß die Schwingungsfrequenzen mechanischer Systeme im Gegensatz zu den elektrischen meist in einem Bereich liegen (oder sich in einen solchen legen lassen), der ein Verfolgen aller Phasen der Schwingung gestattet. Deshalb demonstriert auch der Elektrotechniker die bei der Kopplung zweier „Kreise" auftretenden Erscheinungen gerne anband mechanischer Modelle.

2. Überlegungen zur Entwicklung des Modells; der Massehebel. Im Hinblick auf den zuletzt genannten Vorzug hat der eine der Verfasser sich die Aufgabe gestellt, für seine Vorlesung ein De-

---

[1] *W. Hähnle*, Wiss. Ver. Siemens Konzern 11 (1932) S. 1.
[2] *F. A. Firestone*, Journ. Acoust. Soc. Amer. 4 (1933) S. 249.
[3] *H. Hecht*, Schaltschemen und Differentialgleichungen elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde. J. A. Barth, Leipzig, 1. Aufl. (1939), 3. Aufl. (1954).
[4] *K. W. Wagner*, Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen. Dieterichsche Verl., Wiesbaden (1947) S. 128ff.
[5] *E. Lehr*, Z.VDI 78 (1934) S. 329.

monstrationsmodell zu entwickeln, bei welchem man die einzelnen mechanischen Elemente, Massen, Federn und Dämpfungsstöpfe genau so zusammenschaltet, wie dies der Elektrotechniker mit seinen Elementen am Brett tut.

Für den in Abb. 1a gezeigten Tiefpaß könnte eine solche Schaltung einfach aus einer einreihigen Kette bestehen, deren Glieder abwechselnd Massen und Federn sind, wie dies in Abb. 3a gezeigt ist. Als Symbol für die Masse bietet sich dabei ein Kreis an, als Symbol für die Feder die zum Zickzack vereinfachte Projektion einer Schraubenfeder.

Abb. 3a zeigt links ein Schubkurbelgetriebe als Repräsentation einer am Eingang eingeleiteten sinusförmigen Bewegung. Man könnte statt dessen auch ein anderes Symbol einführen, zumal ja das Schubkurbelgetriebe Obertöne erzeugt. Das hier gewählte Symbol bedeutet jedoch keine große Zeichenarbeit, insbesondere da es meist nur einmal auftritt; es ist anschaulich, und es entspricht schließlich den tatsächlichen Verhältnissen bei dem unten gezeigten Modell. Am anderen Ende ist ein Verbraucher (Dämpfungstopf) gezeichnet, für den sich als Symbol ein in einem Hohlzylinder hin- und hergleitender Vollzylinder eingeführt hat, wobei die zwischen beiden anzunehmende zähe Flüssigkeit nicht weiter angedeutet wird.

Jedenfalls hat die in Abb. 3a gezeichnete Anordnung den Vorzug, nicht nur die Einwirkung benachbarter Elemente schematisch wiederzugeben, sondern sie kann direkt als stark vereinfachte Konstruktionsskizze angesehen werden. Das soll heißen, daß die Elemente in der gezeichneten Anordnung tatsächlich den Vorgang physikalisch wiedergeben können. Das liegt daran, daß alle Bewegungen und Kräfte in eine Richtung zeigen, wobei sie darüber hinaus sogar in der gleichen Geraden liegen.

Wir müssen die konstruktive Realisierbarkeit für das mechanische Schaltschema fordern, wenn dieses zugleich Konstruktionsskizze eines Demonstrationsmodells sein soll. Jene Forderung wird von den elektrischen Schaltungen ohne weiteres erfüllt. Es bestehen dort keinerlei Einschränkungen hinsichtlich der gegenseitigen Lage der einzelnen Elemente; lediglich die topologischen Zusammenhänge zwischen Knoten und Zweigen einschließlich ihrer Elemente sind wesentlich. Diese größere Freiheit der elektrischen Schaltung hängt zusammen mit dem skalaren Charakter der elektrischen Größen (siehe Abschn. 5).

Bei der Übersetzung der Abb. 1a in die Abb. 3a sind die Quer-Kondensatoren durch die Massen, die Längs-Spulen durch die Federn ersetzt, was zugleich bedeutet, daß die Kräfte den Strömen, die Schnellen den Spannungen entsprechen. Würden wir die ebenso zu analogen Gleichungen führende umgekehrte Zuordnung benutzt haben, so würde sich nicht viel am Bild 3a geändert haben, die Kette würde lediglich mit einer Feder beginnen und mit einer Feder enden.

Bekanntlich war sogar diese zweite Zuordnung die ältere und im Hinblick auf die physikalische Verwandtschaft zwischen bewegter Materie und strömenden Elektronen erscheint sie — entsprechend einer Bezeichnung von *K. Federn*[1] — als die „natürliche". Auch hat man sicher stillschweigend von dieser Analogie Gebrauch gemacht, als man die elektrische Potentialdifferenz „Spannung" und die Quotienten aus ihr und Strom „Widerstand" nannte.

Kraft und Spannung haben auch gemeinsam, daß sie, sogar zeitlich sich ändernd, auftreten können, ohne daß es zu Schwingungsbewegungen oder Wechselströmen kommt. Insofern könnte man diese Analogie auch als „kausale" bezeichnen.

Die Analogie hat aber, wie schon *Hähnle*[2] und *Firestone*[3] zeigten, im Hinblick auf das Ziel einer zusätzlichen Analogie in Schaltbildern den schwerwiegenden Nachteil, daß Knoten in Maschen übergehen und umgekehrt. Dieser Nachteil tritt allerdings bei der in Abb. 3a gewählten Darstellung nicht in Erscheinung, denn dort gibt es zunächst keine Längs- und Querzweige. Das liegt aber nur daran, daß das Einhängen der Nachbarfedern rechts und links an der Masse im vorliegenden Falle zwar naheliegend und konstruktiv zweckmäßig, aber nicht in dieser Weise notwendig ist. An den kinematischen und dynamischen Beziehungen wird nichts geändert, wenn man die Nachbarfedern in einem Punkt zusammenführt und die Masse seitlich zu diesem Vereinigungspunkt anbringt, wie das in Abb. 3b gezeichnet ist.

Damit kommen wir aber der elektrischen Schaltung topologisch wesentlich näher, indem nun jeder Knotenpunkt dort auch zu einem Knotenpunkt hier wird. Da nun im Knotenpunkt einerseits die Summe der Ströme, andrerseits die Summe der Kräfte verschwindet, wird klar, daß

---

[1] *K. Federn*, Elektrisch-mechanische Analogien in erweiterter Form und ihre Anwendung auf elementare Schwingungsrechnungen. Vortrag, gehalten auf der VDI-Tagung, Schwingungstechnik, im April 1958 in Stuttgart.

[2] S. Fußnote 1 von S. 28.

[3] S. Fußnote 2 von S. 28.

gleichartige Schaltbilder nur mit derjenigen Analogie zu erreichen sind, bei der Kräfte und Ströme einander entsprechen, und die man deshalb nach einem Vorschlag von *A. Hochrainer* als „schaltungstreue" Analogie bezeichnen kann. *K. Federn* hat in einer Korrespondenz mit den Verfassern den Gegenvorschlag gemacht, dann die andere (von ihm bis dahin als die „natürliche" bezeichnete) Analogie „widerstandstreu" zu nennen. Jedenfalls sei betont, daß die Anwendung der bisher erwähnten und der folgenden Vorschläge für Symbole und Anordnung unabhängig davon ist, ob man die eine oder andere Analogie bevorzugt. Wenn die Vorschläge auch darauf abgestellt sind, möglichste Ähnlichkeit zwischen den elektrischen und mechanischen Schaltbildern herzustellen, so bereitet es andrerseits auch keine Schwierigkeit, die jeweils „duale" Schaltung zu entwickeln, bei der die Knoten in Maschen, die Ströme in Spannungen, die Kräfte in Schnellen übergehen und umgekehrt.

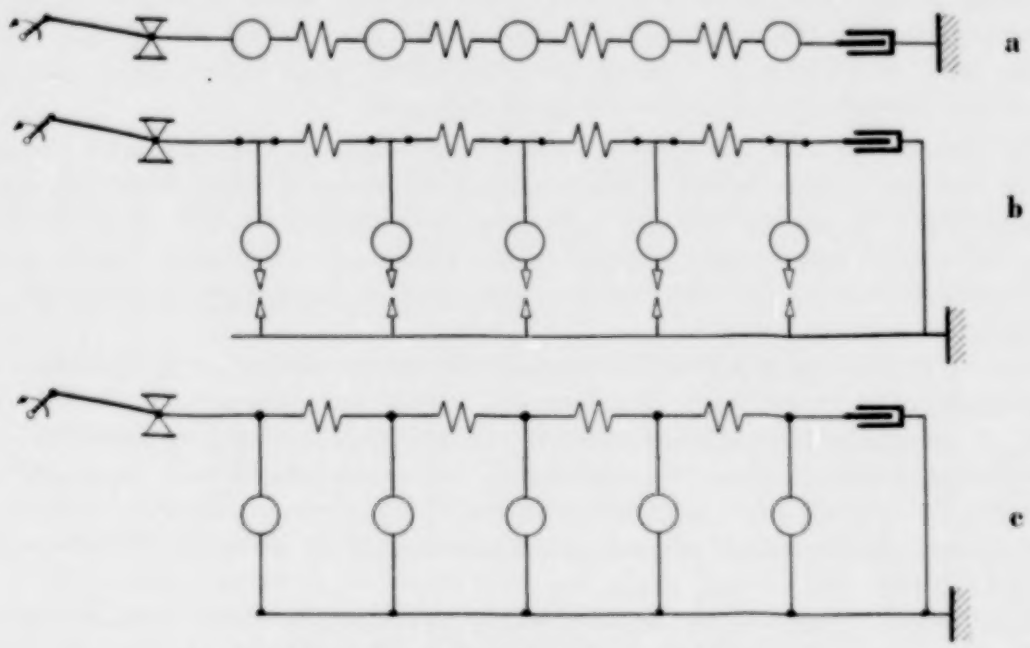


Abb. 3. Zu Abb. 1a analoge mechanische Schaltbilder.
a) in der üblichen Anordnung,
b) in 1a topologisch entsprechender Anordnung,
c) desgleichen mit Massehebeln.

Um in Abb. 3b nicht nur die Knoten der Abb. 1a abzubilden, sondern auch die Maschen, muß dem Massensymbol noch ein Ausgang gegeben werden. Dieser liegt, wie bereits mehrfach dargelegt (siehe z. B. *K. Klotter*[1]), im absoluten Raum, konstruktiv gesprochen am Gestell oder Gehäuse, gegen den die Beschleunigungen zu rechnen sind. (Es liegt nahe, dieses Bezugssystem der Mechanik als das Analogon zum Erdpotential in der Elektrotechnik zu empfinden.) Man braucht dazu keineswegs die Möglichkeit heranzuziehen, daß zwischen Masse und Gehäuse ein zum Teil mitbewegtes Medium liegt, wie *Hecht*[2] glaubte, tun zu sollen. Auch *Hechts* Aufteilung des Massensymbols in zwei Teilmassen, von denen eine am bewegten Knotenpunkt, die andere an Erde liegt, entspricht nicht den Konstruktionsgegebenheiten. Sinnvoller erscheint es, den Gegenpol einfach als Punkt zu markieren, wie es der eine von uns früher vorgeschlagen hat[1], oder an der Masse und am Gehäuse (wie etwa bei der Küchenwaage) je einen Pfeil anzubringen, um damit die wirksame Differenz-Bewegung zu markieren.

Damit die Bewegung der Masse allerdings auf die zu diesen Pfeilen senkrechte Richtung beschränkt bleibt, sind noch Führungen zu denken. Bei ihrer konstruktiven Verwirklichung ist das Auftreten von Reaktionskräften und damit von erhöhten Reibungen unvermeidlich. Es bedeutet daher bereits eine konstruktive Verbesserung, wenn man diese Führung unter Inkaufnahme einer leichten Kreisbewegung durch die Lagerung der Masse in einem am Gehäuse sitzenden Drehpunkt ersetzt. Führt man diesen Gedanken in der Form einer auf einem Hebel sitzenden „Punktmasse" aus (im Folgenden kurz als Massehebel bezeichnet), so gelangt man damit zu Abb. 3c, die nun ein konsequentes Abbild der Abb. 1a darstellt[3]. Jedenfalls erscheint auch in ihr die Masse als Querzweig, und für die so gebildeten Maschen gilt, daß die Summe der Teilverschiebungen (und

[1] *K. Klotter*, Ing.-Arch. 18 (1950) S. 291—301.
[2] S. Fußnote 3 von S. 28.
[3] *L. Cremer*, Acustica 8 (1958) S. 188.

somit auch der Schnellen) zwischen den an ihr liegenden Knoten genauso verschwinden muß, wie die Summe der Umlaufspannungen im elektrischen Kreis.

Es sei aber schon hier erwähnt, daß die Analogie in einer Hinsicht versagt. In der elektrischen Masche fließt überall derselbe Strom, wenn sie an allen Knoten von anderen Zweigen befreit wird. Das Analogon wäre die Übertragung überall gleicher Kräfte in allen Elementen der mechanischen Masche. In der Tat wird dadurch, daß die Punktmasse in der Mitte ihres Hebels sitzt, an beiden Nachbarknoten absolut genommen die gleiche Trägheitskraft übertragen, das aber unter Wechsel des Richtungssinnes gegenüber dem Maschenumlauf. Daher müssen die Gelenkpunkte im mechanischen Modell an einem starren Gehäuse befestigt oder — elektrisch ausgedrückt — geerdet sein, während die Rückleitung in Abb. 1a wohl geerdet sein kann, aber nicht sein muß. Da aber die mechanischen Schwinger schon zur Festlegung einer Ruhelage irgendwo befestigt sein müssen, ergibt sich aus diesem Richtungswechsel im vorliegenden Beispiel noch keine Schwierigkeit. (Die starre Verbindung aller Gehäusepunkte ist übrigens in Abb. 3c dadurch besonders betont, daß die Ausgänge der Massen in Halbkreisen enden.)

Schließlich sei bemerkt, daß die verlangte Trennung in Speicher potentieller und solche kinetischer Energie erhalten bleibt, wenn die Hebelmasse nicht vernachlässigbar klein ist gegenüber der Einzelmasse, bzw. wenn auch diese ein nicht mehr zu vernachlässigendes Trägheitsmoment besitzt. Im Idealfalle wirkt dagegen die Punktmasse m wie eine Masse $m/4$ im bewegten Knotenpunkt (siehe Abschn. 5).

Der wesentlichste Vorteil des Massehebels als Analogon des Kondensators bei der schaltungstreuen Analogie zeigt sich aber erst, wenn wir auch den in Abb. 1b gezeigten Hochpaß ins Mechanische übersetzen. Tatsächlich kann die entsprechende formale Umzeichnung der Abb. 1b in Abb. 4 sowohl als Schaltschema wie auch als Konstruktionsskizze für ein mechanisches Analogon angesehen werden. Durch die andere Anordnung der Massen und Federn liegt die Bewegungsrichtung jetzt senkrecht zur früheren. Deshalb mußten auch Kurbeltrieb und Dämpfungstopf gedreht werden. Ganz allgemein müssen die Massenhebel senkrecht zu allen Federn, Antrieben und Dämpfungstöpfen stehen; die elektrischen Schaltbilder können nur dann auch anordnungsgemäß ähnlich sein, wenn man auch bei ihnen (was stets möglich ist) die Kondensatorzweige senkrecht zu den mit Spulen oder Widerständen besetzten Zweigen zeichnet.

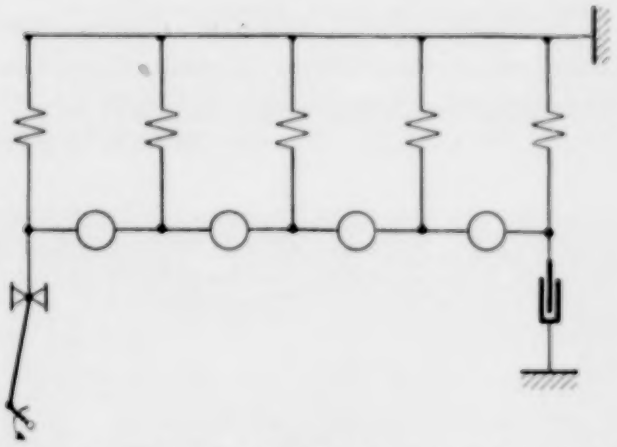


Abb. 4. Mechanisches Analogon zum elektrischen Schaltbild der Abb. 1b.

Ein bemerkenswerter Unterschied zwischen dem in Abb. 3c gezeigten Tiefpaß und dem in Abb. 4 gezeigten Hochpaß besteht darin, daß im letzten Falle die Masse nicht mehr in der Form einer Einzelmasse auftreten kann, sondern in einer „neuen" Weise angeordnet sein muß, etwa, wie hier, auf einem Hebel sitzend. Weitere Möglichkeiten solcher „neuer" Anordnungen werden in Abschn. 5 besprochen.

Die neuen Elemente (wie etwa der Massehebel) sind in der Anordnung nach Abb. 4 notwendig, in der nach Abb. 3c nicht notwendig, aber auch dort (um die Zahl der Schaltungssymbole klein zu halten) zweckmäßig und erwünscht.

3. Eigenschaften des Modells. Abb. 5 zeigt vier Aufnahmen des mit Massehebeln als Elementen arbeitenden Demonstrationsmodells und zwar oben den „Tiefpaß" nach Abb. 3c und unten den „Hochpaß" nach Abb. 4.

Die Massehebel erscheinen im Modell in der gleichen Weise wie in den Schaltbildern. Daß sie beim Tiefpaß hängen, bringt eine zusätzliche Rückstellkraft (vom Schwerefeld her) hinein, die im Schaltbild, das schwerefrei (horizontal) gedacht werden kann, nicht berücksichtigt ist. Man könnte sie auch beim Modell, das, um für einen großen Zuhörerkreis gut sichtbar zu sein, vertikal aufgebaut sein muß, vermeiden, indem man den Hebel über den Drehpunkt verlängert und eine gleiche Masse darüber anbringt. Man kann diese Pendelwirkung jedoch vernachlässigen, wenn man bereits die tiefste Demonstrations-Frequenz über die Pendelfrequenz legt.

Bei der Schaltung mit den horizontalen Massehebeln fällt diese Schwierigkeit weg; dafür verlangt die Verkürzung der horizontalen Hebel-Projektionen bei ihren Drehbewegungen an jeweils einer Seite ein gewisses Spiel an den Verbindungsstellen.

Die Federn sind nicht als Schraubenfedern ausgebildet, sondern sie bestehen (wie das die Ruhe-Aufnahme eines Elementes in Abb. 6 erkennen läßt) aus vier in zwei zueinander senkrechten Ebenen gebogenen Blattfedern, die dem Element in den zur Sollbewegung senkrechten Richtungen eine gewisse Steife geben.

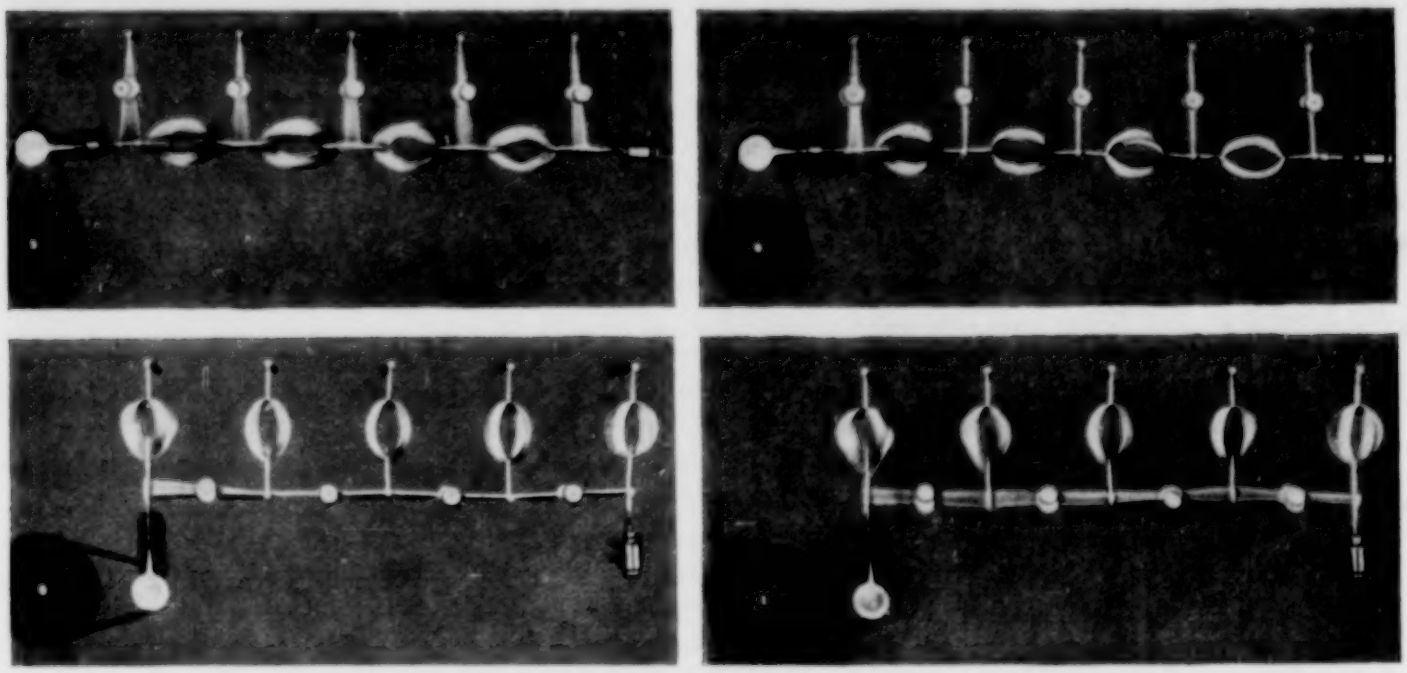


Abb. 5. Aufnahmen des schwingenden Demonstrationsmodells, oben Tiefpaß gemäß Abb. 3c, unten Hochpaß gemäß Abb. 4, links bei tiefer, rechts bei hoher Frequenz.

In Abb. 5 sind die linken Aufnahmen bei tiefer, die rechten bei hoher Frequenz gemacht. Man sieht, wie die am linken Rande eingeleitete Bewegung oben bei tiefer Frequenz bis zum rechts abschließenden Dämpfungstopf durchdringt, bei hoher dagegen auf die ersten Elemente beschränkt bleibt. Dies ist aus der mit wachsender Frequenz sich immer stärker auswirkenden Trägheit der Massen ohne weiteres verständlich. Diese Trägheitswirkung liegt der alltäglichen Erfahrung sogar näher als die nur mittelbar erfahrbare Sperrwirkung der Spulen.

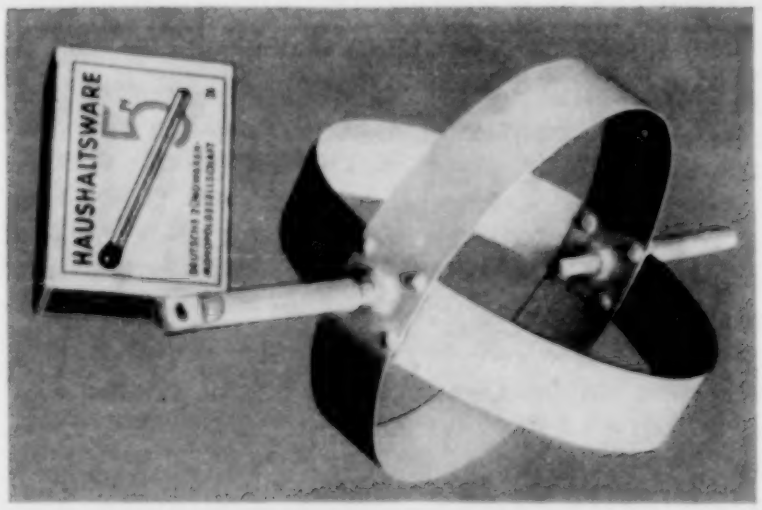


Abb. 6. Federelement des Modells.

Daß beim mechanischen Modell der Hub des Kurbelgetriebes und nicht seine (einer Spannung analoge) Schnelle als Erregung gegeben ist, ist unerheblich, da ja hauptsächlich der Unterschied in den Amplituden gleichartiger Schwinggrößen beobachtet wird.

Auch das in den unteren Bildern der Abb. 5 zum Ausdruck kommende Verhalten des Hochpasses ist mechanisch leicht verständlich. Bei niedriger Frequenz bewegt sich bereits der Ausgangs-Drehpunkt des ersten Massehebels kaum, da die Hin- und Herbewegung der Masse nur kleine Beschleunigungskräfte auslöst. Bei hohen Frequenzen dagegen sucht die Punktmasse auf dem Hebel, wie auch bei allen folgenden Massehebeln, in Ruhe zu bleiben; damit werden diese mehr und mehr zu in der Mitte fest gelagerten Hebeln, welche die Verschiebung, die sie am linken Ende erleiden, einfach auf das rechte Ende übertragen. In Abb. 7 ist dieser Mechanismus für einen Zeitpunkt (nahezu) maximaler Verschiebung herausgezeichnet.

Auch hier zeigt sich die bereits erwähnte, dem Massehebel eigene Richtungsumkehr. Man könnte diese Richtungsumkehr dadurch vermeiden, daß man jedesmal einen in der Mitte gelagerten Umkehrhebel zwischenschaltet; aber dann würde man im mechanischen Modell zusätzliche „Erdverbindungen“ erhalten, die im elektrischen Kreis fehlen. Man kann aber auch einen Weg wählen, der die Ähnlichkeit der Schaltbilder weniger stört, nämlich den, daß man zwei Massehebel hinter-

einanderschaltet (Abb. 8) und nur jeden zweiten mit einer Feder verbindet. Man könnte dann diesen „Doppel-Massehebel" auf der elektrischen Seite durch Aufteilung des Kondensators in zwei in gleicher Weise in Reihe geschaltete abbilden.

Für Fälle, wie den in Abb. 4 bzw. 7 wiedergegebenen, ist die Richtungsumkehr nur ein Schönheitsfehler. Es gibt aber Fälle, in denen die Richtungsumkehr die Analogie wesentlich stört. Man kommt dann mit dem einfachen Massehebel nicht mehr aus, muß vielmehr den doppelten Massehebel

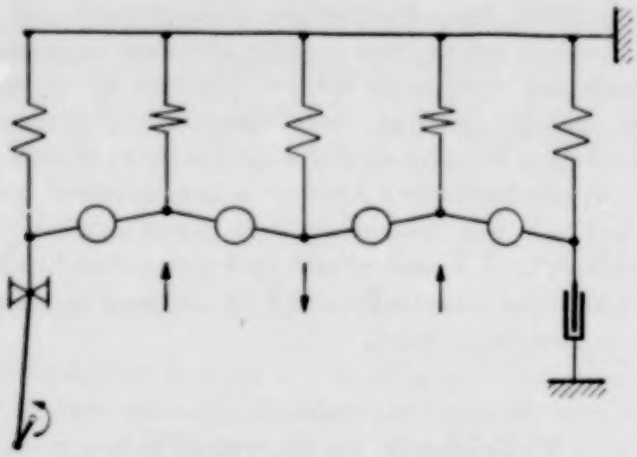


Abb. 7. Phasenbild des mechanischen Hochpasses, bei nahezu maximaler Auslenkung.

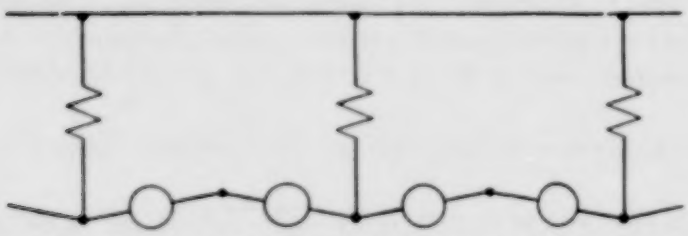


Abb. 8. Vermeidung der Richtungsumkehrung durch doppelte Massehebel.

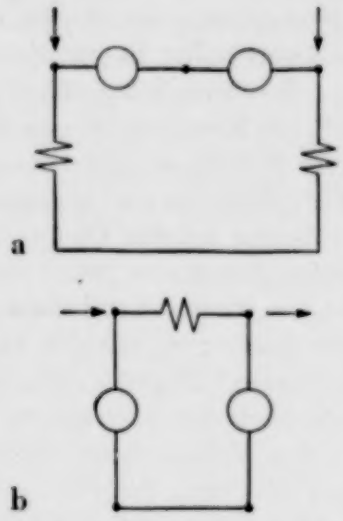


Abb. 9. Parallelschaltung von Masse und Feder bei Anwendung eines doppelten Masse-Hebels.

a) Federachse senkrecht zur Verbindung der Endpunkte,
b) Federachse in Richtung der Verbindung der Endpunkte.

(oder ein anderes neues Element) einführen. Es sind dies jene Fälle, in denen ein nicht umkehrendes Element, eine Feder oder ein Dämpfungstopf, parallel zu einer Masse liegt. Einen solchen Fall zeigt Abb. 9a, wobei (nur der Symmetrie wegen, aber nicht notwendigerweise) auch die Feder geteilt ist. Die Pfeile sind dabei so eingezeichnet, daß das Element auf die Differenz der zugehörigen Bewegungen anspricht. Sind diese nämlich gleich, so werden nicht nur die Federn nicht deformiert, sondern auch die Massen können in Ruhe bleiben, indem der mittlere Gelenkpunkt um ebensoviel nach oben ausweicht.

Die Richtungsgleichheit aller mechanischen Vektoren verlangt wieder, daß die Federachsen in Kraftrichtung zeigen; in diesem Falle zeigen sie senkrecht zur Verbindungslinie der Angriffspunkte. Es ist aber auch möglich und u. U. einfacher, diese Verbindungslinie mit der Federachse zusammenfallen zu lassen und die wieder zweifach auftretenden Massehebel senkrecht dazu zu legen, also gewissermaßen dem ursprünglichen Federelement die Massen parallel zu schalten, wie das in Abb. 9b gezeigt ist. Damit ist eine weitere neue Form für das Massenelement gewonnen (siehe Abschn. 5).

II. Die neuen Elemente

4. Diskussion der Analogien; Vorschläge für neue Elemente. Im Jahre 1950 hat der eine von uns in dieser Zeitschrift[1] im Anschluß vor allem an die Arbeiten von *W. Hähnle*[2] und *F. A. Firestone*[3,4] die Analogien zwischen elektrischen und mechanischen Schwingern von mehreren Freiheitsgraden besprochen.

Analog sollen zwei physikalische Vorgänge stets dann heißen, wenn sie durch dieselben Gleichungen oder Differentialgleichungen beschrieben werden können. Um die Übereinstimmung der

[1] S. Fußnote 1 von S. 30.
[2] S. Fußnote 1 von S. 28.
[3] S. Fußnote 2 von S. 28.
[4] *F. A. Firestone*, J. Appl. Phys. 9 (1938) S. 373—387.

Partner einer Analogie zu stärken, wurde jedoch weiterhin gefordert, daß die Elemente des einen Gebildes in einer ein-eindeutigen Weise den Elementen des Partners entsprechen.

In jenem Aufsatz war das besondere Augenmerk auf die Begrenzungen gerichtet, die solchen Analogien gezogen sind. Es wurde erstens gezeigt, daß auf der mechanischen Seite nur Verbände von „einläufigen" Schwingern, dort Ketten genannt, in Betracht gezogen werden können, daß dagegen Punktkörper mit mehr als einem Freiheitsgrad und ihre Verbände sowie starre Körper (mit mehr als einem Freiheitsgrad) und ihre Verbände nicht als Partner in einer solchen Analogie auftreten können. Zweitens wurde gezeigt, daß auch unter den elektrischen Schaltungen sich solche befinden, die keine Partner unter mechanischen Ketten haben, wenn diese aus den folgenden drei Elementen aufgebaut sind: Punktmassen, die sich auf vorgeschriebenen Bahnen bewegen (oder Drehmassen, die sich um vorgeschriebene Achsen drehen), Federn und Dämpfern. Die einschränkende Feststellung lautete dahin, daß in der elektrischen Schaltung alle Kondensatoren sich gleichzeitig müssen erden lassen, damit die Schaltung ein mechanisches Analogon besitze.

Diese Beschränkung rührt im wesentlichen her von der Tatsache, daß der Punktkörper, die „Masse", ein Element ist, von dem ein „Pol" „festliegt", d. h. mit einem Inertialsystem verbunden ist. Diese Festlegung ist notwendig, weil das *Newton*sche Gesetz $P = m\,\dot{v}$ in dieser Form nur gilt, wenn die „Koordinate" v gegen ein Inertialsystem gemessen wird.

Inzwischen ist die Diskussion um die Analogien weitergegangen. Von den zahlreichen Veröffentlichungen dieser Jahre nennen wir vor allem jene, die die Diskussion in einer bemerkenswerten Richtung weitergeführt haben. Die Darstellung von *W. Reichardt*[1] ist im wesentlichen zusammenfassender Natur; sie enthält aber überdies Vorschläge zur Terminologie, indem sie die Einführung der „neutralen" Begriffe „Standwert" und „Mitgang" für die Quotienten der in Betracht kommenden Veränderlichen propagiert. Zwei Arbeiten von *H. M. Trent*[2 3] befassen sich zwar nicht unmittelbar mit den elektrisch-mechanischen Analogien, sie bemühen sich jedoch in grundsätzlicher Weise um die Aufhellung des Hintergrundes der Dualitäten in der Formulierung der physikalischen Gesetze und des Dualismus Knoten — Masche.

Eine neuere Arbeit von *F. A. Firestone*[4] ist bemerkenswert, weil sie die systematische Gegenüberstellung analoger Gebilde sehr weit treibt.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen jedoch eine Reihe von Arbeiten[5, 6, 7, 8, 9, 10], die, ganz ähnlich, wie dies im Teil I dieses Aufsatzes geschah, neue Elemente (Massen auf Hebelanordnungen; Transformatoren und dergl.) in die Betrachtung einführen. Diese neuen Elemente bringen neue Gesichtspunkte in die Diskussion. Zunächst läßt sich die Frage der Abgrenzung der Möglichkeiten für die Analogien erneut stellen und in neuer Weise beantworten. Ferner läßt sich das Problem der Analogie auch auf die Anordnung der Partner ausdehnen. Es ist der Zweck des zweiten Teils dieses Aufsatzes, die vorgeschlagenen „neuen" Elemente gemeinsam zu erörtern und insbesondere ihre Rolle im Hinblick auf die beiden zuletzt genannten Gesichtspunkte zu besprechen.

5. Die Eigenschaften der neuen Elemente. Die in den Fußnoten [5] bis [10] genannten Autoren haben statt der „Masse", d. h. statt des sich auf einer vorgeschriebenen Bahn bewegenden Punktkörpers „neue" Elemente verschiedener Art in die Betrachtung eingeführt, ähnlich wie dies auch hier im Teil I geschah. Alle diese neuen Elemente haben ein gemeinsames Merkmal: Sie können Partner sein eines ungeerdeten Kondensators, während die „Masse" nur einem geerdeten Kondensator entspricht. Um dies zu zeigen, untersuchen wir die Bewegungen der neuen Elemente. Die gemachten Vorschläge für neue Elemente laufen im wesentlichen auf die in den Abbildungen 10, 11, 12 wiedergegebenen drei Grundformen hinaus. Wir behandeln diese drei Elemente der Reihe nach.

a) *Element I*; Abb. 10. [*G. Lander*; *L. Cremer*; *K. Federn*[11]].

Das Element I besteht aus einer Punktmasse M, die in der Mitte einer starren (masselosen) Stange sitzt. Die Enden der Stange sind die „Pole" A und B des Elements.

[1] *W. Reichardt*, Frequenz 6 (1952) S. 25—29, 51—55, 72—89.
[2] *H. M. Trent*, J. Appl. Mech. 19 (1952) S. 147—150.
[3] *H. M. Trent*, J. Acoust. Soc. Am. 27 (1955) S. 500—527.
[4] *F. A. Firestone*, J. Acoust. Soc. Am. 28 (1956) S. 1117—1153.
[5] *F. Raymond*, Revue Gen. de l'Electr. 61 (1952) S. 465—475.
[6] *P. Le Corbeiller* — *Y. W. Yeung*, J. Acoust. Soc. Am. 24 (1952) S. 643—648.
[7] *B. B. Bauer*, J. Acoust. Soc. Am. 25 (1953) S. 837—840.
[8] *G. Lander*, Frequenz 6 (1952) S. 235—246, 257—266.
[9] S. Fußnote 3 von S. 30.
[10] *K. Federn*, Umdruck, T. H. Darmstadt, ferner Fußnote 1 auf S. 29.
[11] Herr *Federn* wies uns übrigens darauf hin, daß dieses Element, der „Massehebel", sich bereits 1934 in der „Schwingungstechnik" von *E. Lehr* Berlin, Springer, auf S. 113 ff behandelt findet.

Unter Einführung der Koordinaten y_A, y_M, y_B und der Kräfte P_A, P_M, P_B (mit den in der Zeichnung angegebenen positiven Richtungen) findet man die folgenden Beziehungen:

kinematisch: $$2\,y_M = y_A - y_B\,, \tag{1a}$$

statisch: $$P_A + P_M + P_B = 0\,, \tag{2a}$$

kinetisch: $$P_M = -M\ddot{y}_M\,. \tag{3a}$$

Aus diesen Gleichungen finden wir als Beziehung zwischen der das Element „durchfließenden" Kraft P_A und der Geschwindigkeitsdifferenz $(\dot{y}_A - \dot{y}_B)$ „an den Enden des Elements"

$$P_A = \frac{M}{4}\frac{d}{dt}(\dot{y}_A - \dot{y}_B)\,. \tag{4a}$$

Soll eine Beziehung

$$P_A = m\frac{d}{dt}(\dot{y}_A - \dot{y}_B) \tag{5}$$

repräsentiert werden, so muß also

$$m = M/4 \qquad \text{oder} \qquad M = 4\,m \tag{6a}$$

sein.

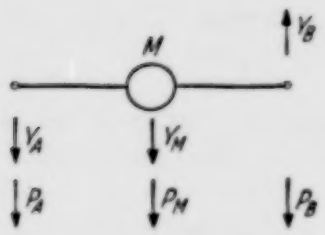


Abb. 10. Element I.

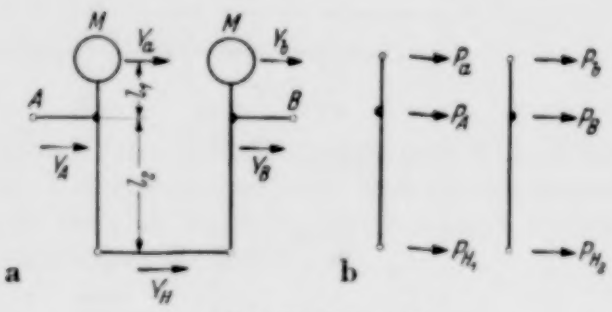


Abb. 11. Element II.

b) Element II; (Abb. 11). [*F. Raymond*; *K. Federn*; Teil I.]

Für dieses Element gelten die folgenden vier Gruppen von Beziehungen:

geometrische: $$l_1 : l_2 = \alpha; \qquad \frac{l_1 + l_2}{l_2} = 1 + \alpha = \lambda\,, \tag{1b}$$

kinematische: $$\frac{y_a - y_A}{l_1} = \frac{y_A - y_H}{l_2}; \qquad \frac{y_b - y_B}{l_1} = \frac{y_B - y_H}{l_2}\,,$$

statische:

$$\left.\begin{array}{l|l} P_a + P_A + P_H = 0 & P_a(l_1 + l_2) + P_A l_2 = 0\,, \\ P_b + P_B + P_H = 0 & P_b(l_1 + l_2) + P_B l_2 = 0\,, \end{array}\right\} \tag{2b}$$

kinetische:

$$P_a = -M\ddot{y}_a; \qquad P_b = -M\ddot{y}_b\,. \tag{3b}$$

Aus ihnen folgt schließlich

$$P_A = \frac{1}{2}M(1+\alpha)^2(\ddot{y}_A - \ddot{y}_B)\,. \tag{4b}$$

Falls wieder (5) gelten soll, muß also sein

$$m = \frac{M}{2}(1+\alpha)^2\,, \qquad M = \frac{2\,m}{(1+\alpha)^2}\,. \tag{6b}$$

Für den einfachen Fall $\alpha = 1$ folgt somit

$$m = 2\,M; \qquad M = \frac{m}{2}\,.$$

Wenn dagegen $m = M$ sein soll, so muß $\lambda^2 = 2$ und somit $x = \lambda - 1 = \sqrt{2} - 1$ werden.

Die in Abb. 9b angedeutete Form für das neue Element ist ein konstruktiv besonders einfacher Sonderfall der hier erörterten; es ist dann jedoch $\lambda < 1$ und damit $\alpha < 0$.

c) *Element III.* (Abb. 12.) [*Le Corbeiller-Yeung*; *G. Lander.*]

Für dieses Element gelten diese Beziehungen:

kinematische:

$$y_l = \frac{y_B}{2}\,; \qquad y_l = \frac{y_A + y_M}{2}\,; \tag{1c}$$

statische:

$$\left.\begin{aligned} 2\,P_B + P_{l2} &= 0; & P_A + P_{l1} + P_M &= 0\,; \\ P_A &= P_M; & P_{l1} &= P_{l2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2c}$$

kinetische:

$$P_M = -\,M\,\ddot{y}_M\,. \tag{3c}$$

Aus ihnen folgt

$$P_A = M\,(\ddot{y}_A - \ddot{y}_B)\,; \tag{4c}$$

hier ist daher

$$m = M\,. \tag{6c}$$

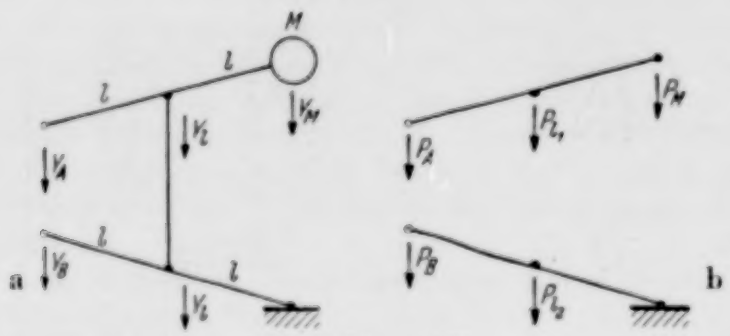


Abb. 12. Element III.

Mit verschiedenen Werten β in der Relation $m = \beta\,M$ gilt daher für alle drei „neuen" Elemente I, II und III, wenn $\dot{y} = v$ gesetzt wird,

$$P_A = m\,\frac{d}{dt}(v_A - v_B)\,. \tag{7}$$

Diese Beziehung entspricht der für den (nicht geerdeten) Kondensator geltenden

$$i = C\,\frac{d}{dt}(u_A - u_B)\,. \tag{8}$$

Alle die „neuen" Elemente I, II, III unterscheiden sich vom alten Element „Masse" dadurch, daß der Punktkörper nicht mehr allein vorhanden ist, sondern daß er jetzt auf Hebeln sitzt. Es sind jeweils zwei „Pole" A und B vorhanden. Wenn diese Pole gleichartig bewegt werden, $y_A \equiv y_B$, wird $\ddot{y}_A = \ddot{y}_B$ und damit $y_M = 0$; die Masse bleibt in Ruhe, es wird keine Trägheitskraft geweckt. Der analoge Vorgang im Kondensator besteht in einer gemeinsamen Veränderung des Potentials der beiden Platten; diese Potentialveränderung weckt keinen Strom (Verschiebungsstrom) im Kondensator.

Jedes der neuen Elemente I, II, III kann als Analogon für einen nicht-geerdeten Kondensator dienen. Durch die Verwendung dieser neuen Elemente wird daher die frühere Beschränkung aufgehoben, daß auf der elektrischen Seite nur geerdete Kondensatoren erscheinen dürfen. Selbstverständlich kann aber auch einem geerdeten Kondensator als Analogon eines der Elemente I, II, III zugeordnet werden; man braucht dann nur einen der Pole, A oder B, des betreffenden Elementes festzustellen.

Während die Elemente II und III einander völlig gleichwertig sind, besteht beim Element I eine Richtungsumkehr der Ausschläge und damit der Geschwindigkeiten an den Polen A und B. Diese Erscheinung ist im Teil I schon ausführlich erörtert worden. Abgesehen von dieser Richtungsumkehr ist auch Element I den Elementen II und III gleichwertig. Es ist das einfachste der drei Elemente. Für die folgenden Betrachtungen werden wir daher in den Fällen, wo die Richtungsumkehr keine Rolle spielt (d. h. wenn keine Feder und kein Dämpfer dem Element parallel geschaltet ist), stets dieses Element I als Repräsentant heranziehen.

6. Analogie in der Anordnung; Realisierbarkeit der mechanischen Schaltung. In Teil I war schon ausführlich auf den grundsätzlichen Unterschied im Charakter der elektrischen (u, i) und mechanischen (v, P) Veränderlichen hingewiesen worden, der darin besteht, daß die elektrischen Veränderlichen Skalare, die mechanischen dagegen Vektoren sind, und daß Gleichwertigkeit nur dann erreicht werden kann, wenn auch die mechanischen Größen sich als Skalare behandeln lassen, was dann der Fall ist, wenn alle Vektorgrößen in die gleiche Richtung fallen. Es war dort auch schon gezeigt worden, daß dieser Zustand stets erreicht werden kann. Man muß nur fordern, daß alle Federn und Dämpfer senkrecht zu den Elementen I liegen, also, damit gleichwertig, daß alle Zweige mit Spulen und Widerständen senkrecht zu den Zweigen mit Kondensatoren liegen.

Als erläuterndes Beispiel dienten dort die Abbildungen 1a und 1b. Ein weiteres Beispiel ist in Abb. 13 gegeben; eine Anordnung nach 13a muß in eine solche nach 13b umgezeichnet werden, um zu erreichen, daß das mechanische Gegenstück auch in der Anordnung analog ist.

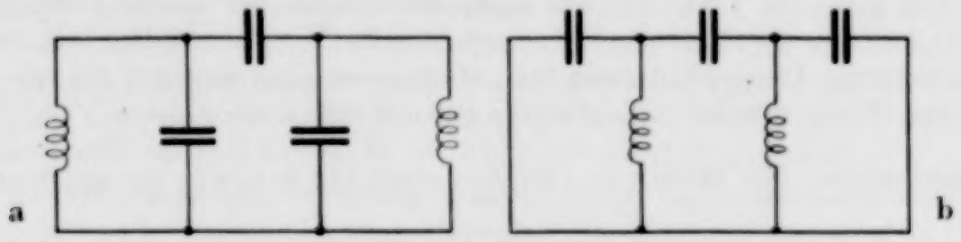


Abb. 13. Gegebene (a) und umgezeichnete (b) elektrische Schaltung.

Erheben wir also die oben genannte Forderung, daß nämlich Spulen und Widerstände (bzw. Federn und Dämpfer) stets in einer Richtung, die Kondensatoren (bzw. Massehebel) aber senkrecht dazu angeordnet werden, zum weiteren Kriterium für eine Analogie, so erreichen wir, daß die analogen mechanischen Schaltungen konstruktiv realisierbar sind.

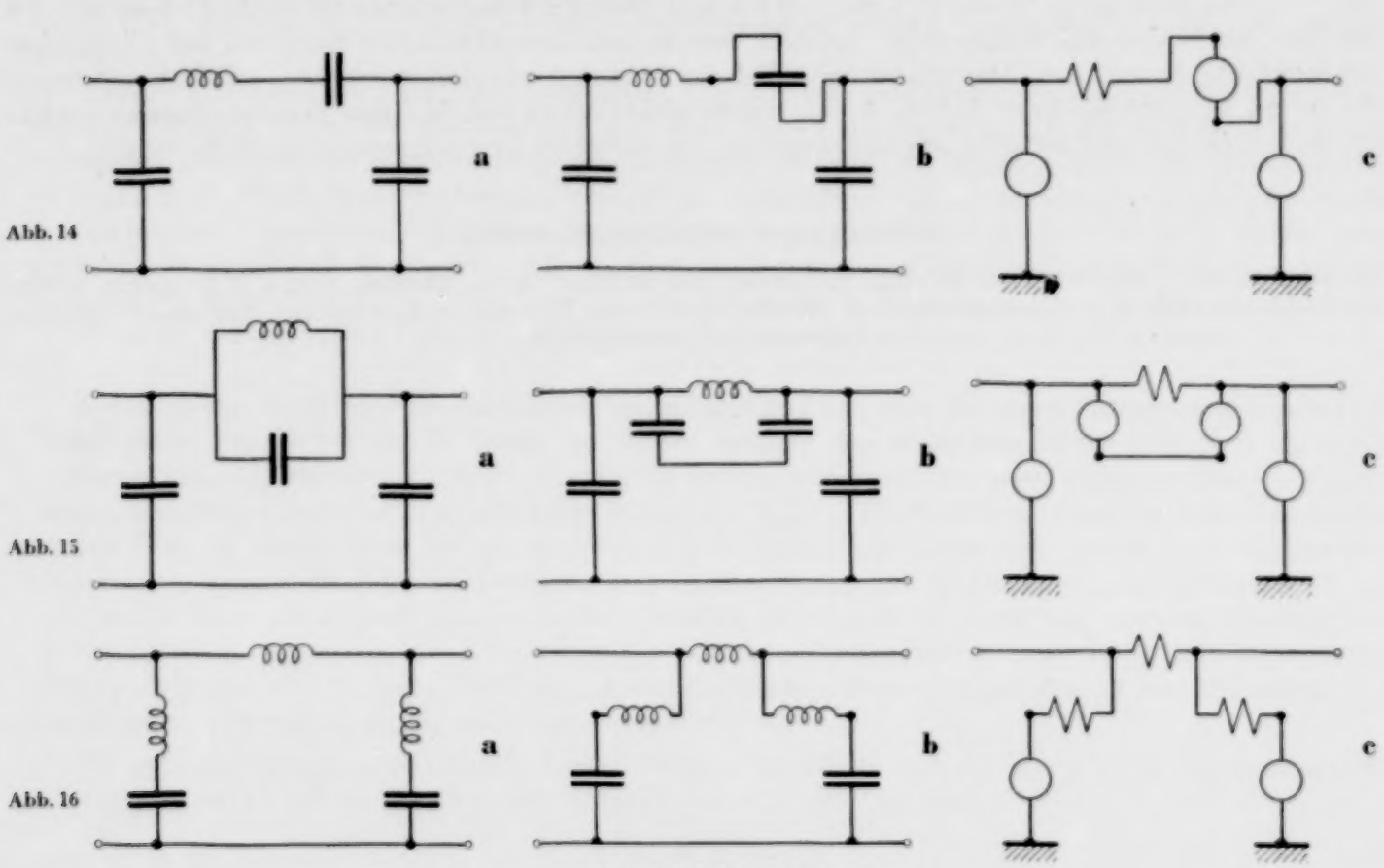


Abb. 14 bis 16. Beispiele
a) Gegebene elektrische Schaltung. b) Umgezeichnete Schaltung. c) Mechanisches Analogon.

Besser als durch weitere Worte wird das Gesagte durch die Abbildungen 14, 15, 16 verdeutlicht. Die Abbildungen zeigen drei elektrische Schaltungen und ihre mechanischen Partner. In jeder dieser Abbildungen zeigt Teil a die ursprüngliche elektrische Schaltung, Teil b die umgezeichnete, Teil c

die realisierbare mechanische Anordnung. Die Teile b und c sind so offenkundig von gleicher Anordnung, daß man sogar darauf verzichten kann, die mechanischen Gegenstücke gesondert zu zeichnen, wenn man bereit ist, das Symbol für den Kondensator auch als Symbol für eines der Elemente I, II, III gelten zu lassen (und außerdem natürlich Spulen und Federn sowie Widerstände und Dämpfungstöpfe mit dem jeweils gleichen Symbol zu belegen). Die Umzeichnungen der elektrischen Schaltungen stellen dann sogleich die mechanischen realisierbaren Gebilde dar.

In den Abbildungen ist, wo immer möglich, Element I als Partner für den Kondensator gewählt. Nur dem mittleren Kondensator in Abb. 15 kann (wegen der parallel geschalteten Spule) Element I nicht zugeordnet werden; in der Abbildung ist Element II (nach Abb. 9b) gewählt.

Trotz der sehr weitgehenden Übereinstimmung der elektrischen und mechanischen Gebilde besteht jedoch ein Unterschied, der nicht unerwähnt bleiben soll. Während in jedem der elektrischen Gebilde Schwingungen vor sich gehen können, auch wenn keiner der Knoten geerdet ist, können manche mechanische Gebilde überhaupt nicht schwingen, wenn nicht wenigstens ein fester Punkt vorhanden ist. Das gilt z. B. schon für das einfache Gebilde von einem Freiheitsgrad. Ein solcher fester Punkt (entsprechend einem Erdungspunkt in der elektrischen Schaltung) kann aber stets geschaffen werden. Diese Forderung ist jedoch von ganz anderer Art als jene frühere, wo alle Kondensatoren (Massenpunkte) gleichzeitig geerdet sein mußten.

7. Schlußbemerkungen. Mit Hilfe von vier Kriterien für das, was als schaltungsanalog gelten soll, nämlich

1. Übereinstimmung der Differentialgleichungen,
2. individuelle Zuordnung der Elemente,
3. topologische Zuordnung von einander entsprechenden Zweigen und Knoten,
4. solche Anordnung der mechanischen Zweige, daß alle Kräfte und Verschiebungen parallel sind (die dann im elektrischen Analogon ohne Einschränkung übernommen werden kann),

haben wir schließlich eine sehr weitgehende Übereinstimmung der Partner einer Analogie erzielt. Die Übereinstimmung geht nun so weit, daß ein und dasselbe Schaltschema (z. B. Teil b von Abb. 14 bis 16) unmittelbar das realisierbare Gebilde, sowohl auf der elektrischen Seite wie auf der mechanischen Seite, bezeichnet. Das wesentliche Ziel einer jeden Analogiebetrachtung, nämlich mit einem Minimum an gedanklichem Aufwand von einem elektrischen Gebilde zum (realisierbaren) mechanischen Gebilde (oder umgekehrt) überzugehen, ist damit in bemerkenswertem Maße erfüllt.

(Eingegangen am 3. Dezember 1958)

Anschriften der Verfasser: Prof. Dr.-Ing. *L. Cremer*, Lehrstuhl f. Techn. Akustik, Techn. Universität Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Jebensstr. 1; Prof. Dr.-Ing. *K. Klotter*, Division of Engineering Mechanics, Stanford University, Stanford, Calif.

Etude théorique de l'influence des réflexions intérieures sur la marche d'un rayon lumineux traversant une lame transparente soumise à des forces agissant dans son plan moyen

Par **Henry Favre**

Introduction. Lorsqu'un rayon lumineux monochromatique traverse orthogonalement une lame transparente à faces parallèles, il est en partie réfléchi sur chacune des deux faces de la lame. En particulier, la lumière réfléchie sur la seconde face revient en arrière, se réfléchit en partie sur la première et repart dans la direction de la seconde. Le même phénomène se reproduit indéfiniment (fig. 2). Au rayon ayant traversé directement la lame, viennent donc s'ajouter une infinité d'autres rayons émergents, de plus en plus faibles, provenant de ce que nous appellerons les réflexions intérieures de la lame. Comme tous ces rayons ont le même support SS' et la même longueur d'onde, ils constituent ensemble un seul rayon, le rayon émergent résultant.

L'influence des réflexions intérieures sur la marche d'un rayon lumineux traversant une lame cristalline a déjà fait l'objet de différents travaux. Un des principaux est la thèse de *L. Chaumont*[1,2]. Par contre, cette influence ne semble pas avoir été considérée jusqu'à présent, lorsqu'on étudie les tensions dans un modèle transparent, en photoélasticité bidimensionnelle. Pourtant *Ch. Fabry* a remarqué, déjà en 1930, que le phénomène produit par l'interférence de tous les rayons émergents permettrait de faire la mesure complète des tensions intérieures, surtout si l'on argentait convenablement les deux faces de la lame servant de modèle[3].

Le phénomène en question pourrait donc être appliqué utilement. Mais il est d'autre part nuisible, comme nous le verrons, car dans les méthodes utilisées ordinairement en photoélasticité, il est en général une cause d'erreurs, heureusement petites et négligeables dans la plupart des cas.

Dans cette étude, qui a pour but d'apporter une modeste contribution à un important problème, nous calculons d'abord les variations de marche et les variations d'intensité du rayon émergent, produites par l'application des forces sur la lame, en tenant compte des réflexions intérieures (§ 1). Nous évaluons ensuite les erreurs engendrées par ces réflexions, lorsqu'on cherche à déterminer les tensions dans la lame en mesurant la biréfringence accidentelle (§ 2). Enfin, nous montrons la possibilité de déterminer les tensions intérieures, en élasticité bidimensionnelle, à l'aide d'une méthode interféro-photométrique, basée sur le phénomène étudié (§ 3).

Nous ne considérons ici que le cas des rayons traversant orthogonalement la lame.

1. Calcul des variations de marche et des variations d'intensité du rayon émergent, produites par l'application des forces sur la lame, en tenant compte des réflexions intérieures. Soit un rayon lumineux monochromatique $SOO'S'$, traversant orthogonalement une lame transparente, isotrope, à faces parallèles, sur laquelle agissent des forces $P_1, P_2, \ldots, P_n$ équilibre, situées toutes dans le plan moyen (fig. 1). Supposons qu'en arrivant sur la lame, ce rayon soit polarisé rectilignement. Considérons pour l'instant uniquement le rayon émergent principal, c'est-à-dire celui qui sort de la lame en l'ayant traversée directement, sans nous occuper des rayons émergents secondaires, provenant des réflexions sur les faces intérieures. A la sortie de la lame, ce rayon principal est en réalité formé de deux rayons polarisés, vibrant parallèlement aux directions 1, 2 des tensions principales σ_1, σ_2, au point considéré.

Désignons respectivement par δ_1, δ_2 les variations absolues de marche de ces deux rayons, produites par l'application des forces (mise en charge), et par

$$\delta_3 = \delta_1 - \delta_2 \tag{1}$$

[1] *L. Chaumont*, Annales de Physique, 9e série, 1915, T. IV et V; voir p. 180 et suiv. du T. IV le chapitre intitulé: Rôle de la lumière réfléchie sur les lames cristallines.

[2] *H. Bouasse*, Optique cristalline. Double réfraction. Delagrave, Paris, 1925; voir p. 136 et 137 le § 81 intitulé: Importance des faisceaux réfléchis dans une lame mince.

[3] *Ch. Fabry*, Sur une nouvelle méthode pour l'étude expérimentale des tensions élastiques. Comptes rendus des séances de l'Acad. des sc., T. 190, 1930, p. 457 et suiv.

leur variation relative de marche. Entre ces trois grandeurs et les tensions principales existent les relations[1]:

$$\delta_1 = a\,e\,\sigma_1 + b\,e\,\sigma_2, \qquad \delta_2 = b\,e\,\sigma_1 + a\,e\,\sigma_2, \qquad \delta_3 = c\,e\,(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{2}$$

où

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{E}\left[(n-1)\,\nu + n\,\frac{q}{v} - 2\,n\,\nu\,\frac{p}{v}\right], \\ b &= \frac{1}{E}\left[(n-1)\,\nu + (1-\nu)\,n\,\frac{p}{v} - n\,\nu\,\frac{q}{v}\right], \\ c &= a - b = \frac{(1+\nu)\,n}{E}\left(\frac{q}{v} - \frac{p}{v}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dans ces formules, E, ν désignent respectivement le module d'élasticité et le coefficient de *Poisson* de la matière constituant la lame, e, n, l'épaisseur et l'indice de réfraction de cette lame, avant la mise en charge. Enfin p/v, q/v sont les constantes qui, dans la théorie de *Neumann*, caractérisent les propriétés de la matière quant à la biréfringence accidentelle[2].

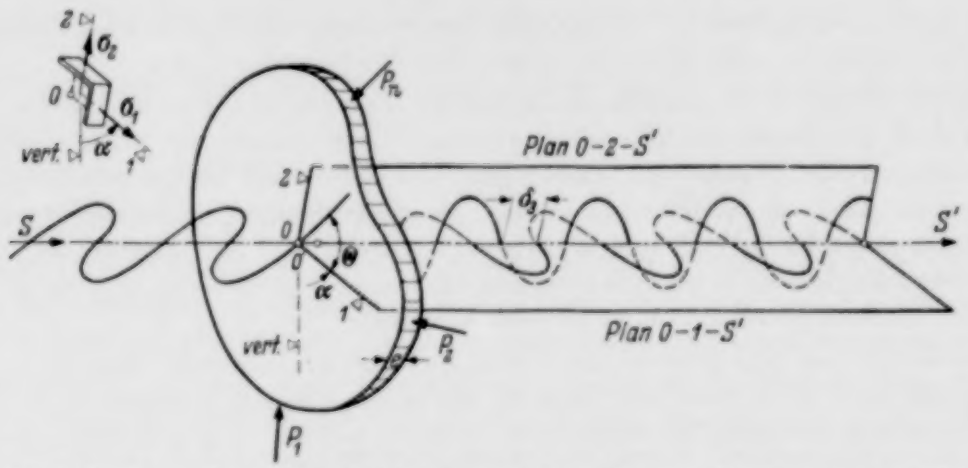


Fig. 1. Rayon monochromatique polarisé, traversant orthogonalement une lame transparente soumise à des forces agissant dans son plan moyen.

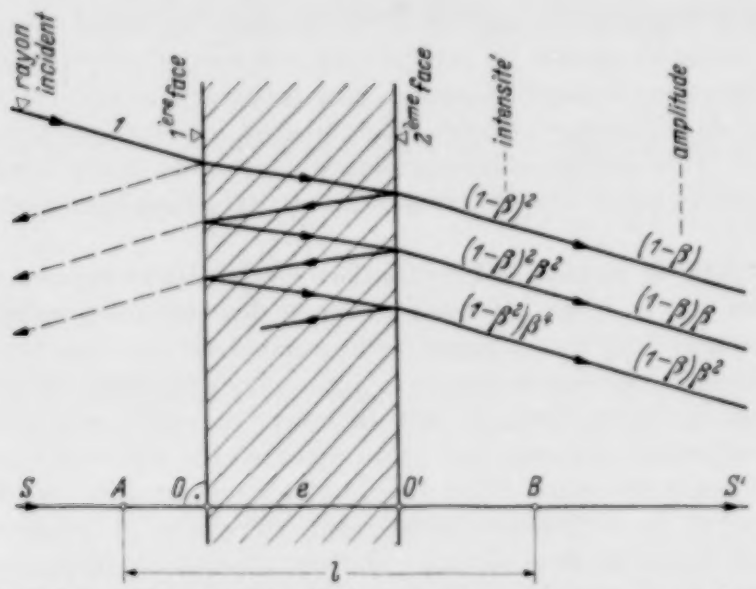


Fig. 2. En haut: schéma général des réflexions successives subies par un rayon arrivant sur une lame à faces parallèles. En bas: support effectif du rayon orthogonal considéré.

Considérons maintenant l'un des deux rayons émergents, celui vibrant parallèlement à la direction 1 par exemple, mais tenons également compte des rayons émergents secondaires, en nombre infini, vibrant tous parallèlement à la direction 1 et provenant des réflexions sur les faces intérieures de la lame (fig. 2).

[1] *H. Favre*, Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures. Editions de la Revue d'Optique théor. et instrum., 1929, et Revue d'Optique, mai, juin, juil. et août 1929.

[2] Sur la signification et le rôle joué par les constantes p/v, q/v, voir également *H. Bouasse*, loc. cit., Ch. XIII, p. 355 et suiv,

Tous ces rayons, y compris le principal, proviennent de la composante du rayon polarisé incident vibrant parallèlement à la direction 1. Il suffit de faire la somme de toutes ces vibrations émergentes pour obtenir la vibration résultante. Choisissons l'intensité de la composante du rayon polarisé incident comme unité d'intensité et désignons par β le coefficient de réflexion ou pouvoir réflecteur. Si les faces sont polies, ce coefficient est donné par la formule[1]:

$$\beta = (n-1)^2 : (n+1)^2 . \tag{4}$$

Les intensités des rayons émergents, y compris celle du rayon principal, sont respectivement égales à $(1-\beta)^2$, $(1-\beta)^2\beta^2$, $(1-\beta)^2\beta^4$, . . . Les amplitudes des vibrations émergentes sont égales aux racines carrées des intensités, donc à $1-\beta$, $(1-\beta)\beta$, $(1-\beta)\beta^2$, . . .

Soit d'autre part A, B deux points fixes du support du rayon considéré, situés à la distance l. Entre ces points, les chemins optiques des différents rayons qui traversent, le premier directement la lame, le second avec deux réflexions intérieures, le troisième avec quatre réflexions intérieures, etc., ont les valeurs suivantes, avant la mise en charge:

$$L_1 = l - e + n e, \qquad L_2 = l - e + 3 n e, \qquad L_3 = l - e + 5 n e, \ldots . \tag{5}$$

Désignons, en A, par $\cos \omega t$ la composante de la vibration incidente considérée, et par λ la longueur d'onde de la lumière utilisée. Les vibrations, en B, des différents rayons émergents provenant de cette composante, sont:

$$\left.\begin{aligned} &1^{er}\text{ rayon (principal):} && (1-\beta)\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l - e + n e)\right], \\ &2^{e}\text{ rayon:} && (1-\beta)\beta\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l - e + 3 n e)\right], \\ &3^{e}\text{ rayon:} && (1-\beta)\beta^2\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l - e + 5 n e)\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La vibration résultante, somme de toutes les vibrations émergentes, est donc, en B:

$$S = (1-\beta)\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l-e) - (2i+1)\frac{2\pi n e}{\lambda}\right]. \tag{7}$$

Mais on a[2]:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i\cos[\omega t - (2i+1)\delta] = I\cos(\omega t - \delta - \psi), \\ &\text{où} \\ &I^2 = \frac{1}{1 - 2\beta\cos 2\delta + \beta^2}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\beta\sin 2\delta}{1-\beta\cos 2\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Remplaçons, dans les deux premières formules (8), ωt par $\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l-e)$, δ par $\frac{2\pi n e}{\lambda}$, et ψ par $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta\sin\frac{4\pi n e}{\lambda}}{1-\beta\cos\frac{4\pi n e}{\lambda}}\right)$, puis substituons la valeur de la somme Σ ainsi obtenue dans (7), nous obtenons finalement, pour la vibration dans la direction 1 au point B, avant la mise en charge:

$$\left.\begin{aligned} &S = B\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l + (n-1)e) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta\sin\frac{4\pi n e}{\lambda}}{1-\beta\cos\frac{4\pi n e}{\lambda}}\right)\right], \\ &\text{où} \\ &B^2 = \frac{(1-\beta)^2}{1 - 2\beta\cos\frac{4\pi n e}{\lambda} + \beta^2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

est l'intensité de cette vibration.

[1] *H. Bouasse*, loc. cit., p. 137.
[2] *H. Bouasse* et *Z. Carrière*, Interférences, Delagrave, Paris, 1923, p. 12.

Par suite de la mise en charge, l'épaisseur et l'indice de réfraction varient et prennent les nouvelles valeurs e' et n_1, de sorte que la vibration émergente résultante relative à la direction 1 sera, au point B, après la mise en charge:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= B_1 \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + (n_1 - 1)\, e'\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}\right)\right], \\ \text{où} \quad B_1^2 &= \frac{(1-\beta)^2}{1 - 2\beta \cos \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda} + \beta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Compte tenu des réflexions intérieures, la variation absolue de marche Δ_1, du rayon émergent vibrant parallèlement à la direction 1, s'obtient en soustrayant la phase de la vibration (9) de celle de la vibration (10) et en divisant par $\frac{2\pi}{\lambda}$, d'où:

$$\Delta_1 = -\left[(n_1 - 1)\, e' - (n-1)\, e + \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}\right) - \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n e}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n e}{\lambda}}\right)\right]. \tag{11}$$

Mais on a, pour la variation de marche δ_1 du rayon émergent principal, d'après la première des relations (5):

$$\delta_1 = -dL_1 = -\left[(l - e' + n_1 e') - (l - e + n e)\right] = -\left[(n_1 - 1)\, e' - (n-1)\, e\right]. \tag{12}$$

En introduisant δ_1 dans la relation (11), on obtient finalement:

$$\Delta_1 = \delta_1 + \frac{\lambda}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n e}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n e}{\lambda}}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}\right)\right] \tag{13}$$

On aura de même, pour le rayon émergent vibrant parallèlement à la direction 2, en prenant maintenant l'intensité de la composante du rayon incident relatif à cette direction comme unité d'intensité:

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= B_2 \cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(l + (n_2 - 1)\, e'\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}}\right)\right], \\ \text{où} \quad B_2^2 &= \frac{(1-\beta)^2}{1 - 2\beta \cos \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda} + \beta^2}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\Delta_2 = \delta_2 + \frac{\lambda}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n e}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n e}{\lambda}}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}}{1 - \beta \cos \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}}\right)\right], \tag{15}$$

n_2, S_2, B_2, Δ_2 ayant des significations analogues à n_1, S_1, B_1, Δ_1.

Soustrayant membre à membre la relation (15) de la relation (13), on obtient, en tenant compte de (1) et en désignant par

$$\Delta_3 = \Delta_1 - \Delta_2 \tag{16}$$

la variation relative de marche des deux rayons émergents résultants, vibrant respectivement parallèlement aux directions 1 et 2:

$$\Delta_3 = \delta_3 + \frac{\lambda}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}}{1-\beta\cos\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\beta \sin \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}{1-\beta\cos\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}}\right)\right]. \tag{17}$$

Toutes les grandeurs caractérisant, avant et après la mise en charge, les deux rayons émergents, sont ainsi déterminées, compte tenu des réflexions intérieures.

Remarque. Désignons par Θ l'angle de la direction de vibration du rayon polarisé incident avec la direction 1 (fig. 1). Si, au lieu de prendre les unités choisies, on prenait l'intensité totale du rayon incident comme unité, les quantités B, B_1 et B_2 définies par les secondes des équations (9), (10) et (14) seraient à multiplier, les deux premières par $\cos\Theta$, la troisième par $\sin\Theta$.

2. Erreurs engendrées par les réflexions intérieures, lorsqu'on cherche à évaluer les tensions dans la lame en mesurant la biréfringence accidentelle. Remarquons tout d'abord que lorsqu'on détermine les directions des tensions principales, les réflexions intérieures ne sont pas une cause d'erreurs, les rayons émergents principaux et secondaires vibrant soit dans la direction 1, soit dans la direction 2.

Considérons maintenant une lame transparente, d'indice $n = 1{,}5$ (cas de l'allite CR 39 et de certains verres). La formule (4) donne pour β la valeur 0,04. Pour les autres matières utilisées en photoélasticité, l'ordre de grandeur de β reste le même. Le coefficient de réflexion est donc un petit nombre. Nous pouvons alors remplacer les relations (13), (15), (17), résolues par rapport à $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, par les formules approchées suivantes:

$$\delta_1 = \Delta_1 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda} - \sin\frac{4\pi n e}{\lambda}\right), \tag{18}$$

$$\delta_2 = \Delta_2 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda} - \sin\frac{4\pi n e}{\lambda}\right), \tag{19}$$

$$\delta_3 = \Delta_3 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda} - \sin\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}\right). \tag{20}$$

Considérons par exemple la relation (20). Δ_3 y désigne la différence relative de marche réelle des deux rayons émergents. C'est la quantité que l'on mesure, par exemple à l'aide d'un compensateur, lorsqu'on cherche à évaluer les tensions, en photoélasticité bidimensionnelle. δ_3 est par contre la différence relative de marche cherchée, celle qui est liée par une relation simple — la troisième des équations (2) — aux tensions principales σ_1, σ_2. Le deuxième terme du second membre de l'équation (20) représente donc l'erreur, due aux réflexions intérieures, que l'on commet en cherchant à évaluer δ_3. Les deuxièmes termes des membres de droite des équations (18) et (19) ont des significations analogues pour les variations absolues de marche δ_1, δ_2.

Or les sinus figurant dans les trois dernières formules peuvent prendre des valeurs quelconques, comprises entre ± 1, y compris ces limites. Ces valeurs sont d'ailleurs extrêmement sensibles aux moindres variations de l'épaisseur ou des indices, les arguments des sinus étant des nombres très grands[1]. Dans les cas les plus défavorables, les parenthèses seront égales à ± 2. Ainsi, les valeurs extrêmes des erreurs des mesures de δ_1, δ_2 et δ_3, dues aux réflexions intérieures, sont égales à $\pm \frac{\beta\lambda}{\pi}$. Ces erreurs sont très petites et le plus souvent négligeables (dans le cas de l'allite ou d'un verre $n = 1{,}5$, $\frac{\beta\lambda}{\pi} = 0{,}013\,\lambda$)[2].

On admet d'autre part que les erreurs moyennes définies dans la théorie de *Gauss* sont sensiblement égales au tiers des erreurs maxima[3]. L'erreur moyenne d'une mesure de δ_1, δ_2 ou

[1] par exemple, pour $n = 1{,}5$, $e = 6\text{ mm} = 6 \cdot 10^3\,\mu$, $\lambda = 0{,}6\,\mu$, on a $\frac{4\pi n e}{\lambda} = 188\,500$.

[2] Des erreurs analogues existent encore si la lame est placée dans un liquide de même indice, car des réflexions se produisent alors entre les faces des deux plaques de verre limitant le liquide et parallèles aux deux faces de la lame.

[3] *W. Weitbrecht*, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. I. Teil, Sammlung Göschen, 1919, p. 40. Rappelons que l'erreur moyenne d'une quelconque des mesures d'une grandeur déterminée est, par définition, la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des erreurs de chacune des mesures.

δ_3 est donc égale à $\pm \frac{\beta\lambda}{3\pi}$. Enfin, si chaque mesure est répétée et si l'on prend la moyenne arithmétique des deux mesures, procédé que nous utilisons toujours, l'erreur moyenne du résultat obtenu sera $\pm \frac{\beta\lambda}{3\pi\sqrt{2}}$. Pour l'allite ou pour un verre $n = 1{,}5$ ($\beta = 0{,}04$), cela fait assez exactement $\pm 0{,}003\,\lambda$.

C'est précisément l'erreur moyenne que donne pour δ_3 le compensateur de Bravais que nous utilisons depuis de nombreuses années dans le Laboratoire de Photoélasticité de l'E. P. F. En effet, pour toutes les éprouvettes d'allite et de verre[1] étudiées, cette erreur, calculée en partant des résultats des mesures et en appliquant la théorie de *Gauss*, a en général été trouvée comprise entre $0{,}002\,\lambda$ et $0{,}004\,\lambda$, en valeur absolue. Cette bonne coïncidence nous permet d'affirmer que la principale cause d'erreur des mesures de δ_3 faites dans notre laboratoire, réside dans les réflexions sur les faces intérieures des modèles. Cette cause ne réside donc pas dans l'appareil de mesure lui-même (compensateur de *Bravais* de grande précision).

On arrive par contre à une tout autre conclusion pour les mesures des variations absolues de marche δ_1, δ_2, qui font l'objet de la méthode purement optique[2]. Dans ce cas nous utilisons, pour déterminer ces grandeurs, un interféromètre de *Mach-Zehnder*. Pour l'allite et le verre, les erreurs moyennes des mesures (répétées) de δ_1 et δ_2 ont en général été trouvées comprises entre $0{,}015\,\lambda$ et $0{,}030\,\lambda$. Elles sont donc au moins égales à cinq fois l'erreur moyenne ($0{,}003\,\lambda$) due aux réflexions intérieures du modèle. C'est donc ici dans l'appareil de mesure lui-même, ainsi que dans les défauts éventuels de planimétrie et de parallélisme des faces du modèle, que semblent résider les principales causes d'erreur. Heureusement que toutes ces erreurs restent petites par rapport aux quantités mesurées, qui sont en général de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Dans l'utilisation de la méthode purement optique, ces erreurs peuvent être d'ailleurs en partie neutralisées, grâce à l'application de la théorie de *Gauss* à la résolution du système (2) par rapport aux inconnues σ_1 et σ_2.

Nous voulons encore examiner un point important. Les intensités des rayons, à la sortie de la lame, sont données par les secondes formules (9), (10) et (14):

$$B^2 = \frac{(1-\beta)^2}{1 - 2\beta\cos\frac{4\pi n e}{\lambda} + \beta^2}, \tag{9'}$$

$$B_1^2 = \frac{(1-\beta)^2}{1 - 2\beta\cos\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda} + \beta^2}, \tag{10'}$$

$$B_2^2 = \frac{(1-\beta)^2}{1 - 2\beta\cos\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda} + \beta^2}. \tag{14'}$$

Après la mise en charge, les intensités B_1^2 et B_2^2 des deux rayons émergents diffèrent donc entre elles, et diffèrent aussi de celle, B^2, du rayon émergent avant la mise en charge. Ces différences peuvent être relativement grandes, même si le coefficient β est petit. On le reconnaît facilement en remplaçant les relations ci-dessus par les formules approchées:

$$B^2 = (1-\beta)^2\left(1 + 2\beta\cos\frac{4\pi n e}{\lambda}\right), \tag{21}$$

$$B_1^2 = (1-\beta)^2\left(1 + 2\beta\cos\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}\right), \tag{22}$$

$$B_2^2 = (1-\beta)^2\left(1 + 2\beta\cos\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}\right), \tag{23}$$

et en remarquant que les arguments des cosinus peuvent prendre des valeurs quelconques. Si β a la valeur relativement faible de 0,04, la différence entre deux de ces trois intensités peut atteindre, en valeur absolue, $2 \cdot 2 \cdot 0{,}04 = 16\%$ de leur valeur moyenne! Il nous paraît donc nécessaire d'examiner si ces différences d'intensité peuvent avoir une certaine influence sur l'exactitude des mesures de δ_1, δ_2 et δ_3.

Commençons par la mesure de δ_3. Supposons qu'on cherche à déterminer cette grandeur à l'aide d'un compensateur, un *Bravais* par exemple, que nous admettrons très précis, d'erreur

[1] Les verres étudiés avaient en général des indices supérieurs à 1,5, mais ceci ne change aucunement nos conclusions.

[2] *H. Favre*, loc. cit., Ch. II, III et IV.

négligeable. Adoptons le schéma habituel comprenant, outre des lentilles et des diaphragmes, les appareils suivants, placés les uns à la suite des autres sur un banc d'optique: source lumineuse monochromatique, filtre ou nicol polariseur, lame (modèle) pouvant être mise sous l'action de forces agissant dans son plan moyen, compensateur dont l'axe est parallèle à la direction 1, filtre ou nicol analyseur croisé avec le polariseur, lunette d'observation du rayon sortant de l'analyseur. Le rayon traversant orthogonalement la lame et le compensateur est supposé cylindrique, de quelques dixièmes de mm de diamètre. Nous désignerons, comme précédemment, par Θ l'angle de la direction de vibration du rayon polarisé incident, avec la direction 1 (fig. 1).

Pour obtenir des expressions commodes et relativement exactes des amplitudes B_1, B_2, prenons les racines carrées des deux membres des formules (10′), (14′), puis posons

$$\eta_1 = \beta \cos \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}, \qquad \eta_2 = \beta \cos \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}, \qquad (-\beta \leq \eta_{1,2} \leq +\beta) \tag{24}$$

et développons en série les fonctions obtenues:

$$B_1 = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-2\eta_1+\beta^2}}, \qquad B_2 = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-2\eta_2+\beta^2}}. \tag{25}$$

En appliquant le développement connu:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots, \qquad (0 \leq |x| < 1)$$

limité à ses trois premiers termes, nous obtenons, en remplaçant successivement x par $2\eta_1 - \beta^2$ et $2\eta_2 - \beta^2$ et en négligeant les petits termes d'ordre supérieur au second:

$$B_1 = (1-\beta)\left(1 + \eta_1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_1^2\right), \qquad B_2 = (1-\beta)\left(1 + \eta_2 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_2^2\right) \tag{26}$$

Désignons, au point 0, par $\cos \omega t$ la vibration polarisée incidente, provenant du polariseur. Elle peut être remplacée par les deux composantes $\cos\Theta \cos\omega t$, $\sin\Theta \cos\omega t$, vibrant respectivement parallèlement aux directions 1, 2 des tensions principales σ_1, σ_2.

Après avoir traversé la lame et le compensateur, ces deux vibrations sont devenues, à un décalage de phase constant près et en supposant négligeables les pertes dans le compensateur:

$$(1-\beta)\left(1 + \eta_1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_1^2\right)\cos\Theta \cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_3 + \varepsilon)\right],$$

$$(1-\beta)\left(1 + \eta_2 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_2^2\right)\sin\Theta \cos\omega t,$$

ε désignant la variation supplémentaire de marche imposée par le compensateur.

Ces deux vibrations sont encore, la première parallèle à la direction 1, la seconde à la direction 2 Projetons-les sur l'axe de l'analyseur, croisé avec celui du polariseur, et ajoutons-les. On obtient. ainsi, à la sortie de ce dernier appareil, la vibration résultante:

$$\begin{aligned}
&(1-\beta)\left(1 + \eta_1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_1^2\right)\cos\Theta \sin\Theta \cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_3 + \varepsilon)\right] \\
&\qquad - (1-\beta)\left(1 + \eta_2 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_2^2\right)\sin\Theta \cos\Theta \cos\omega t \\
= {} &(1-\beta)\sin\Theta\cos\Theta\left\{\left(1 + \eta_1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_1^2\right)\cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_3 + \varepsilon)\right]\right. \\
&\qquad \left. - \left(1 + \eta_2 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\eta_2^2\right)\cos\omega t\right\}.
\end{aligned}$$

En appliquant la règle de Fresnel[1], on trouve sans difficulté, pour l'intensité B_3^2 de ce rayon:

$$\begin{aligned}
B_3^2 = 2(1-\beta)^2 \sin^2\Theta\cos^2\Theta &\left\{1 + \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - \beta^2\right. \\
&\left. - \left(1 + \eta_1 + \eta_2 + \frac{3}{2}\eta_1^2 + \frac{3}{2}\eta_2^2 + \eta_1\eta_2 - \beta^2\right)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta_3 + \varepsilon)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{27}$$

[1] *H. Bouasse* et *Z. Carrière*, loc. cit., p. 2.

Cette intensité s'annule pour $\Theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, résultat évident, car si l'angle Θ est égal à l'une de ces valeurs, le rayon incident traverse successivement la lame et le compensateur, en restant polarisé rectilignement. Ce rayon est donc, à la sortie, complètement éteint par l'analyseur.

Si Θ diffère des valeurs ci-dessus, l'intensité B_3^2 est en général positive. Elle ne devient rigoureusement nulle que si $\eta_1 = \eta_2$ et $\Delta_3 + \varepsilon = 0$. Au point considéré et pour un état de charge donné, η_1, η_2 et Δ_3 ont des valeurs bien déterminées. B_3^2 peut alors être considéré comme une fonction de la variation relative de marche ε du compensateur. Le coefficient du cosinus étant négatif dans la formule (27), cette fonction passe par un minimum lorsque $\Delta_3 + \varepsilon = 0$. En observant l'intensité dans la lunette et en repérant au compensateur la valeur de ε rendant B_3^2 minimum, on obtient ainsi, non pas la valeur cherchée de δ_3, mais la valeur approchée $\Delta_3 = -\varepsilon$.

Or ce minimum de l'intensité a une valeur très faible. En posant $\Delta_3 + \varepsilon = 0$ dans la formule (27), on obtient en effet:

$$(B_3^2)_{min} = (1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta (\eta_1 - \eta_2)^2 , \tag{28}$$

quantité dont la plus grande valeur s'obtient en posant $\Theta = \pi/4$, $\eta_1 = -\eta_2 = \beta$, d'où:

$$\underline{(B_3^2)_{min} \leq (1-\beta)^2 \beta^2 .} \tag{29}$$

$$\underline{\text{Si } \beta = 0{,}04 ,} \qquad \text{on a} \qquad \underline{(B_3^2)_{min} \leq 0{,}00148 ,}$$

valeur extrêmement faible, comparée à l'intensité maximum:

$$(B_3^2)_{max} \cong 4 (1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta (1 + 2\beta) \cong 1$$

(en négligeant les puissances de β supérieures à la première). La valeur quasi nulle de $(B_3^2)_{min}$ permet de déterminer Δ_3 avec la même exactitude que si ce minimum étrait rigoureusement nul.

Ainsi, les différences d'intensité des deux rayons émergeant de la lame n'ont aucune influence sur l'exactitude de la mesure de δ_3, si l'on détermine cette grandeur à l'aide d'un compensateur. La valeur obtenue pour δ_3 est encore égale à Δ_3, si l'appareil utilisé est très précis. Ce résultat confirme les conclusions que nous avons établies plus haut sur les causes d'erreur du compensateur de *Bravais* utilisé dans notre laboratoire.

Supposons maintenant qu'on cherche à déterminer δ_3 à l'aide des courbes isochromes produites par un large faisceau lumineux traversant la lame. Si l'on utilise les mêmes appareils que précédemment, mais en supprimant le compensateur, l'intensité à la sortie de l'analyseur, d'un rayon passant per un point de la lame, s'obtient en posant $\varepsilon = 0$ dans la formule (27):

$$B_3^2 = 2 (1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta \left[1 + \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - \beta^2 - \left(1 + \eta_1 + \eta_2 + \frac{3}{2}\eta_1^2 + \frac{3}{2}\eta_2^2 + \eta_1\eta_2 - \beta^2\right) \cos\frac{2\pi\Delta_3}{\lambda}\right]. \tag{30}$$

Lorsqu'on ne considère pas les réflexions intérieures (ce qui revient à poser $\eta_1 = \eta_2 = \beta = 0$ $\Delta_3 = \delta_3$), on définit les isochromes noires comme étant le lieu des points de la lame où $B_3^2 = 0$ et les isochromes brillantes comme celui des points où $B_3^2 = 4 \sin^2\Theta \cos^2\Theta$, Θ étant différent des valeurs $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \ldots$. Le long de ces courbes, $\delta_3 = \Delta_3$ est constant, égal à $k\lambda$ sur les premières et à $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ sur les secondes, k désignant un nombre entier positif, négatif ou nul. La différence $\sigma_1 - \sigma_2$ des tensions principales y est donc constante, en vertu de la troisième des équations (2).

Mais si l'on considère les réflexions intérieures, il est nécessaire de donner une autre définition des isochromes, B_3^2 ne pouvant par exemple être identiquement nul le long d'une courbe, puisque sa valeur minimum est égale à $(1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta (\eta_1 - \eta_2)^2$ et que, dans le cas général, η_1 ne peut être égal à η_2 qu'en des points isolés. Voici la définition que nous choisissons:

Imaginons que les faces de la lame soient horizontales et qu'on porte au-dessus de chaque point de la face supérieure des ordonnées égales aux valeurs (30) de l'intensité B_3^2. Les extrémités de ces ordonnées définissent une surface analogue à une surface topographique, formée ici le plus souvent de collines assez régulières et sensiblement parallèles, séparées par des vallons également réguliers. Nous appellerons isochromes noires les projections horizontales, sur la face supérieure de la lame, des thalwegs de ces vallons, et isochromes brillantes, les projections sur cette face des crêtes des collines.

Ces courbes ne jouissent plus, comme précédemment, de la propriété que l'intensité B_3^2 y est rigoureusement constante, mais elles jouissent d'une propriété générale, sur laquelle nous allons nous appuyer. Pour énoncer cette propriété, considérons par exemple un point Q d'une isochrome noire et soit n la normale à la courbe en ce point, dans le plan de la figure. En tout point voisin de Q, situé sur n d'un côté ou de l'autre de la courbe, l'intensité B_3^2 a une valeur plus grande qu'en Q. Cette propriété est en effet l'analogue d'une de celles dont jouit le thalweg. Les isochromes brillantes jouissent d'une propriété semblable.

Nous sommes maintenant à même d'énoncer un théorème important: Lorsqu'on considère les réflexions intérieures, les isochromes noires ne coïncident pas en général avec les courbes $\Delta_3 = \ldots, -2\lambda, -\lambda, 0, +\lambda, +2\lambda, \ldots$, pas plus que les isochromes brillantes ne coïncident avec les courbes $\ldots, -\frac{3\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, +\frac{\lambda}{2}, +\frac{3\lambda}{2}, \ldots$. Cette coïncidence a par contre toujours lieu si l'on néglige les réflexions intérieures

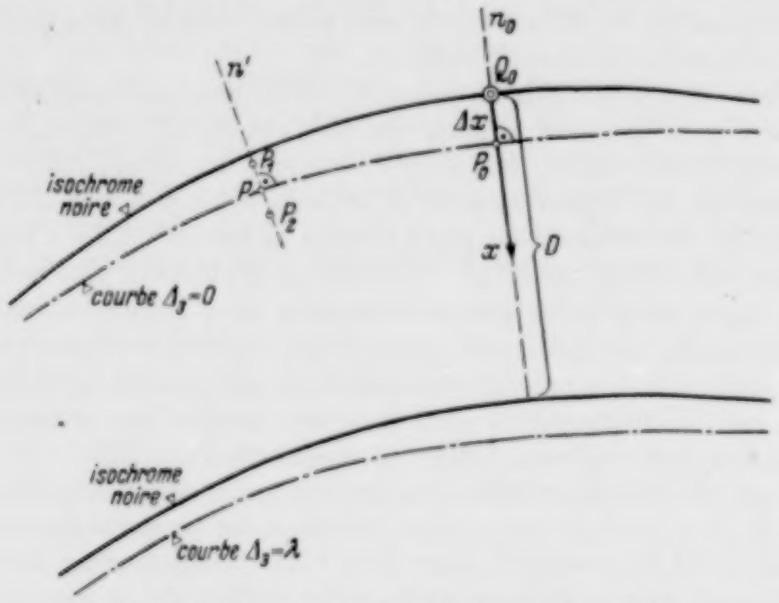


Fig. 3. Courbes $\Delta_3 = 0$, $\Delta_3 = \lambda$ et isochromes noires voisines.

Considérons en effet un point P, choisi par exemple sur la courbe $\Delta_3 = 0$ (fig. 3). Soit n' la normale en P à cette courbe. Considérons encore deux points P_1, P_2 très voisins de P, situés sur n', de part et d'autre de P et tels que $\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$. Calculons d'abord l'accroissement que subit l'intensité B_3^2, lorsqu'on passe de P en P_1. La quantité Δ_3, qui est nulle en P, prend en P_1 une valeur $d\Delta_3$ très petite, ce qui nous autorise à poser:

$$\cos \frac{2\pi\, d\Delta_3}{\lambda} \cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\, d\Delta_3}{\lambda}\right)^2.$$

Introduisons cette expression dans la formule (30), nous obtenons pour le point P_1, après simplifications et toujours en négligeant les termes d'ordre supérieur au second:

$$(B_3^2)_{P_1} = (1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta \left[(\eta_1 - \eta_2)^2_{P_1} + \left(\frac{2\pi\, d\Delta_3}{\lambda}\right)^2\right].$$

D'autre part, en P, l'intensité a la valeur:

$$(B_3^2)_P = (1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta\, (\eta_1 - \eta_2)^2_P.$$

Soustrayant ces deux valeurs, nous obtenons pour l'accroissement de l'intensité, lorsqu'on passe de P en P_1, en remarquant que $(\eta_1 - \eta_2)^2_{P_1} - (\eta_1 - \eta_2)^2_P = d(\eta_1 - \eta_2)^2$:

$$dB_3^2 = (B_3^2)_{P_1} - (B_3^2)_P = (1-\beta)^2 \sin^2\Theta \cos^2\Theta \left[d(\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}(d\Delta_3)^2\right].$$

Mais d'après la formule (20) et en se rappelant que $\delta_3 = (n_2 - n_1)\, e'$, nous avons:

$$\Delta_3 = (n_2 - n_1)\, e' + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\left(\sin\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda} - \sin\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}\right),$$

d'où, compte tenu des relations (24)[1]:

$$d\Delta_3 = (1 + 2\eta_2)\, d(n_2 e') - (1 + 2\eta_1)\, d(n_1 e').$$

[1] Un calcul plus exact de $d\Delta_3$ pourrait être fait en partant de la formule rigoureuse (17), au lieu d'utiliser la relation approchée (20). Cela ne changerait cependant aucunement nos conclusions.

D'autre part:

$$d(\eta_1-\eta_2)^2 = 2(\eta_1-\eta_2)(d\eta_1-d\eta_2) = 2(\eta_1-\eta_2)\frac{4\pi\beta}{\lambda}\left|\sin\left(\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}\right)d(n_2e') - \sin\left(\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}\right)d(n_1e')\right|$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression de dB_3^2, nous obtenons finalement:

$$dB_3^2 = (1-\beta)^2\sin^2\Theta\cos^2\Theta\left\{(\eta_1-\eta_2)\frac{8\pi\beta}{\lambda}\left|\sin\left(\frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}\right)d(n_2e') - \sin\left(\frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}\right)d(n_1e')\right| + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[(1+2\eta_2)d(n_2e') - (1+2\eta_1)d(n_1e')\right]^2\right\}. \quad (31)$$

Si P_1 est suffisamment près de P, le second terme de la parenthèse $\{\cdots\}$ sera négligeable par rapport au premier, les carrés et le produit des différentielles $d(n_1e')$, $d(n_2e')$ tendant vers zéro beaucoup plus rapidement que les différentielles elles-mêmes, lorsque P_1 se rapproche indéfiniment de P. L'expresion de B_3^2 est alors une forme linéaire de $d(n_1e')$, $d(n_2e')$, dont les coefficients ne sont nuls qu'exceptionnellement.

Or la formule (31) est aussi applicable au point P_2, où les deux différentielles sont respectivement égales, mais de signes contraires, aux valeurs qu'elles ont en P_1. Ainsi, aux deux points P_1, P_2 situés de part et d'autre de la courbe, dB_3^2 aura en général des signes contraires. Cette courbe ne jouit pas de la propriété énoncée plus haut et ne répond donc pas à la définition des isochromes noires. Aucune isochrome ne coïncide en général avec la courbe $\Delta_3 = 0$ considérée, mais une de ces isochromes doit être très voisine de cette courbe (nous calculerons plus loin une limite supérieure de la distance de ces deux lignes). La coïncidence ne peut avoir lieu qu'exceptionnellement, par exemple le long d'un axe de symétrie, par contre deux courbes voisines quelconques peuvent se couper en des points isolés. Si l'on néglige les réflexions intérieures ($\beta = 0$), le premier terme de la parenthèse $\{\cdots\}$ de (31) disparaît et seul le terme quadratique subsiste: la coïncidence des deux courbes est alors toujours réalisée, dB_3^2 étant positif en P_1 et P_2.

La démonstration est également valable pour les autres isochromes noires, voisines des courbes $\Delta_3 = \ldots, -2\lambda, -\lambda, +\lambda, +2\lambda, \ldots$. Un calcul et un raisonnement analogues permettent sans difficulté de démontrer la propriété dans le cas des isochromes brillantes.

Considérons maintenant une isochrome noire, celle voisine de la courbe $\Delta_3 = 0$ par exemple. Nous allons calculer une limite supérieure de la distance de ces deux courbes, ce qui nous donnera une limite supérieure de l'erreur — due aux différences d'intensité — que l'on commet en cherchant à mesurer Δ_3 à l'aide des isochromes. Dans ce calcul, nous ferons une supposition très défavorable. Voici en quoi elle consiste. Le long de la courbe $\Delta_3 = 0$, l'intensité B_3^2 peut varier, d'après la formule (30), entre les limites 0 et $(1-\beta)^2\beta^2$ [1]. Soit P_0 un point où l'intensité est égale à cette dernière limite, ou très voisine de celle-ci (fig. 3). Nous supposerons qu'au point Q_0 de l'isochrome voisine, situé à l'intersection de la normale n_0 à la courbe $\Delta_3 = 0$ en P_0, l'intensité soit nulle ou très voisine de zéro. Soit encore x la distance de Q_0 à un point quelconque de n_0, mesurée positivement à partir de Q_0 dans la direction de P_0. Le long de n_0, l'intensité B_3^2 est donnée approximativement par la formule:

$$B_3^2 = \frac{1}{2}\left[1-\cos\frac{2\pi x}{D}\right], \quad (32)$$

D désignant la distance des deux isochromes noires encadrant le point P_0, mesurée le long de l'axe des x. Au point P_0 d'abscisse $\Delta x = \overline{Q_0P_0}$, on a:

$$B_3^2 = (1-\beta)^2\beta^2 = \frac{1}{2}\left[1-\cos\frac{2\pi\Delta x}{D}\right] \cong \frac{\pi^2(\Delta x)^2}{D^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \underline{\frac{\Delta x}{D} = \frac{(1-\beta)\beta}{\pi}}. \quad (33)$$

Si $\beta = 0{,}04$, on aura $\Delta x/D = 0{,}0122$. En mesurant Δ_3 à l'aide des isochromes, on commettra donc une erreur maximum inférieure à $\frac{(1-\beta)\beta}{\pi}\lambda = 0{,}0122\lambda$, probablement même bien plus petite que cette limite, vu la supposition très défavorable sur laquelle est basé notre calcul. L'erreur maximum est probablement de l'ordre de quelques millièmes de longueur d'onde seulement. Elle est certainement négligeable, les isochromes permettant difficilement de repérer Δ_3 avec une exactitude supérieure à $0{,}03\lambda$.

[1] La limite 0 s'obtient en posant $\Theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \ldots$, ou encore $\eta_1 = \eta_2$, la limite $(1-\beta)^2\beta^2$, en posant $\Theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, \ldots$ et $\eta_1 = -\eta_2$.

Nous arrivons ainsi — à une nuance près — à la même conclusion que dans le cas où l'on utilise un compensateur, à savoir que les différences d'intensité des deux rayons émergeant de la lame n'ont pas d'influence sensible sur l'exactitude de la mesure de δ_3, si l'on détermine cette grandeur à l'aide des isochromes.

Passons enfin à la mesure des variations absolues de marche δ_1, δ_2. Supposons qu'on utilise, dans ce but, un interféromètre de *Jamin*, de *Mach-Zehnder* ou de *Michelson*. Chacun de ces appareils permet de mesurer successivement δ_1 et δ_2 en un point de la lame, à l'aide d'un rayon la traversant d'abord en vibrant parallèlement à la direction 1, puis parallèlement à la direction 2. On reconnaît immédiatement que l'intensité B_1^2 (ou B_2^2) du rayon émergent varie périodiquement pendant la mise en charge, conformément aux formules (22) et (23). Mais ces variations d'intensité n'entraînent aucun déplacement des franges dans la lunette d'observation de l'interféromètre. Elles engendrent seulement des variations de netteté des franges, beaucoup trop faibles pour être perceptibles. Ainsi, les variations d'intensité du rayon émergent dues aux réflexions intérieures n'ont aucune influence sur l'exactitude des mesures de δ_1, δ_2, si l'on détermine ces grandeurs à l'aide d'un interféromètre de *Jamin*, de *Mach-Zehnder* ou de *Michelson*. Les valeurs obtenues seraient respectivement égales à Δ_1, Δ_2, si la précision de ces appareils était parfaite et si la planimétrie des faces de la lame, ainsi que leur parallélisme, l'étaient également. Il serait intéressant d'examiner si cette conclusion est également applicable — ce qui est probable — aux autres dispositifs interférométriques que l'on peut imaginer pour mesurer δ_1, δ_2, par exemple à celui proposé récemment par M. *D. Post*[1], permettant de repérer les courbes le long desquelles δ_1 ou δ_2 est constant.

En résumé, nous voyons que ni les différences ni les variations d'intensité des deux rayons émergeant de la lame, dues aux réflexions intérieures, n'ont une influence sensible sur l'exactitude des mesures de δ_1, δ_2 et δ_3, du moins lorsqu'on utilise les appareils ou procédés mentionnés plus haut. Par contre, aucun de ces procédés ne permet d'éviter les erreurs dues au fait qu'à la sortie de la lame et à cause des réflexions intérieures, les différences de marche sont égales, non pas aux valeurs cherchées $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, mais aux valeurs légèrement différentes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Les valeurs extrêmes de ces erreurs, égales à $\pm \beta\lambda/\pi$, sont heureusement très faibles (de l'ordre d'un centième de longueur d'onde), donc en général négligeables.

Remarque. D'après les relations approchées (18) à (23), les valeurs extrêmes des variations effectives de marche $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et des intensités B^2, B_1^2, B_2^2 à la sortie de la lame, sont respectivement égales à:

$$\Delta_1 = \delta_1 \pm \frac{\beta\lambda}{\pi}, \qquad \Delta_2 = \delta_2 \pm \frac{\beta\lambda}{\pi}, \qquad \Delta_3 = \delta_3 \pm \frac{\beta\lambda}{\pi}, \tag{34}$$

$$B^2 = B_1^2 = B_2^2 = (1-\beta)^2 (1 \pm 2\beta). \tag{35}$$

Les résultats exprimés par ces formules peuvent être retrouvés par des raisonnements géométriques simples, en considérant uniquement l'interférence du rayon traversant directement la lame et du premier rayon émergent secondaire, provenant de deux réflexions intérieures (fig. 2). Cela revient à dire que l'approximation, sur laquelle sont basées les formules (18) à (23), consiste à négliger les rayons émergents provenant des réflexions intérieures, à l'exception du premier, qui est le plus intense.

3. Sur la possibilité de déterminer les tensions intérieures à l'aide d'une méthode interféro-photométrique, en élasticité bidimensionnelle. Considérons par exemple la première des formules:

$$B_1^2 = (1-\beta)^2 \left(1 + 2\beta \cos \frac{4\pi n_1 e'}{\lambda}\right), \tag{22}$$

$$B_2^2 = (1-\beta)^2 \left(1 + 2\beta \cos \frac{4\pi n_2 e'}{\lambda}\right). \tag{23}$$

Elle montre que si un rayon polarisé traverse une lame en vibrant parallèlement à la tension principale σ_1, l'intensité B_1^2 du rayon émergent est une fonction du produit de l'indice n_1 relatif à cette direction, par l'épaisseur e'. Imaginons maintenant qu'on fasse croître simultanément, de zéro à leurs valeurs finales, toutes les forces appliquées sur la lame. Le produit en question variera de la valeur initiale $n\,e$ à la valeur finale $n_1\,e'$. Pendant ce temps, B_1^2 passera en général par une série de maxima et de minima. Si nous représentons graphiquement la fonction $B_1^2 = f\left(\frac{2\,n_1\,e'}{\lambda}\right)$,

[1] *D. Post*, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., Vol. 13, No. 2 (1956) p. 119 et suiv.

la période de la sinusoïde obtenue sera égale à l'unité de longueur choisie pour les abscisses (fig. 4). Soit $\vartheta_1 = 2\,(n\,e - n_1\,e')/\lambda$ la différence des abscisses des points extrêmes. Elle est égale au nombre (en général fractionnaire) d'ondulations que présente cette courbe. Soit encore $\vartheta_2 = 2\,(n\,e - n_2\,e')/\lambda$ la différence analogue, relative à un rayon vibrant parallèlement à σ_2.

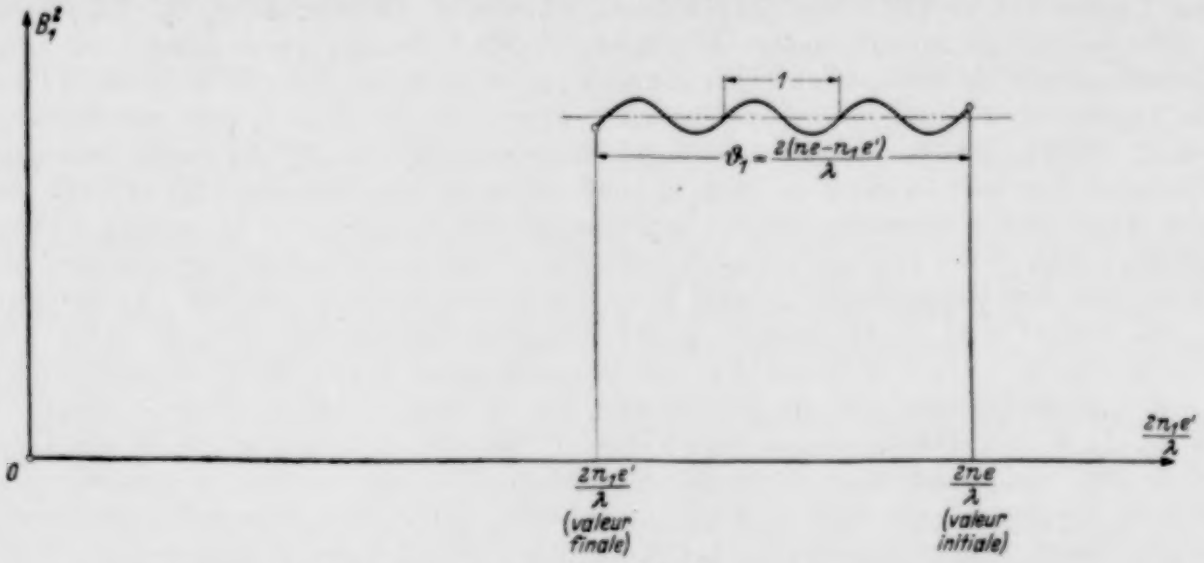


Fig. 4. Variation de l'intensité B_1^2 en fonction de $\frac{2\,n_1\,e'}{\lambda}$, pendant la mise en charge de la lame.

Une expérience sommaire de laboratoire nous a permis d'observer ces variations d'intensité. Elle a consisté à solliciter à la traction pure une lame prismatique d'allite de 1,55 mm d'épaisseur, de 15,0 mm de largeur et de 70,0 mm de longueur. L'éprouvette était recouverte d'un écran percé au centre d'un trou circulaire de 1,1 mm de diamètre, par où passait un rayon lumineux ($\lambda = 0{,}5893\,\mu$) vibrant parallèlement aux deux forces P appliquées sur les bases. On regardait l'éprouvette à l'aide d'une lunette recevant le rayon, mise au point sur la lame. En faisant croître lentement la grandeur des forces P, on observait les oscillations de B_1^2, avec quelque peine il est vrai, vu leur faible amplitude (environ $\pm 8\%$). Notons qu'en supprimant l'écran, des franges floues d'égale épaisseur optique se formaient sur toute la surface de la lame et se déplaçaient à mesure que croissaient les deux forces P. Ainsi, chaque oscillation complète de l'intensité du rayon correspondait au passage devant l'axe du trou d'une frange claire suivie d'une frange sombre. Nous avons d'ailleurs observé aussi — et même plus facilement — le même phénomène en lumière réfléchie, et l'emploi d'une telle lumière pourrait être tout aussi bien envisagé dans les applications.

La valeur absolue de chacune des quantités ϑ_1 et ϑ_2 pourrait donc être déterminée:

1. soit en comptant le nombre d'oscillations de la lumière dans la lunette, ou mieux — ce qui serait beaucoup moins fatigant — en comptant celui des oscillations d'un microampèremètre, dans lequel passerait le courant produit par une cellule photoélectrique recevant le rayon (dans ce cas, l'excédent fractionnaire de ϑ_1 ou ϑ_2 ne pourrait être évalué qu'à 0,2 unité près),

2. soit en enregistrant le diagramme de la figure 4 à l'aide d'un oscillographe cathodique, ce qui serait certainement plus excat, car les excédents fractionnaires pourraient être déterminés à 0,02 unité près (pour augmenter encore l'exactitude, on pourrait utiliser les diagrammes de B_1^2, B_2^2 représentant les formules rigoureuses (10′), (14′), au lieu de ceux relatifs aux formules approchées (22), (23)).

Quant aux signes des quantités ϑ_1 et ϑ_2, il suffirait, pour les obtenir, de partir d'un point où ils sont connus (de tels points existent toujours dans les applications), et de procéder par continuité, de proche en proche, exactement comme on le fait chaque fois qu'il s'agit d'évaluer une grandeur algébrique représentée par le déplacement de franges localisées.

Ainsi, il serait possible de mesurer ϑ_1 et ϑ_2 avec toute l'exactitude désirée dans chaque cas particulier. Mais ces deux quantités sont des formes linéaires des tensions principales σ_1, σ_2, qu'il est facile d'établir. Posons en effet successivement:

$$\vartheta_1 = \frac{2\,(n\,e - n_1\,e')}{\lambda}, \qquad (36) \qquad\qquad \vartheta_2 = \frac{2\,(n\,e - n_2\,e')}{\lambda}. \qquad (37)$$

$$n_1\,e' - n\,e = d\,(n\,e) = n\,de + e\,dn\,, \qquad (38)$$

$$dn = n_1 - n = -\,n\left[\frac{q}{v}\,\varepsilon_1 + \frac{p}{v}\,(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right], \qquad de = \varepsilon_3\,e\,, \qquad (39)$$

ε_1, ε_2, ε_3, p/v, q/v désignant respectivement les trois dilatations linéaires principales et les deux constantes de la théorie de *Neumann*[1]. En remplaçant, dans les formules (39), les dilatations par leurs expressions en fonction des tensions:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\,\sigma_2)\,, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\,\sigma_1)\,, \qquad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\,, \tag{40}$$

puis en substituant les valeurs de dn, de dans (38) et en multipliant enfin le résultat par $-2/\lambda$, on obtient, d'après (36):

$$\vartheta_1 = \frac{2\,n\,e}{E\,\lambda}\left[\nu\left(1 - 2\,\frac{p}{v}\right) + \frac{q}{v}\right]\sigma_1 + \frac{2\,n\,e}{E\,\lambda}\left[\nu\left(1 - \frac{q}{v}\right) + (1-\nu)\,\frac{p}{v}\right]\sigma_2\,;$$

d'où les expressions cherchées de ϑ_1, ϑ_2, en fonction de σ_1, σ_2:

$$\underline{\vartheta_1 = a^*\,e\,\sigma_1 + b^*\,e\,\sigma_2\,,} \qquad \underline{\vartheta_2 = b^*\,e\,\sigma_1 + a^*\,e\,\sigma_2\,,} \tag{41}$$

où

$$a^* = \frac{2\,n}{E\,\lambda}\left[\nu\left(1 - 2\,\frac{p}{v}\right) + \frac{q}{v}\right], \qquad b^* = \frac{2\,n}{E\,\lambda}\left[\nu\left(1 - \frac{q}{v}\right) + (1-\nu)\,\frac{p}{v}\right]. \tag{42}$$

Les constantes a^* et b^* de la matière utilisée se détermineront directement, par exemple à l'aide d'une éprouvette prismatique, tendue ou comprimée par deux forces axiales P connues, égales et opposées ($\sigma_1 = \pm P/F$, $\sigma_2 = 0$, F désignant l'aire de la section droite). Mais il est également possible de calculer ces constantes l'aide des formules (42), lorsqu'on connait E, ν, n, p/v, q/v, λ. Pour une lame d'allite CR 39 de 6,310 mm d'épaisseur, par exemple, nous avons trouvé, à la température de 20° C et pour $\lambda = 0{,}5461\,\mu$ (raie verte de l'arc du mercure)[2].

$$E = 248{,}9\ \mathrm{kg/mm^2}\,, \qquad \nu = 0{,}399\,, \qquad n = 1{,}502\,, \qquad \frac{p}{v} = 0{,}2902\,, \qquad \frac{q}{v} = 0{,}2544\,.$$

On en déduit, en appliquant les formules (42):

$$a^* = 9{,}32\ \mathrm{kg^{-1}\,mm}\,, \qquad b^* = 10{,}43\ \mathrm{kg^{-1}\,mm}\,. \tag{43}$$

Dans les mêmes conditions, nous avons obtenu pour un verre Schott LF 6:

$$E = 5970\ \mathrm{kg/mm^2}\,, \qquad \nu = 0{,}215, \qquad n = 1{,}577, \qquad \frac{p}{v} = 0{,}3048, \qquad \frac{q}{v} = 0{,}2114,$$

$$a^* = 0{,}2857\ \mathrm{kg^{-1}\,mm}\,, \qquad b^* = 0{,}3955\ \mathrm{kg^{-1}\,mm}\,. \tag{43'}$$

Comme il fallait s'y attendre, les valeurs des constantes a^*, b^* sont beaucoup plus petites pour le verre que pour l'allite. Cette différence d'ordre de grandeur subsiste pour les quantités ϑ_1, ϑ_2, toutes choses égales d'ailleurs. Mais si l'on reste dans le domaine de proportionnalité de chacune des deux matières en question, cette dernière différence s'atténue. Prenons par exemple $e = 1/4' = 6{,}35$ mm, $\sigma_2 = 0$, et choisissons comme limites de proportionnalité à la traction: $\sigma_1 = 0{,}5\ \mathrm{kg\,mm^{-2}}$ pour l'allite et $\sigma_1 = 2{,}5\ \mathrm{kg\,mm^{-2}}$ pour le verre. Les valeurs de ϑ_1, ϑ_2 correspondant à ces limites seront, d'après les formules (41):

$$\vartheta_1 = 29{,}60\,, \quad \vartheta_2 = 33{,}15\ \text{(allite)} \qquad \text{et} \qquad \vartheta_1 = 4{,}53\,, \quad \vartheta_2 = 6{,}28\ \text{(verre)}\,.$$

Connaissant e, a^*, b^* et ayant mesuré ϑ_1, ϑ_2, on pourrait obtenir les tensions cherchées en utilisant les expressions de σ_1, σ_2 tirées du système (41):

$$\underline{\sigma_1 = \frac{b^*\,\vartheta_2 - a^*\,\vartheta_1}{e\,(b^{*2} - a^{*2})}\,,} \qquad \underline{\sigma_2 = \frac{b^*\,\vartheta_1 - a^*\,\vartheta_2}{e\,(b^{*2} - a^{*2})}\,.} \tag{44}$$

[1] Voir *H. Bouasse*, loc. cit., Ch. XIII, ou *H. Favre*, loc. cit., Ch. II.

[2] L'indice n a été mesuré à l'aide d'un réfractomètre d'*Abbe*. Le module d'élasticité E et le nombre de Poisson ν ont été déterminés en utilisant des méthodes purement optiques, mises au point par *M. Martinola* et qui seront prochainement décrites en détail par ce dernier, dans une publication du laboratoire de Photoélasticité de l'F.P.F. (voir aussi *H. Favre* et *M. Martinola*: Sur une méthode purement optique pour la mesure du rapport du coefficient de Poisson ν au module d'élasticité E des corps isotropes transparents. C. R. des séances de l'Acad. des sc., T. 246, 1958, p. 50 et suiv.). Puis les constantes p/v, q/v ont été déduites des valeurs de E, ν, n, λ et des valeurs $a = 1{,}729$, $b = 2{,}279\ \mathrm{kg^{-1}}\,\lambda$ mm des constantes de la méthode purement optique, en utilisant les deux premières relations (3).

Mais il sera beaucoup plus exact de faire non seulement les mesures de ϑ_1, ϑ_2, mais aussi la mesure complémentaire de la variation relative de marche δ_3, à l'aide d'un compensateur, puis, en appliquant la méthode des moindres carrés de *Gauss*, de tirer les valeurs les plus probables σ_1, σ_2 du système:

$$\vartheta_1 = a^* e \sigma_1 + b^* e \sigma_2 , \qquad \vartheta_2 = b^* e \sigma_1 + a^* e \sigma_2 , \qquad \delta_3 = c e (\sigma_1 - \sigma_2) , \tag{45}$$

ce qui donnera en même temps les erreurs moyennes des valeurs obtenues.

La solution de ce système est d'ailleurs en principe la même que celle du système (3)[1]. Plus simplement, on pourra calculer σ_1, σ_2 en résolvant le système formé de la troisième des relations (45) et de l'équation obtenue en ajoutant membre à membre les deux premières de ces relations, ce qui donne[2]:

$$\underline{\sigma_1 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2 e (a^* + b^*)} + \frac{\delta_3}{2 e c}} , \qquad \underline{\sigma_2 = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2 e (a^* + b^*)} - \frac{\delta_3}{2 e c}} . \tag{46}$$

Il va de soi que l'application de la méthode en question nécessiterait la détermination préalable, entre filtres ou nicols croisés, des directions 1, 2 des tensions principales σ_1, σ_2, en chaque point où l'on veut obtenir ces tensions.

Remarques. 1. On pourrait également mesurer ϑ_1, ϑ_2 à l'aide d'un compensateur, par exemple d'un prisme de même matière et de même épaisseur que la lame, sur lequel seraient appliquées deux forces P axiales, égales et de sens contraires, dont on ferait varier la grandeur de façon que l'intensité résultante reste constante pendant la mise en charge de la lame.

2. L'amplitude 2β des oscillations de l'intensité du rayon pourrait être augmentée à volonté, si on le jugeait nécessaire, en recouvrant les deux faces de la lame d'une mince couche augmentant le pouvoir réflecteur.

3. Au lieu d'employer un rayon lumineux monochromatique, choisi dans la partie visible du spectre, rien n'empêcherait d'utilisier une radiation infra-rouge ou une radiation ultra-violette, puisqu'il s'agirait en définitive d'observer les variations de l'intensité B_3^2 d'un rayon[3]. On pourrait donc choisir la longueur d'onde λ utilisée pour les expériences, dans un domaine beaucoup plus vaste que dans les autres méthodes de photoélasticité.

4. La méthode interféro-photométrique pourrait être, en principe, également appliquée à l'étude de la répartition des moments dans les plaques fléchies, en utilisant des modèles formés de deux couches de matières différentes et en faisant interférer les rayons réfléchis sur l'une des faces de la lame et sur la surface de séparation des couches. Cette méthode pourrait aussi être appliquée à la résolution de certains problèmes de flexion des coques, mais il s'agirait là d'expériences plus délicates, surtout lorsqu'on quitte le domaine des cas simples.

5. Les équations (41) et (42) établies plus haut sont celles qui devraient être utilisées si l'on cherchait à appliquer la méthode interférométrique de *Ch. Fabry*, dont nous avons parlé dans l'introduction de ce mémoire. Cela n'a rien d'étonnant, car les deux méthodes ont ceci de commun qu'elles cherchent à déterminer les tensions en mesurant — il est vrai par des procédés totalement différents — les mêmes grandeurs, à savoir les variations de l'épaisseur optique $n\,e$ de la lame.

En terminant, l'auteur remercie ses deux assistants de recherche, MM. *W. Schumann*, Dr. ès Sc. nat. et *M. Martinola*, Ing. civ. dipl., de leur collaboration à ce travail.

[1] Pour les détails de la solution de ce dernier système et la discussion des résultats, voir *H. Favre*, Sur l'application de la théorie des erreurs à la résolution d'un système d'équations utilisé en Photoélasticité. Revue d'Optique théor. et instrum., juin 1955. Remarquons qu'en vertu des relations (42) et de la troisième des formules (3), on a $a^* - b^* = 2\,c/\lambda$, d'ou $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\,\delta_3/\lambda$.

[2] Comme nous l'avons démontré p. 315 du mémoire cité dans la note précédente, la solution (46) revient à négliger l'erreur de δ_3, ce qui est autorisé si l'on utilise un compensateur très précis.

[3] De telles variations ont déjà été utilisées dans le cas d'une lame d'air, pour déterminer les longueurs d'onde de radiations infra-rouges (voir *H. Bouasse* et *Z. Carrière*, loc. cit., Ch. XII, § 200).

(Eingegangen am 23. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Favre*, Zurich, École polytechnique fédérale, Chaire de Mécanique.

Nicht-lineare Biegungsschwingungen des Kreisringes

Von **Karl Federhofer**

Wenn bei Berechnung der Eigenschwingungen eines dünnen elastischen Kreisringes anstatt des linearen *Hooke*schen Gesetzes ein nichtlineares Elastizitätsgesetz zugrunde gelegt wird, so entstehen im allgemeinen nichtlineare Schwingungen, deren Untersuchung in gleicher Weise erfolgen kann, wie dies *R. Grammel*[1] an den Beispielen der Torsionsschwingungen eines kreiszylindrischen Stabes und der Biegeschwingungen eines geraden prismatischen Stabes gezeigt hat.

Nichtlineare Schwingungen eines Kreisringes ergeben sich aber auch bei Beibehaltung des *Hooke*schen Gesetzes, wenn die übliche Voraussetzung kleiner Schwingungsausschläge, d. h. die Beschränkung auf lineare Ausdrücke der Formänderungsgrößen in den Grundgleichungen fallen gelassen wird, also die Endlichkeit der Verformungen berücksichtigt wird. Eine Lösung der Schwingungsgleichungen des Kreisringes für endliche Schwingweiten ist nicht bekannt; man erhält aber eine Näherung für diese Lösung, wenn in den Bewegungsgleichungen neben den Gliedern klein 1. Ordnung auch die kleinen Glieder 2. Ordnung beibehalten werden. Im folgenden soll eine solche nichtlineare Schwingungsrechnung für die ebenen Biegungsschwingungen eines elastischen Kreisringes durchgeführt werden.

1. Schwingungsgleichungen. Bedeutet a den Ringhalbmesser, $u(\varphi, t)$ die radiale, zum Kreismittelpunkte positiv gerichtete Verschiebung, $w(\varphi, t)$ die in der Kreistangente im Sinne wachsender Bogenlänge $s = a \cdot \varphi$ positive Verschiebung, so ist der Punkt $P(\varphi)$ des Kreisringes nach der Verschiebung in die Lage $P'(\varphi)$ gelangt mit den Koordinaten

$$x = (a - u) \cdot \cos\varphi - w \cdot \sin\varphi \,,$$
$$y = (a - u) \cdot \sin\varphi + w \cdot \cos\varphi \,,$$

so daß sich das Bogenelement $d\sigma$ der deformierten Ringachse berechnet zu

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(1 + \frac{w^{\mathrm{I}} - u}{a}\right)^2 + \left(\frac{w + u^{\mathrm{I}}}{a}\right)^2 ,$$

worin römische Zahlen die Ableitungen nach φ bedeuten.

Hieraus folgt für die Dehnung der Ringachse an der Stelle φ

$$\varepsilon = \frac{d\sigma}{ds} - 1 = \frac{w^{\mathrm{I}} - u}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{w + u^{\mathrm{I}}}{a}\right)^2 . \tag{1}$$

Die Krümmung $1/\varrho$ der deformierten Ringachse ergibt sich aus

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{x^{\mathrm{I}} \cdot y^{\mathrm{II}} - x^{\mathrm{II}} \cdot y^{\mathrm{I}}}{a^3 \cdot \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^3}$$

zu

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(1 + \frac{w^{\mathrm{I}} - u}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{u^{\mathrm{II}} - u + 2\,w^{\mathrm{I}}}{a}\right) - \frac{w + u^{\mathrm{I}}}{a} \cdot \frac{w^{\mathrm{II}} - w - 2\,u^{\mathrm{I}}}{a}}{\left[\left(1 + \frac{w^{\mathrm{I}} - u}{a}\right)^2 + \left(\frac{w + u^{\mathrm{I}}}{a}\right)^2\right]^{3/2}}$$

oder bei Fortlassung der kleinen Glieder von höherer als 2. Ordnung zu

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\left[1 + \frac{u + u^{\mathrm{II}}}{a} + \frac{1}{a^2}\left\{(u - w^{\mathrm{I}})\,(u + w^{\mathrm{I}} + 2\,u^{\mathrm{II}}) + (u^{\mathrm{I}} + w)\left(\frac{u - w^{\mathrm{I}}}{2} - w^{\mathrm{II}}\right)\right\}\right] . \tag{2}$$

Mit den Spannungsresultanten N = Normalkraft, Q = Querkraft, M = Biegemoment und den in den Richtungen u, w je Längeneinheit des Ringes wirkenden Lasten p_u, p_w ergeben sich für das Gleichgewicht des deformierten Ringelementes $d\sigma$ die Bedingungen

$$\frac{\partial Q}{\partial\sigma} + \frac{N}{\varrho} + p_u = 0 \,, \quad \frac{\partial N}{\partial\sigma} - \frac{Q}{\varrho} + p_w = 0 \,, \quad \frac{\partial M}{\partial\sigma} + Q = 0 \,. \tag{3}$$

[1] Actes du Colloque Intern. des vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles 1951, sowie Anniversary Volume on Applied Mechanics, dedicated to *C. B. Biezeno.* (1953), S. 108—118.

Ersetzt man die äußeren Lasten p_u, p_w durch die *d'Alembert*schen Trägheitswiderstände in radialer und tangentialer Richtung:

$$p_u = -\mu_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\mu_1 \cdot \ddot{u}\,, \quad p_w = -\mu_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\mu_1 \cdot \ddot{w}\,,$$

worin μ_1 die Masse des Ringes je Längeneinheit bedeutet, und verzichtet man auf die Berücksichtigung der für die Grundschwingung unbedeutenden rotatorischen Trägheit, so liefern obige Gleichungen

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{N}{\varrho} - \mu_1 \cdot \ddot{u} = 0\,, \quad \frac{\partial N}{\partial \sigma} + \frac{Q}{\varrho} - \mu_1 \cdot \ddot{w} = 0\,, \quad \frac{\partial M}{\partial \sigma} + Q = 0\,. \tag{4}$$

Nun gilt für das Biegemoment M mit $B = E\,F\,i^2$ als Biegungssteifigkeit

$$M = B \cdot \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a}\right) = \frac{B}{a}\,(\xi_1 + \xi_2)\,, \tag{5}$$

worin gemäß Gl. (2)

$$\xi_1 = \frac{u + u^{II}}{a}\,, \qquad \text{(klein 1. Ordnung)}, \tag{6}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{a^2}\left[(u - w^I)\,(u + w^I + 2\,u^{II}) + (u^I + w)\left(\frac{u^I - w}{2} - w^{II}\right)\right]. \qquad \text{(klein 2. Ordnung).} \tag{7}$$

Aus $\partial\sigma = (1 + \varepsilon)\,\partial s$ folgt wegen $\partial s = a \cdot \partial\varphi$

$$\partial\sigma = a \cdot \partial\varphi\,(1 + s_1 + s_2)$$

wo gemäß (1):

$$s_1 = \frac{w^I - u}{a} \qquad \text{(klein 1. Ordnung)}\,, \tag{8}$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{w + u^I}{a}\right)^2 \qquad \text{(klein 2. Ordnung)}\,. \tag{9}$$

Hiermit werden die Gleichungen (4) übergeführt in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{a \cdot \partial\varphi\,(1 + s_1 + s_2)} + \frac{N}{a}\,(1 + \xi_1 + \xi_2) &= \mu_1 \cdot \ddot{u}\,, \\ \frac{\partial N}{a \cdot \partial\varphi\,(1 + s_1 + s_2)} - \frac{Q}{a}\,(1 + \xi_1 + \xi_2) &= \mu_1 \cdot \ddot{w}\,, \\ \frac{\partial M}{a \cdot \partial\varphi\,(1 + s_1 + s_2)} + Q \quad &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt bei Beachtung von (5)

$$Q = -\frac{B}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + s_1 + s_2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial\varphi}\right),$$

oder bis auf Glieder klein 2. Ordnung genau

$$Q = -\frac{B}{a^2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial \xi_2}{\partial\varphi} - s_1\,\frac{\partial \xi_1}{\partial\varphi}\right),$$

somit

$$Q = Q_1 + Q_2\,,$$

wenn

$$Q_1 = -\frac{B}{a^2} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial\varphi} \qquad \text{(1. Ordnung)}\,, \tag{11a}$$

$$Q_2 = -\frac{B}{a^2}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial\varphi} - s_1\,\frac{\partial \xi_1}{\partial\varphi}\right) \qquad \text{(2. Ordnung)}\,. \tag{11b}$$

Setzt man $N = N_1 + N_2$, worin die Zeiger die Kleinheitsordnung angeben, so lassen sich die Gleichungen (10) einschließlich der kleinen Glieder 2. Ordnung überführen in

$$\left(\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} + N_1\right) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} - s_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} + N_2 + \xi_1 N_1\right) = a \mu_1' \ddot{u}\,, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial \varphi} - Q_1\right) + \left(\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - s_1 \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} - Q_2 - \xi_1 Q_1\right) = a \mu_1 \ddot{w}\,, \tag{13}$$

oder mit den Abkürzungen

$$\Theta_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} - s_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} + N_2 + \xi_1 N_1\,, \tag{14}$$

$$\Omega_2 = \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - s_1 \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} - Q_2 - \xi_1 Q_1 \tag{15}$$

in die folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} + N_1 = a \mu_1 \ddot{u} - \Theta_2\,, \quad \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} - Q_1 = a \mu_1 \ddot{w} - \Omega_2\,. \tag{16}$$

Durch Beseitigung von N_1 entsteht

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \varphi^2} + Q_1 + a \mu_1 \ddot{w} = a \mu_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \varphi} - \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varphi} + \Omega_2\,,$$

oder bei Beachtung der Gleichungen (11a) und (6)

$$(u^{V} + 2\,u^{III} + u^{I}) - \frac{\mu_1 a^4}{B} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + H_2 = 0\,, \tag{17}$$

worin

$$H_2 = \frac{a^3}{B}\left(\Omega_2 - \frac{\partial \Theta_2}{\partial \varphi}\right). \tag{18}$$

Für die Normalkraft N gilt

$$N = E F \varepsilon = N_1 + N_2\,,$$

worin wegen (1):

$$N_1 = \frac{E F}{a}(w^{I} - u)\,, \tag{19a}$$

$$N_2 = \frac{E F}{2 a^2}(w + u^{I})^2\,. \tag{19b}$$

Hiermit geht Gleichung (16_1) über in

$$a \mu_1 \ddot{u} - \Theta_2 - \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} = \frac{E F}{a}(w^{I} - u)\,,$$

oder mit Beachtung der Gleichung (11a) in

$$(w^{I} - u) - \frac{i^2}{a^2}(u^{IV} + u^{II}) - \frac{\mu_1 a^2}{E F}\ddot{u} + G_2 = 0\,, \tag{20}$$

worin

$$G_2 = \frac{a}{E F}\Theta_2\,. \tag{20a}$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$c_1 = \frac{\mu_1 a^4}{B}\,, \quad \alpha = \frac{i^2}{a^2}\,,$$

wonach

$$\frac{\mu_1 a^2}{E F} = \alpha \cdot c_1\,, \tag{21}$$

lauten daher die gekoppelten Schwingungsgleichungen für u, w:

$$(u^{V} + 2\,u^{III} + u^{I}) - c_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(w - u^{I}) + H_2 = 0 \tag{22}$$

$$(w^{I} - u) - \alpha\,(u^{IV} + u^{II}) - \alpha\, c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G_2 = 0\,, \tag{23}$$

worin $H_2(\varphi, t)$, $G_2(\varphi, t)$ von φ und t abhängige Funktionen klein 2. Ordnung sind. Durch Differentiation der Gleichung (22) nach φ und Verwertung der Gleichung (23) wird w eliminiert und es ergibt sich für u die Differentialgleichung der Biegungs-Dehnungsschwingungen des Kreisringes:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \varphi^6} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - c_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{u + \alpha\left(\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) + \alpha\, c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - G_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi} = 0\,, \tag{24}$$

oder mit

$$S(\varphi, t) = -\left(c_1 \frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} + \frac{\partial H_2}{\partial \varphi}\right) \tag{25}$$

$$(u^{\mathrm{VI}} + 2\,u^{\mathrm{IV}} + u^{\mathrm{II}}) - c_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{u - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \alpha\,(u^{\mathrm{IV}} + u^{\mathrm{II}}) + \alpha\, c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = S(\varphi, t)\,, \tag{26}$$

oder kurz

$$L(u) = S(\varphi, t)\,. \tag{26a}$$

Für das Rechtsglied in Gleichung (26) ergibt sich gemäß Gleichung (25) mit Verwertung von (20a) und (18)

$$-S(\varphi, t) = \left(\frac{c_1\, a}{E\, F} - \frac{a^3}{B}\right)\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \varphi^2} + \frac{a^3}{B}\cdot\frac{\partial \Omega_2}{\partial \varphi}\,,$$

oder mit Beachtung der Gleichungen (14) und (15)

$$\begin{aligned} -S(\varphi, t) = &\left(\frac{c_1\, a}{E\, F} - \frac{a^3}{B}\right)\left[\frac{\partial^3 Q_2}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(s_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(\xi_1 N_1)\right] \\ &+ \frac{c_1\, a}{E\, F}\cdot\frac{\partial^2 N_2}{\partial \varphi^2} - \frac{a^3}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[s_1 \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} + Q_2 + \xi_1 Q_1\right]. \end{aligned} \tag{25a}$$

Da die Verschiebungen u, w und ihre Ableitungen in den Ausdrücken für Q_2 und N_2 quadratisch und in Produkten vorkommen, und das gleiche auch für $s_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi}$, $\xi_1 N_1$ und für $s_1 \frac{\partial N_1}{\partial \varphi}$, $\xi_1 Q_1$ gilt, so ist $S(\varphi, t)$ klein II. Ordnung, und demnach Gleichung (26) nicht linear.

2. Näherungslösung der Gleichung (26). Mit Unterdrückung der kleinen Glieder 2. Ordnung, d. h. $S(\varphi, t) = 0$, wird die dann homogene Gleichung (26a) befriedigt durch den Produktansatz

$$u(\varphi, t) = C \cdot \cos n\varphi \cdot \cos \omega t\,, \tag{27}$$

worin n beim geschlossenen Kreisring eine ganze Zahl größer als Eins sein muß, und ω die Kreisfrequenz der Eigenschwingung bedeutet. Für den dimensionslosen Wert

$$k = c_1\, \omega^2 = \frac{\mu_1\, a^4\, \omega^2}{B} \tag{28}$$

ergibt sich durch Eintragung des Ansatzes (27) in die homogene Gleichung (26) die bekannte Frequenzengleichung

$$\alpha\, k^2 - k\,(n^2 + 1)\,(\alpha \cdot n^2 + 1) + n^2\,(n^2 - 1)^2 = 0\,, \tag{29}$$

welche die Berechnung der zu den ganzen Zahlen $n \geqq 2$ gehörigen Werte k und hiermit gemäß Gleichung (28) jene der Kreisfrequenzen ω gestattet. Wegen der Kleinheit von α sind die beiden Wurzeln dieser Gleichung von sehr verschiedener Größenordnung; die kleinere von beiden ist

$$k_1 = \frac{n^2\,(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)\,(\alpha\, n^2 + 1)}\,, \tag{30}$$

die zweite ist von der Größenordnung $1/\alpha$ und hat den Wert

$$k_2 = \left(n^2 + \frac{1}{\alpha}\right)(n^2 + 1) - k_1\,. \tag{31}$$

Für die tangentiale Schwingungskomponente $w(\varphi, t)$ liefert die Gleichung (23) mit dem Ansatze $w(\varphi, t) = D \cdot \sin n\varphi \cdot \cos \omega t$ und mit (27)

$$D = C\,\frac{1 + \alpha\, n^2\,(n^2 - 1) - \alpha \cdot k}{n} = C \cdot \beta\,, \tag{32}$$

demnach für die Grundschwingung mit $n = 2$ und $k = \frac{36}{5\,(1 + 4\,\alpha)}$:

$$\beta = \frac{5 + 44\,\alpha + 240\,\alpha^2}{10\,(1 + 4\,\alpha)} \cong \frac{1}{2} + 2{,}4\,\alpha\,.$$

Zum Zwecke der Verbesserung der in erster Näherung gültigen Lösung $u_0(\varphi, t) = C \cdot \cos n\,\varphi \cdot \cos \omega\,t$ der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (26) führen wir u_0 und $w_0 = \beta\,C \cdot \sin n\,\varphi \cdot \cos \omega\,t$ anstelle von u und w in das durch (25a) dargestellte Störungsglied $S(\varphi, t)$ ein; hiermit ergibt sich

$$S(\varphi, t) = 2\,k\,p_1 \cos 2\,\omega\,t - n\,p_2 \cos 2\,n\,\varphi + (2\,k\,p_3 - n\,p_2) \cdot \cos 2\,n\,\varphi \cdot \cos 2\,\omega\,t\,,$$

worin

$$2\,k\,p_1 = A_1 = \frac{C^2}{a}\,2\,k\,(p_{1,0} + \alpha\,p_{1,1} + \alpha^2\,p_{1,2})\,,$$

$$n\,p_2 = A_2 = \frac{C^2}{a}\,n\,(p_{2,0} + \alpha\,p_{2,1} + \alpha^2\,p_{2,2})\,,$$

$$2\,k\,p_3 - n\,p_2 = A_3 = \frac{C^2}{a}\,2\,k\,(p_{3,0} + \alpha\,p_{3,1} + \alpha^2\,p_{3,2} + \alpha^3\,p_{3,3}) - A_2\,.$$

Für die mit verschiedenen Zeigern versehenen p-Werte gilt mit

$$\vartheta = n^2\,(n^2 - 1) - k:$$

$$p_{1,0} = \frac{(n^2 - 1)^2}{4\,n^2}\,, \quad p_{1,1} = -\frac{(n^4 - 1)\,\vartheta}{2\,n^2}\,, \quad p_{1,2} = \frac{1}{4\,n^2}\,[\vartheta^2 + 2\,n^4\,(n^2 - 1)\,\vartheta]\,,$$

$$p_{2,0} = \frac{(3\,n^2 - 1)\,(n^2 - 1)^2}{2\,n} - n\,(n^2 - 1)\,\vartheta\,, \quad p_{2,1} = \frac{n\,\vartheta}{2}\left[\vartheta + \frac{n^2 - 1}{n^2}\,(30\,n^4 - 15\,n^2 + 2)\right],$$

$$p_{2,2} = -\frac{(4\,n^2 - 1)^2}{2\,n}\,\vartheta^2\,,$$

$$p_{3,0} = -\frac{(n^2 - 1)^2}{4\,n^2} = -\,p_{1,0}\,, \quad p_{3,1} = (n^2 - 1)^2\left(1 - \frac{\vartheta}{2\,n^2}\right), \quad p_{3,2} = -\,\vartheta\left[\frac{\vartheta}{4\,n^2} - (n^2 - 1)\,\frac{15}{2}\,n^2\right],$$

$$p_{3,3} = -\,\vartheta^2\,(4\,n^2 - 1)\,.$$

Setzen wir nun in Gleichung (26a): $u \equiv u_0 + u_1$, wo u_1 die Verbesserung von u_0 angibt, so entsteht wegen $L(u_0) = 0$:

$$L(u_1) = A_1 \cos 2\,\omega\,t - A_2 \cos 2\,n\,\varphi + A_3 \cos 2\,n\,\varphi \cdot \cos 2\,\omega\,t$$

mit der Lösung

$$u_1(\varphi, t) = B_1 \cos 2\,\omega\,t + B_2 \cos 2\,n\,\varphi + B_3 \cos 2\,n\,\varphi \cdot \cos 2\,\omega\,t\,,$$

worin

$$B_1 = \frac{A_1}{4\,k\,(1 - 4\,\alpha\,k)} = b_1\,\frac{C^2}{a}\,,$$

$$B_2 = \frac{A_2}{4\,n^2\,(4\,n^2 - 1)^2} = b_2\,\frac{C^2}{a}\,,$$

$$B_3 = \frac{-\,A_3}{4\,n^2\,(4\,n^2 - 1)^2 - 4\,k\,[4\,n^2 + 1 - 4\,\alpha\,\{k - n^2\,(4\,n^2 - 1)\}]} = b_3\,\frac{C^2}{a}\,,$$

so daß sich die Lösung der Gleichung (26) einschließlich der kleinen Glieder 2. Ordnung darstellen läßt durch

$$u(\varphi, t) = a\left[\frac{C}{a} \cdot \cos n\,\varphi \cdot \cos \omega\,t + \left(\frac{C}{a}\right)^2 (b_1 \cos 2\,\omega\,t + b_2 \cos 2\,n\,\varphi + b_3 \cdot \cos 2\,n\,\varphi \cdot \cos 2\,\omega\,t)\right]. \quad (33)$$

Bei Beibehaltung der kleinen Glieder von höherer als der 2. Ordnung würde sich für die radiale Schwingungsamplitude $u(\varphi, t)$ eine nach Potenzen von C/a fortschreitende Reihe mit periodischen Koeffizienten ergeben.

Die folgende Tabelle enthält die für die Grundschwingung ($n = 2$) und für die folgenden Oberschwingungen ($n = 3$ und 4) gerechneten Beiwerte b_1, b_2, b_3 in Gleichung (33) mit den Annahmen $\alpha = \frac{i^2}{a^2} = 0$, $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{300}$; für den Ring mit rechteckigem Querschnitte von der Dicke d ist

$\alpha = \frac{d^2}{12\,a^2}$, es entspricht demnach dem Werte $\alpha = \frac{1}{300}$ ein Wert $\frac{d}{a} = \frac{1}{5}$, also ein verhältnismäßig dicker Ring. Die Tabelle zeigt, daß selbst für Amplituden C, die nicht mehr sehr klein gegenüber dem Ringhalbmesser sind, die durch die Beiwerte b_1, b_2, b_3 gegebenen Beiträge der Glieder klein 2. Ordnung in Gleichung (33) ganz unbedeutend sind, so daß für den angegebenen Wertebereich

Tabelle der Beiwerte b_1, b_2, b_3 in Gleichung (33).

Beiwert b_1.

n	$\alpha = i^2/a^2$		
	0	1/1000	1/300
2	0,281	0,285	0,294
3	0,889	1,111	3,510
4	1,758	9,905	—0,837

Beiwert b_2.

n	$\alpha = i^2/a^2$		
	0	1/1000	1/300
2	—0,0023	—0,0013	+0,0051
3	—0,0046	—0,0044	+0,0054
4	—0,0059	—0,00036	+0,0149

Beiwert b_3.

n	$\alpha = i^2/a^2$		
	0	1/1000	1/300
2	0	0,00096	0,00320
3	0	0,00364	0,01205
4	0	0,00774	0,02548

von α die Theorie 1. Ordnung ausreicht. Bei Berücksichtigung der zweiten Näherung tritt aber zur Schwingung mit der Wellenzahl n und der ihr nach den Gleichungen (28) u. (30) zugehörigen Kreisfrequenz ω auch schon eine Oberschwingung mit der doppelten Wellenzahl und mit doppelter Kreisfrequenz, deren Amplitude aber nur von der Größenordnung $\left(\frac{C}{a}\right)^2 \cdot b_3$ ist, während $\frac{C}{a}$ jene der 1. Näherung angibt.

(Eingegangen am 20. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *K. Federhofer*, Graz, Charlottendorfgasse 11.

Bending Impact Waves in Beams

By **W. Flügge** and **E. E. Zajac**

1. Introduction. *Lamb*[1] pointed out in 1914 that the elementary beam vibration equation due to *Bernoulli* and *Euler*

$$E\,I\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varrho\,A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

($E\,I$ = bending rigidity, $\varrho\,A$ = mass per unit length, w = deflection, x, t = space and time coordinates) is inadequate for impact type loadings. He showed that this equation gave the physically untenable result that the effect of a suddenly applied load propagates infinitely rapidly, a fact which was already evident from *Boussinesq*'s classical solutions. *Timoshenko*[2] later (1921) proposed refining the *Bernoulli-Euler* theory by incorporating both *Rayleigh*'s correction for rotatory inertia and the correction for shear deflection which had been applied in the static stress analysis of thick beams. One of the present authors[3] showed in 1942 that *Timoshenko*'s theory predicted that a suddenly-applied disturbance would in fact propagate with a finite velocity, and hence was free of the objection of the elementary theory. While mathematically more complicated than the elementary theory, *Timoshenko*'s theory was still much simpler than the full linear threedimensional elastic theory, and thus gave hope of being a suitable engineering basis for impact design. In recent years, experiments have indicated that the theory is valid for quite sharp impacts[4–6]. At the same time, a number of analytic and numerical studies of the *Timoshenko* theory's differential equations have been published [6–12].

On the analytical side, the first attempts at a solution, were by *Uflyland*[8]. He derived a solution in terms of real definite integrals from the contour inversion integral of *Laplace* transform theory. Since then the efforts at analytical solutions have been heavily slanted in the same direction. Unfortunately the numerical evaluation of the real integrals one obtains in this way is difficult, requiring high-speed electronic computers. Direct numerical methods have consisted of the use of finite difference equations written along the characteristics of the differential equations of the theory[6,7,11]. Because there are two sets of such characteristics, and because of error propagation problems, these procedures require considerable computing power also. The purpose of this paper is to indicate other methods of solution, the numerical work of which can be carried out on a desk calculator. Although none of the methods yields a complete solution at all points of the beam, the combination of all of them gives the solution almost completely.

Specifically, we first indicate a solution obtained by the use of a shifting theorem from *Laplace* transform theory together with the expansion of the resulting transform in powers of $1/s$ and term-by-term inversion. Although both of these ideas are old in the operational calculus, they do not seem to have been applied to the *Timoshenko* beam heretofore. They yield the power series solution, which is convenient for computing the response in the neighborhood of the origin in the (x, t) plane, and in addition, the solution at the leading wave front in terms of a rapidly convergent series of *Bessel* functions. Next, we indicate how near the point of impact the integral obtained from the contour integration technique can be evaluated for large times to give an asymptotic solution. Finally, we apply the classical stationary phase method of *Kelvin* to obtain an asymptotic solution in time over the entire beam. Numerical results computed by means of these so-

[1] *H. Lamb*, Proc. Roy. Soc., series A. 93 (1917) pp. 223—251.
[2] *S. Timoshenko*, Phil. Mag., series 6, 41 (1921) pp. 744—746.
[3] *W. Flügge*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) pp. 312—318.
[4] *M. Goland*, *P. D. Wickersham* and *M. A. Dengler*, J. Appl. Mech. 22 (1955) pp. 1—7.
[5] *E. A. Ripperger* and *H. N. Abramson*, J. Appl. Mech. 24 (1957) pp. 431—434.
[6] *H. J. Plass*, J. Appl. Mech. 25 (1958) pp. 379—385.
[7] *H. Schirmer*, Ing. Arch. 20 (1952) pp. 247—257.
[8] *Ya. S. Uflyand*, Prik. Mat. Mekh. 12 (1948) pp. 287—300.
[9] *M. A. Dengler* and *M. Goland*, Proc. First U. S. Congr. Appl. Mech., p. 179.
[10] *J. Micklowitz*, NAVORD Report 2049 (1953).
[11] *R. W. Leonard* and *B. Budiansky*, NACA Tech. Note 2874 (1953).
[12] *B. A. Boley* and *C. C. Chao*, J. Appl. Mech. 22 (1955) pp. 579—586.

lutions are given for the specimen problem of a step-function bending moment applied at the hinge of a semi-infinite, simply-supported beam.

2. Formulation of the Specimen Problem. Fig. 1 is a force diagram of a differential element of the *Timoshenko* theory. Equilibrium considerations give

$$Q_x = \varrho\, A_i\, w_{tt}\,, \qquad M_x = Q - \varrho\, I_i\, \psi_{tt}\,, \tag{1a, b}$$

where the subscripts x and t indicate differentiation with respect to x and time t, $\varrho\, A_i$ = mass per unit length, and $\varrho\, I_i$ = mass moment of inertia per unit length. *Hooke's* law and the kinematic assumption that plane cross-sections remain plane yield in turn

$$M = -E\, I_e\, \psi_x\,, \qquad Q = G\, A_s\, (w_x - \psi) \tag{1c, d}$$

where E and G are the *Young's* and shear moduli respectively, I_e is the elastic moment of inertia (not necessarily equal to I_i), and A_s is an "effective shear area" (not necessarily equal to A_i). Eqs. (1) represent the basic differential equations of the *Timoshenko* theory. By elimination, one can reduce eqs. (1) to a single fourth-order equation. In terms of the deflection w this is

$$w_{xxxx} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\right) w_{xxtt} + \frac{1}{c_1^2\, c_2^2}\, w_{tttt} + K\, w_{tt} = 0 \tag{2a}$$

while the bending moment in terms of w is

$$M = -E\, I_e \left(w_{xx} - \frac{1}{c_2^2}\, w_{tt}\right) \tag{2b}$$

$$\left(c_1^2 = \frac{E\, I_e}{\varrho\, I_i}, \qquad c_2^2 = \frac{G\, A_s}{\varrho\, A_i}, \qquad \text{and} \qquad K = \frac{\varrho\, A_i}{E\, I_e}\right).$$

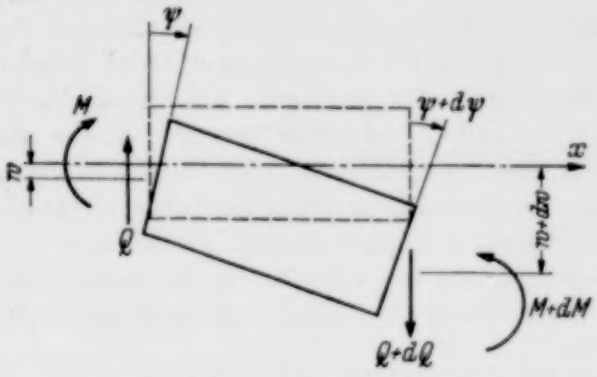


Fig. 1. Force diagram of a differential element in the Timoshenko theory.

The quantities c_1 and c_2 are of important physical significance. The former, the **bending-wave velocity**, is the velocity of propagation of a discontinuity[1] in M, ψ_x or ψ_t. The latter, the **shear wave velocity**, is the velocity at which a discontinuity in Q, w_x, or w_t propagates.

For convenience we introduce the dimensionless variables

$$\xi = \frac{x}{r}, \qquad \tau = \frac{c_1\, t}{r},$$

($r^2 = I_i/A_i$) and denote differentiation with respect to ξ by a prime and with respect to τ by a dot. Eqs. (2) then become

$$w^{\mathrm{IV}} - (1 + \alpha)\, \ddot{w}'' + \alpha\, \ddot{\ddot{w}} + \ddot{w} = 0\,, \qquad M = -\frac{E\, I_e}{r^2}\, (w'' - \alpha\, \ddot{w})\,, \tag{3a, b}$$

where $\alpha = c_1^2/c_2^2$. In this dimensionless formulation the bending wave velocity becomes unity and the shear velocity $1/\sqrt{\alpha}$.

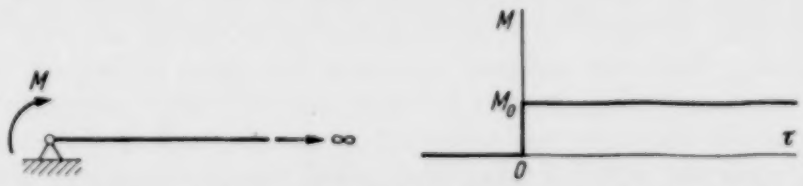


Fig. 2. Specimen problem: Step function bending moment applied to a simply supported, semi-infinite beam.

The specimen problem we consider is the response of the *Timoshenko* beam to a step-function bending moment applied at the hinge of a semi-infinite beam which is initially at rest (Fig. 2). By means of the *Duhamel* integral one can obtain from this basic solution the solution for the problem where the applied bending moment is an arbitrary function of time. For the problem at hand, the boundary consitions are

$$w(0, \tau) = 0\,, \qquad M(0, \tau) = M_0\, U(\tau), \qquad w(\infty, \tau) = \psi(\infty, \tau) = 0\,, \tag{4a—d}$$

[1] See footnotes 3 and 11 on p. 59.

where $U(\tau)$ is the step-function operator defined as zero when its argument is negative and unity when its argument is positive. Since $\ddot{w}(0,\tau) = 0$, we have by eq. (3b) the alternative boundary condition

$$-\frac{E I_e}{r^2} w''(0,\tau) = M_0 U(\tau), \tag{4c}$$

replacing (4b). The initial conditions are

$$w(x,0) = \dot{w}(x,0) = \psi(x,0) = \dot{\psi}(x,0) = 0. \tag{5a—d}$$

It is easily shown from eqs. (1) that the latter conditions imply

$$\ddot{w}(x,0) = \dot{\ddot{w}}(x,0) = 0. \tag{5e, f}$$

3. Power Series Solution by Means of the Laplace Transform. We denote the Laplace transform of a function with respect to τ by a bar, that is,

$$\bar{F}(s) = L[F(\tau)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} F(\tau)\, d\tau, \tag{6a}$$

where s is the transform variable. The inversion integral is then

$$F(\tau) = L^{-1}[\bar{F}(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_l e^{-s\tau} \bar{F}(s)\, ds, \tag{6b}$$

where the path l is a straight line of infinite length parallel to the imaginary axis such that $\bar{F}(s)$ is analytic to its right. Applying the *Laplace* transform to eq. (3a) for the initial conditions given by eqs. (5) we get

$$\bar{w}^{IV} - (1+\alpha) s^2 \bar{w}'' + (\alpha s^4 + s^2) \bar{w} = 0, \tag{7a}$$

while the boundary conditions (4a—d) transform to

$$\bar{w}(0,s) = 0, \qquad \bar{w}''(0,s) = -\frac{r^2 M_0}{E I_e s}, \qquad \bar{w}(\infty,s) = \bar{\psi}(\infty,s) = 0. \tag{7b—e}$$

The solution of eq. (7a) is

$$\bar{w}(\xi,s) = \sum_{i=1}^{4} A_i e^{-n_i \xi} \tag{8}$$

where the A_i are functions of s and

$$n_{1,2} = [a s^2 \mp s (b^2 s^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}, \qquad n_{3,4} = -[a s^2 \mp s (b^2 s^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}. \tag{9}$$

Here a and b are constants involving the parameter α:

$$a = \frac{\alpha + 1}{2}, \qquad b = \frac{\alpha - 1}{2}. \tag{10}$$

The boundary conditions (7d, e) imply that the *Laplace* transforms of w, ψ, M, and Q vanish at $\xi = \infty$. Hence, we have that $A_3 = A_4 = 0$. The boundary conditions (7b, c) then give

$$A_1 = -A_2 = \frac{r^2}{E I_e} \frac{M_0}{s} \frac{1}{n_2^2 - n_1^2}. \tag{11}$$

Of particular interest is the bending moment because this is directly related to the stresses in the beam. By eqs. (3b) and (8)—(11), we get

$$\left.\begin{aligned} M(\xi,s) &= M_1(\xi,s) + M_2(\xi,s), \\ M_1(\xi,s) &= \frac{M_0}{2s}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{b^2 s^2}\right)^{-1/2}\right] \exp(-n_1 \xi), \\ M_2(\xi,s) &= \frac{M_0}{2s}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{b^2 s^2}\right)^{-1/2}\right] \exp(-n_2 \xi). \end{aligned}\right\} \tag{12a,b,c}$$

It is easily shown[1] that the inverse of $M_1(\xi,s)$ is zero for $\tau < \xi$, while the inverse of $M_2(\xi,s)$ is zero for $\tau < \xi\sqrt{\alpha}$. Hence, eqs. (12) express the bending moment as the sum of two terms, having wave fronts propagating at the bending and shear wave velocities respectively.

[1] *E. E. Zajac*, Flexural Waves in Beams, Dissertation, Stanford University, 1954.

It is convenient to simplify the writing by introducing the variables

$$\sigma = b\,s\,, \qquad \xi^+ = \xi/b\,. \tag{13a, b}$$

In terms of σ and ξ^+ eqs. (12b, c) become

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_1(\xi^+,\sigma) &= \frac{M_0}{2\,\sigma}\,b\left[1+\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right]\exp\left(-n_1^+\,\xi^+\right)\\ \overline{M}_2(\xi^+,\sigma) &= \frac{M_0}{2\,\sigma}\,b\left[1-\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right]\exp\left(-n_2^+\,\xi^+\right)\end{aligned}\right\} \tag{14a, b}$$

where

$$n_{1,2}^+ = \sigma\left[a \mp b\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \tag{15a, b}$$

Knowing the inverse of $\overline{M}(\xi^+,\sigma)$, one can revert directly to the ξ,τ domain by use of the theorem

$$L^{-1}[\overline{M}(\xi^+,\sigma)] = L^{-1}\left[\overline{M}\left(\frac{\xi}{b}\,,\,b\,s\right)\right] = \frac{1}{b}\,M\left(\frac{\xi}{b}\,,\,\frac{\tau}{b}\right), \tag{16a—c}$$

where the symbol L^{-1} indicates the inverse of the *Laplace* transform, eq. (6b).

Now a theorem from *Laplace* transform theory is the following[1]: If $\overline{F}(s)$ has a power series expansion in $1/s$, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{s}\right)^n$ which converges within some circle $\left|\frac{1}{s}\right| < R$, about the origin in the $1/s$ plane, then

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

for all t. We note from eqs. (14) and (15) that $\overline{M}(\xi^+,\sigma)$ does not have a power series expansion in $1/\sigma$ and hence the theorem can not be applied directly. However it is easily shown that each of the bracketed terms in eqs. (14) and (15) has an expansion in $1/\sigma^2$. Using for the bracketed terms in eqs. (15) the notation $g_1(1/\sigma^2)$ and $g_2(1/\sigma^2)$ we have

$$\frac{n_j^+}{\sigma} = g_j\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = g_j(0) + \frac{g_j'(0)}{1!}\,\frac{1}{\sigma^2} + \frac{g_j''(0)}{2!}\,\frac{1}{\sigma^4} + \cdots, \tag{17}$$

where $j = 1, 2$ and primes indicate differentiation with respect to $1/\sigma^2$. From the definitions of a and b (eqs. (10)) we have $a - b = 1$, $a + b = \alpha$. Hence the first two terms of g_1 and g_2 can be readily obtained

$$g_1 = 1 + \frac{b}{4\,\sigma^2} - \cdots, \qquad g_2 = \sqrt{\alpha} - \frac{b}{4\sqrt{\alpha}\,\sigma^2} - \cdots. \tag{18a, b}$$

$\overline{M}_1$ and $\overline{M}_2$ are thus of the form

$$\overline{M}_1(\xi^+,\sigma) = e^{-\sigma\xi^+}\,\overline{G}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right), \qquad \overline{M}_2(\xi^+,\sigma) = e^{-\sqrt{\alpha}\,\sigma\xi^+}\,\overline{G}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right), \tag{19a, b}$$

where

$$\left.\begin{aligned} \overline{G}_1 &= \frac{M_0\,b}{2}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[1+\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right]\exp\left[-\xi^+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_1^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{2n-1}\right]\right\}\\ \overline{G}_2 &= \frac{M_0\,b}{2}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[1-\left(1-\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right]\exp\left[-\xi^+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_2^{n}(0)}{n!}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{2n-1}\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{20a, b}$$

It is seen that $\overline{G}_1$ and $\overline{G}_2$ have the required power servies expansions. At the same time $\overline{M}_1$ and $\overline{M}_2$ in the form of eqs. (18a, b) are ready-made for the well-known shifting theorem of *Laplace* transform theory[1]:

$$L^{-1}[e^{-sk}\,F(s)] = F(\tau-k)\,U(\tau-k)\,,$$

and thus with the aid of eqs. (16) the inverses of $\overline{M}_1$ and $\overline{M}_2$ can be written as

$$M_1(\xi,\tau) = \frac{1}{b}\,G_1\left(\frac{\tau-\xi}{b}\right)U(\tau-\xi)\,, \qquad M_2(\xi,\tau) = \frac{1}{b}\,G_2\left(\frac{\tau-\sqrt{\alpha}\,\xi}{b}\right)U(\tau-\sqrt{\alpha}\,\xi)\,, \tag{21}$$

[1] *B. Van der Pol* and *H. Bremmer*, Operational Calculus, Cambridge, 1950: University Press.

the only remaining task being the determination of the coefficients of the expansions of $\bar{G}_1(1/\sigma)$ and $\bar{G}_2(1/\sigma)$ about $1/\sigma = 0$. This is probably most conveniently carried out as follows. From eqs. (17) and (15) we have

$$g_1^2 = a - b\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)^{1/2} = a - b + b\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{1}{\sigma^4} + \frac{1\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{\sigma^6} + \cdots\right).$$

Equating like powers of $1/\sigma^2$ of a *Taylor* series expansion of g_1^2 we get

$$g_1^2(0) = a - b = 1,$$

$$\frac{1}{1!}[g_1^2(0)]' = 2\,g_1(0)\,g_1'(0) = b\cdot\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2!}[g_1^2(0)]'' = 2\left[\frac{g_1(0)}{0!}\frac{g_1''(0)}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_1'(0)}{1!}\right)\right] = b\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}, \ldots$$

and hence from the known expansion of $(1 - (1/\sigma^2))^{1/2}$ one can solve consecutively for $g_1(0)$, $g_1'(0)$, $g_1''(0)$, etc. The coefficients $g_2(0)$, $g_2'(0)$, $g_2''(0)$ etc. can be obtained in a similar fashion. Since the remaining factors in eqs. (20a, b) have well-known expansions in $1/\sigma$, one obtains the expansions of $\bar{G}_1$ and $\bar{G}_2$ by straightforward multiplication of power series. The result for $\alpha = 4$ is

$$\begin{aligned} M(\xi,\tau) = \frac{M_0}{2}\Bigg[& U(\tau_1)\left\{1 + I_0(\tau_1) - \xi^+\left(0.750\,\tau_1 + 0.23437\,\frac{\tau_1^3}{3!} + \cdots\right)\right. \\ & \left. + \frac{(\xi^+)^2}{2!}\left(0.28126\,\frac{\tau_1^2}{2!} + 0.10547\,\frac{\tau_1^4}{4!} + \cdots\right) + \cdots\right\} \\ & + U(\tau_2)\left\{1 - I_0(\tau_2) - \xi^+\left(0.9375\,\frac{\tau_2^3}{3!} + 0.98145\,\frac{\tau_2^5}{5!} + \cdots\right)\right. \\ & \left.\left. - \frac{(\xi^+)^2}{2!}\left(0.01758\,\frac{\tau_2^4}{4!} + 0.02362\,\frac{\tau_2^6}{6!} + \cdots\right) + \cdots\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{22}$$

where $\tau_1 = (\tau - \xi)/b$, $\tau_2 = (\tau - \sqrt{\alpha}\,\xi)/b$ and where we have made use of the transform pair[1]

$$L^{-1}\left[\frac{b}{\sigma}\left\{1 \mp \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right\}\right] = 1 \mp I_0(\tau/b).$$

The coefficients of $\frac{(\xi^+)^m}{m!}\frac{\tau_1^n}{n!}$ and $\frac{(\xi^+)^m}{m!}\frac{\tau_2^n}{n!}$ for $m = 1$ through 6 and $n = 1$ through 10 may be found in *Zajac*'s thesis[2].

4. Series Solution Behind the Wave Front. The series for M_1 and M_2 can be partially summed to give a representation which is convenient for computation directly behind their wave fronts. To do this one brings out of the braces in eqs. (20) the terms $\exp(g_1'(0)\,\xi^+)$ and $\exp(g_2'(0)\,\xi^+)$. It is seen from eqs. (18) and (19) that this procedure yields

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{M_0}{2}b\,e^{-\sigma\xi^+}\exp\left(-\frac{b\,\xi^+}{4\,\sigma}\right)\left\{\frac{1}{\sigma}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right]\exp\left[-\xi^+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_1^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{2n-1}\right]\right\}, \\ M_2 &= \frac{M_0}{2}b\,e^{-\sigma\sqrt{\alpha}\,\xi^+}\exp\left(\frac{b\,\xi^+}{4\sqrt{\alpha}\,\sigma}\right)\left\{\frac{1}{\sigma}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1/2}\right]\exp\left[-\xi^+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_2^{(n)}(0)}{n!}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{2n-1}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{23a, b}$$

$\bar{M}_1$ and $\bar{M}_2$ can now be written in the form

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{M_0}{2}b\,e^{-\sigma\xi^+}\exp\left(-\frac{b\,\xi^+}{4\,\sigma}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi^+)^n}{n!}\sum_{m=3n}^{\infty}C_{m,n}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{m+1} \\ M_2 &= \frac{M_0}{2}b\,e^{-\sigma\sqrt{\alpha}\,\xi^+}\exp\left(\frac{b\,\xi^+}{4\sqrt{\alpha}\,\sigma}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi^+)^n}{n!}\sum_{m=3n+2}^{\infty}D_{m,n}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{m+1}. \end{aligned}\right\} \tag{24a, b}$$

These series can be inverted term by term by the use of the transform pairs[1]

$$L^{-1}\left[\frac{e^{k/\sigma}}{\sigma^{n+1}}\right] = L^{-1}\left[\frac{e^{-k/b\,s}}{(b\,s)^{n+1}}\right] = \frac{1}{b}\left(\frac{\tau}{b\,k}\right)^{n/2}J_n\left(2\sqrt{\frac{k\,\tau}{b}}\right),$$

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-k/\sigma}}{\sigma^{n+1}}\right] = L^{-1}\left[\frac{e^{k/b\,s}}{(b\,s)^{n+1}}\right] = \frac{1}{b}\left(\frac{\tau}{b\,k}\right)^{n/2}I_n\left(2\sqrt{\frac{k\,\tau}{b}}\right)$$

[1] See footnote 1 on p. 62.
[2] See footnote 1 on p. 61.

where J_n and I_n are *Bessel* and modified *Bessel* functions respectively of the first kind and n^{th} order. Hence we arrive at a second representation of the solution

$$M(\xi,\tau) = \frac{M_0}{2}\left\{U(\tau_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi^+)^n}{n!}\sum_{m=3n}^{\infty}C_{m,n}\left(\frac{4\,\tau_1}{\xi}\right)^{m/2}J_m\left(\sqrt{\xi\,\tau_1}\right)\right.$$
$$\left. + U(\tau_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi^+)^n}{n!}\sum_{m=3n+2}^{\infty}D_{m,n}\left(\frac{4\sqrt{\alpha}\,\tau_2}{\xi}\right)^{m/2}I_m\left(\sqrt{\frac{\xi\,\tau_2}{\sqrt{\alpha}}}\right)\right\} \tag{25}$$

where $\tau_1 = (\tau - \xi)/b$ and $\tau_2 = (\tau - \sqrt{\alpha}\,\xi)/b$ as before. The constants $C_{m,n}$ and $D_{m,n}$ can be conveniently evaluated in the manner indicated in the previous section. For $\tau = \text{const}$, τ_1 measures the distance behind the bending wave front and τ_2 the distance behind the shear wave front. In most cases the bending wave velocity will be greater than the shear wave velocity. Although the first series converges rapidly for small τ_1 and large ξ, a very large number of terms are required to sum it for large enough τ_1 and ξ to make it reach the beginning of the second wave front. For this reason we have computed only the constants $C_{m,n}$. They are given in *Zajac*'s thesis[1] for $m = 0$ through 12 and $n = 0$ through 4. Introducing the notation $\beta = \sqrt{\xi\,\tau_1}$ and with $\alpha = 4$, the first terms of this solution are

$$M(\xi,\tau) = \frac{M_0}{2}\,U(\tau_1)\left\{2\left[J_0(\beta) + \left(\frac{\tau_1}{\xi}\right)J_2(\beta) + 3\left(\frac{\tau_1}{\xi}\right)^2 J_4(\beta) + \cdots\right]\right.$$
$$\left. + \beta\left[0.025\left(\frac{\tau_1}{\xi}\right)J_3(\beta) + 1.8750\left(\frac{\tau_1}{\xi}\right)^2 J_5(\beta) + \cdots\right] + \cdots\right\}. \tag{26}$$

5. Asymptotic Solution for Small ξ and Large τ by Means of the Inversion Integral. By means of the Bromwich inversion integral (eq. (6b)) one can represent the solution to the problem at hand in terms of real definite integrals. These are obtained by suitably deforming the Bromwich contour around the singularities of $M(\xi, s)$, which are branch points at

$$s = 0\,, \qquad s = \pm\frac{1}{b}\,, \qquad s = \pm\frac{i}{\sqrt{\alpha}}$$

and a pole at $s = 0$. Although the calculations are straightforward, one must be careful to stay on the correct branch of the quadruple valued functions represented by M_1 and M_2, eqs. (12). Since ways of doing this have been described in detail elsewhere[2] we shall not go into this matter here. One obtains by this procedure the result[3] that for $\tau > \sqrt{\alpha}\,\xi$ (in back of the shear wave front)

$$M(\xi,\tau) = M_0\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{r} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2r^2}}\right)\operatorname{Sinh}\gamma\,\xi\,\sin r\tau\,dr\right\}, \tag{27}$$

where

$$\gamma = \sqrt{-a\,r^2 + r\sqrt{1+b^2r^2}}\,.$$

The integrand in eq. (27) is of the form $f(r)\sin r\tau$, that is, a harmonic function with frequency equal to τ whose amplitude is modulated by the curve $f(r)$. The function $f(r)$ is singular at the origin, behaving as $1/r^{1/2}$. Now consider a fixed ξ. For large τ the integrand oscillates rapidly between positive and negative values. For the regular part of $f(r)$, these tend to cancel each other, and the main contribution to the integral comes from the first few oscillations at the origin where $f(r)$ goes to infinity. Hence, to evaluate the integral in eq. (27) for large τ, we expand $f(r)$, in powers of $r^{1/2}$. This expansion results in

$$M(\xi,\tau) = M_0\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{1/\sqrt{\alpha}}\sin r\tau\left[\frac{\xi}{r^{1/2}} + r^{1/2}\left(0.25\,\xi + \frac{\xi^3}{3!}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + r^{3/2}\left(-2.09375\,\xi - 2.25\,\frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!}\right) + \cdots\right]dr\right\}. \tag{28}$$

[1] See footnote 1 on p. 61.
[2] See footnotes 8, 10, 12 on p. 59 and 1 on p. 61.
[3] See footnotes 12 on p. 59 and 1 on p. 61.

The coefficients of $r^{m/2}\,\xi^n$ are given in *Zajac's* thesis for $m = -1, 1, 3, \ldots, 13$ and $n = 1, 3, \ldots, 15$. Each term in (28) is of the form

$$\int_0^{1/\sqrt{\alpha}} r^{m/2} \sin r\tau \, dr \,. \tag{29}$$

which with the substitution $r\tau = z$ becomes

$$\frac{1}{\tau^{m/2+1}} \int_0^{\tau/\sqrt{\alpha}} z^{m/2} \sin z \, dz \,. \tag{30}$$

Integrals of the form of (30) can be evaluated in terms of the tabulated Fresnel integrals $S(y)$ and $C(y)$ defined by

$$S(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\sin\eta}{\eta^{1/2}} \, d\eta \,, \qquad C(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\cos\eta}{\eta^{1/2}} \, d\eta \tag{31}$$

by successive integration by parts. In Fig. 3 we have plotted partial sums of the series (28) together with the power series solution of Section 3. The designations $m = -1$, $m = 1$, etc. indicate

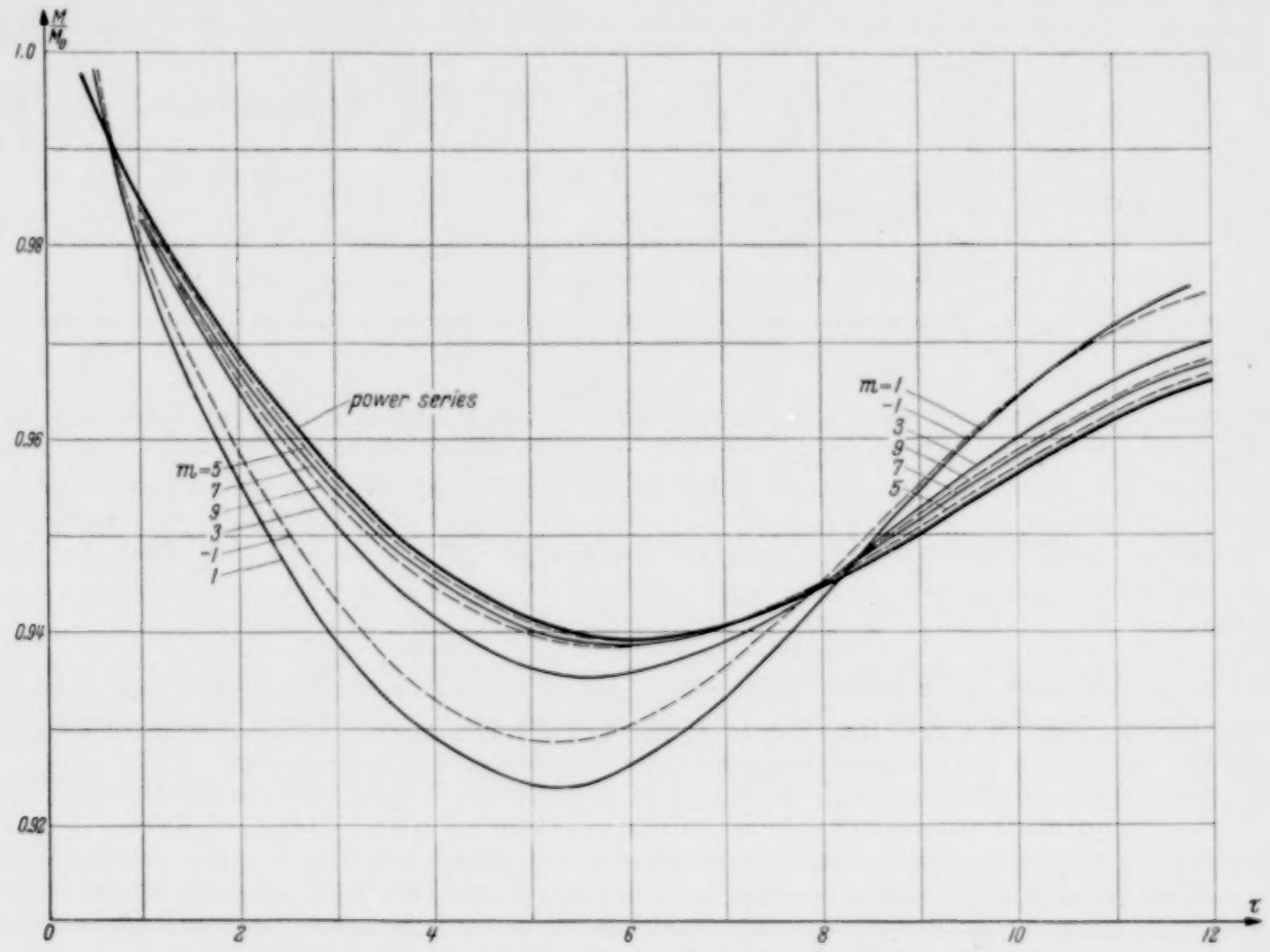


Fig. 3. Bending moment vs. time at $\xi = 0.3$ computed by the asymptotic and series solutions.

that the terms up to and including those multiplying $r^{m/2}$ in (28) have been used. It is seen that as m increases the agreement with the power series solution gets better, being very good for $m = 5$. However for $m = 7$ and 9 the agreement again gets worse. Hence (28) appears to be a semi-convergent series.

The series expansion (28) is in powers of ξ. For large ξ, a large number of terms must be used to evaluate (28) and the method is not practical. However, as is illustrated by Fig. 3 for small ξ, it affords a convenient way of extending the power series solution of Section 3 to large τ.

6. Asymptotic Solution by the Method of Stationary Phase. The stationary phase method of *Kelvin* allows one to extend the above solutions to large times over almost the entire beam. With

the exception of a paper by *Jones*[1], the application of this method to the *Timoshenko* beam does not seem to have been exploited.

To get a representation of the solution suitable for stationary phase evaluation, it is probably easiest to start afresh and operate on the basic differential equations (3a, b) with the *Fourier* transform with respect to ξ. In the case at hand the *Fourier* sine transform is appropriate. Denoting this by an asterisk, we have, for example,

$$w^*(\varkappa,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w(\xi,\tau) \sin \varkappa\, \xi \, d\xi \,,$$

$\varkappa$ being the transform variable. The inverse of $w^*(\varkappa,\tau)$ is given by[2]

$$w(\xi,\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w^*(\varkappa,\tau) \sin \varkappa\, \xi \, d\varkappa \,.$$

The mechanics of obtaining an integral representation of the solution by means of the *Fourier* sine transform are quite similar to those given in Section 2 for the *Laplace* transform. Since they have been shown in detail by *Boley*[3] we shall not repeat them here. The result for the bending moment is

$$\frac{M}{M_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\varkappa} + \frac{\omega_2^2 (\varkappa^2 - \alpha\, \omega_1^2)}{\varkappa^3 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \cos \omega_1 \tau - \frac{\omega_1^2 (\varkappa^2 - \alpha\, \omega_2^2)}{\varkappa^3 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \cos \omega_2 \tau \right] \sin \varkappa\, \xi \, d\varkappa \,. \tag{32}$$

where ω_1 and ω_2 $(\omega_1 > \omega_2)$ are given by

$$\omega_{1,2} = \left[\frac{(1+\alpha)\varkappa^2 + 1 \pm [((1+\alpha)\varkappa^2 + 1)^2 - 4\,\alpha\,\varkappa^4]^{1/2}}{2\,\alpha} \right]^{1/2} .$$

To apply the stationary phase method to eq. (32) we rewrite it first as the sum of the five integrals:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{M_0} &= \sum_{i=1}^{5} I_i \,, & I_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \varkappa\, \xi}{\varkappa} \, d\varkappa = 1 \,, \\ I_{2,3} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A_1(\varkappa) \sin (\varkappa\, \xi \mp \omega_1 \tau) \, d\varkappa \,, & I_{4,5} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty A_2(\varkappa) \sin (\varkappa\, \xi \mp \omega_2 \tau) \, d\varkappa \,, \end{aligned}\right\} \tag{33a—f}$$

with

$$A_1(\varkappa) = \frac{\omega_2^2 (\varkappa^2 - \alpha\, \omega_1^2)}{\varkappa^3 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \,, \qquad A_2(\varkappa) = \frac{\omega_1^2 (\varkappa^2 - \alpha\, \omega_2^2)}{\varkappa^3 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \,.$$

The phases of the harmonic functions in I_2 and I_4 are stationary for values of $\varkappa$ which satisfy

$$\frac{d\omega_1}{d\varkappa} = \frac{\xi}{\tau} \,, \qquad \frac{d\omega_2}{d\varkappa} = \frac{\xi}{\tau} \,, \tag{34a, b}$$

while I_3 and I_5 have no stationary points. Plots of the "group velocities" $d\omega_1/d\varkappa$ and $d\omega_2/d\varkappa$ for $\alpha = 4$ are given in Fig. 4. It is seen that for $0.5 < d\omega_2/d\varkappa < 0.536$, the abscissa $\varkappa$ is double valued and hence in this range of $\varkappa$ there are two stationary phase contributions. The standard stationary phase formulas[4] thus yield the following contributions to I_2 and I_4 for large τ:

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= 2\, A_1(\varkappa_1) \left| 2\pi \frac{d^2\omega_1}{d\varkappa^2} \tau \right|^{-1/2} \sin \left(\varkappa_1\, \xi - \omega_1 \tau - \frac{\pi}{4} \right), \\ S_4 &= -2\, A_2(\varkappa_2) \left| 2\pi \frac{d^2\omega_2}{d\varkappa^2} \tau \right|^{-1/2} \sin \left(\varkappa_2\, \xi - \omega_2 \tau - \frac{\pi}{4} \right), \\ \hat{S}_4 &= -2\, A_2(\hat{\varkappa}_2) \left| -2\pi \frac{d^2\hat{\omega}_2}{d\varkappa^2} \tau \right|^{-1/2} \sin \left(\hat{\varkappa}_2\, \xi - \hat{\omega}_2 \tau + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}\right\} \tag{35a, b, c}$$

[1] R. P. N. Jones, Qu. J. Mech. Appl. Math. 8 (1955), pp. 373—384.
[2] I. N. *Sneddon*, Fourier Transforms, New York 1951: McGraw-Hill.
[3] *B. A. Boley*, J. Appl. Mech. 24 (1957) pp. 152—153.
[4] *C. Eckart*, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) pp. 399—417.

where $\varkappa_1$ is the root of (34a), $\varkappa_2$ and $\hat{\varkappa}_2$ are the small and large roots of (34b), S_2 is the contribution to I_2, and S_4 and $\hat{S}_4$ are the contributions to I_4.

For $\varkappa$ small, $A_2 \approx 1/\varkappa$ and there is a further contribution to I_4 and I_5 because of the singularity at the origin. To examine this we expand around $\varkappa = 0$, retaining lowest order terms:

$$I_4 + I_5 \approx -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \varkappa^2 \tau}{\varkappa} \sin \varkappa \xi \, d\varkappa \,. \tag{36}$$

For sufficiently large ξ one can argue that the rapid oscillations of $\sin \varkappa \xi$ cause most of the contributions to (36) to be near the origin where $\varkappa$ is small enough to take $\cos \varkappa^2 \tau \approx 1$. Then $I_4 + I_5$

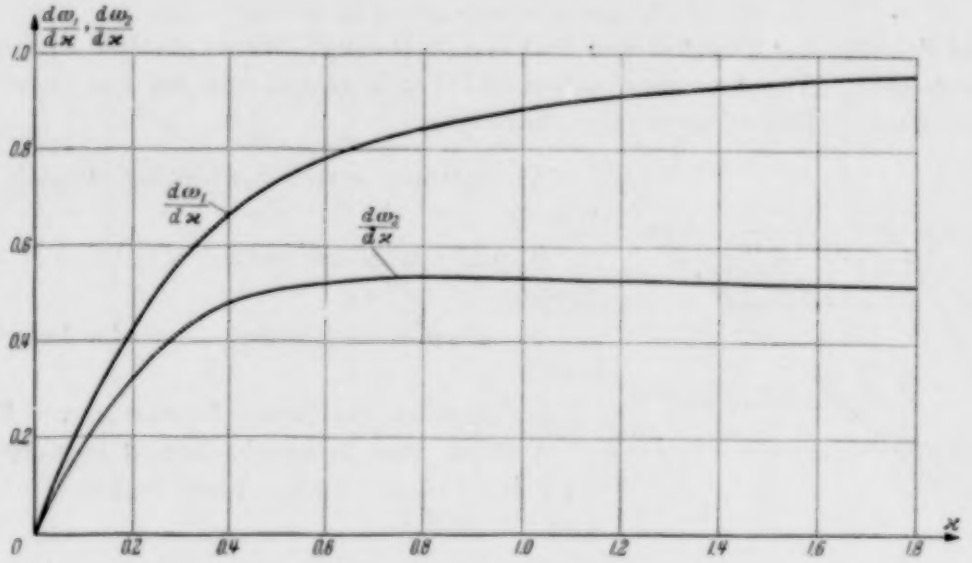


Fig. 4. Group velocities vs. wave number $\varkappa$.

cancel I_1. Unfortunately, the smaller the value of ξ/τ the larger τ must be for this approximation to be valid, with the necessary τ becoming very large for ξ/τ near zero.

As ξ/τ approaches zero the stationary point $\varkappa_2$ approaches zero also. In this case both the contribution at the origin and the stationary phase contribution S_4 are given by (36), $\hat{S}_4$ is zero, and S_2 is negligible. The integral in (36) is however known. We get therefore for ξ/τ small

$$\frac{M}{M_0} = 1 - C\left(\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - S\left(\frac{\xi^2}{4\tau}\right), \tag{37}$$

where C and S are the Fresnel integrals defined by eq. (31). As would be expected, eq. (37) is just the solution of the *Bernoulli-Euler* beam for the boundary conditions at hand[1].

At $\varkappa = 0.844$ and for $\varkappa = \infty$, $d^2\omega_2/d\varkappa^2 = 0$. In the neighborhood of these points the formulas (35b, c) break down. The general techniques for evaluating stationary phase contributions at these places are described by *Eckart*[2] and carried out for the *Timoshenko* beam by *Jones*[3]. In the case of $\varkappa = 0.844$ the integral I_2 in the stationary phase approximation reduces to the tabulated Airy Integral function. For this reason, the phase at which the group velocity is stationary is sometimes called the *Airy phase*[4]. In the present case, the Airy phase evaluation is

$$S_4 = \hat{S}_4 = -\frac{2.2307\, A_2(\varkappa)}{2\pi}\left(\frac{\tau}{2}\left|\frac{d^3\omega_2}{d\varkappa^3}\right|\right)^{-1/3} \sin\left(\varkappa\xi - \omega_2\tau\right),$$

evaluated for the $\varkappa$ at which $d^2\omega_2/d\varkappa^2 = 0$, and with ξ/τ in the neighborhood of the corresponding value of $d\omega_2/d\varkappa$. For $\alpha = 4$ this equation becomes

$$S_4 = \hat{S}_4 = -0.3206\,\tau^{-1/3} \sin\left(0.8445 - 0.353\,\tau\right)$$

in the neighborhood of $\xi/\tau = 0.536$.

[1] *W. Prager*, Ing.-Archiv 4 (1933) pp. 29—30.
[2] See footnote 4 on p. 66.
[3] See footnote 1 on p. 66.
[4] *W. M. Ewing*, *W. S. Jardetsky* and *F. Press*, Elastic Waves in Layered Media, New York 1957: McGraw-Hill.

For $\varkappa \to \infty$, one expands the phase in powers of $1/\varkappa$, retaining the leading terms only. The result is again in terms of known integrals:

$$S_2 = J_0\left(\sqrt{\frac{\tau(\tau-\xi)}{b}}\right) U(\tau-\xi),$$

$$\hat{S}_4 = -4\alpha\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{\tau}-1\right)^3 J_2\left(\sqrt{\frac{\tau}{\alpha b}(\xi\sqrt{\alpha}-\tau)}\right) U(\xi\sqrt{\alpha}-\tau)$$

with $b = (\alpha - 1)/2$ (eq. (10)). S_2 is similar to the leading term of the *Laplace* transform solution, eq. (26), except ξ in the argument $\xi\tau_1$ is replaced by τ. In the neighborhood of the bending wave front $\xi = \tau$, ξ and τ are very nearly equal and S_2 above agrees closely with the leading term of eq. (26).

7. Numerical Results and Conclusions. In Figs. 6 through 9 are plotted for $\alpha = 4$ numerical results obtained from the described solutions. Fig 5. shows the regions in which the various solutions were used. These were the following:

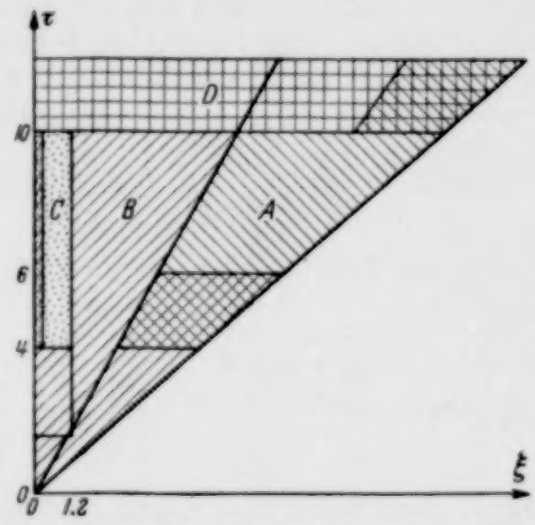


Fig. 5. Region of ξ, τ plane in which various solutions are used.

A: Infinite series containing *Bessel* Functions, Section 4.

B: Infinite power series in ξ, $(\tau - \xi)$ and $(\tau - \sqrt{\alpha}\,\xi)$, Section 3.

C: Asymptotic Series from *Laplace* transform, Section 5.

D: Asymptotic Series by Stationary Phase, Section 6.

A check was obtained where it was convenient to compute by two methods. Thus region B overlaps with regions A and C.

For the series solutions in A and B, enough terms were used so that the n and $n+1$ partial sums showed no difference in the third figure. In region C, terms up to $m = 5$ (see Section 3) were included. For this many terms the asymptotic series differed by two or three in the third figure from the power series where regions B and C overlap.

Fig. 6 indicates the response near the origin in the ξ, τ plane, while Fig. 7 shows the march of the bending wave front to times $\tau = 10$, 100 and 500. It is seen that as the wave progresses

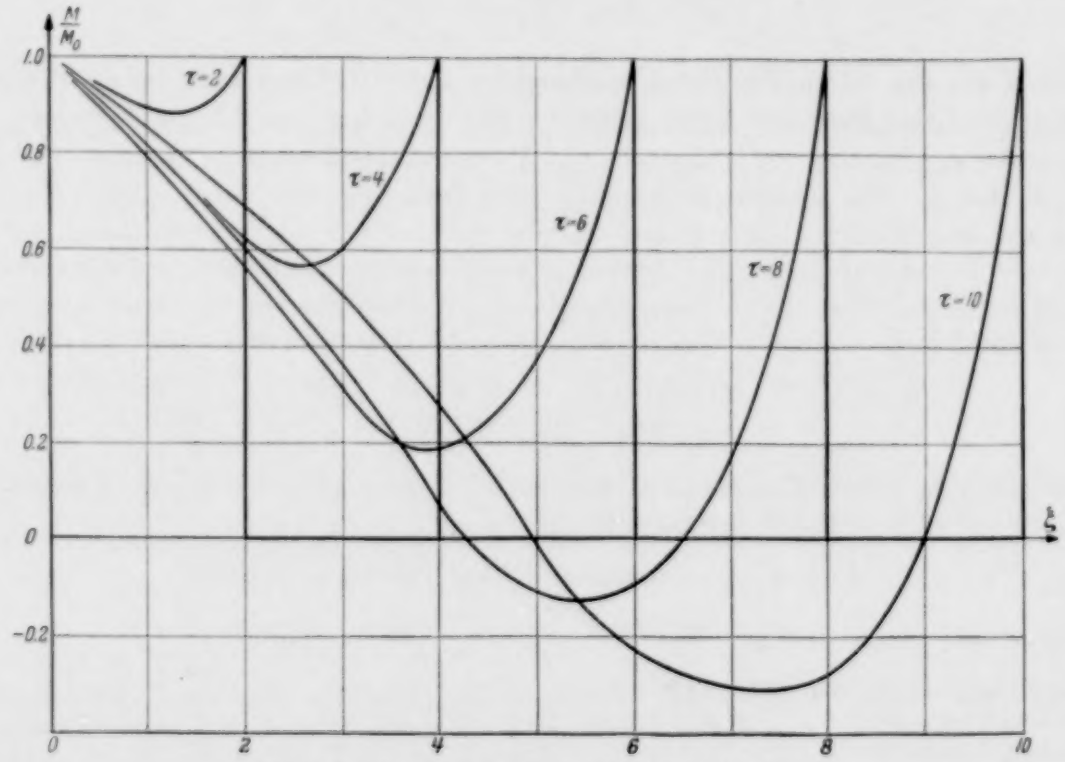


Fig. 6. Bending moment near the origin of the ξ, τ plane.

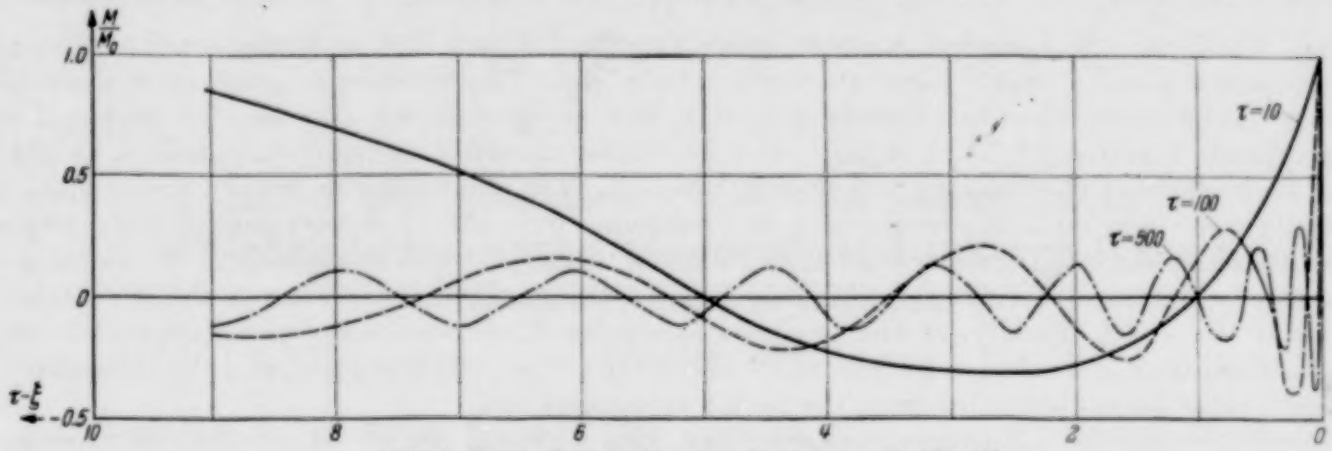


Fig. 7. March of the bending wave front to $\tau = 10, 100, 500$.

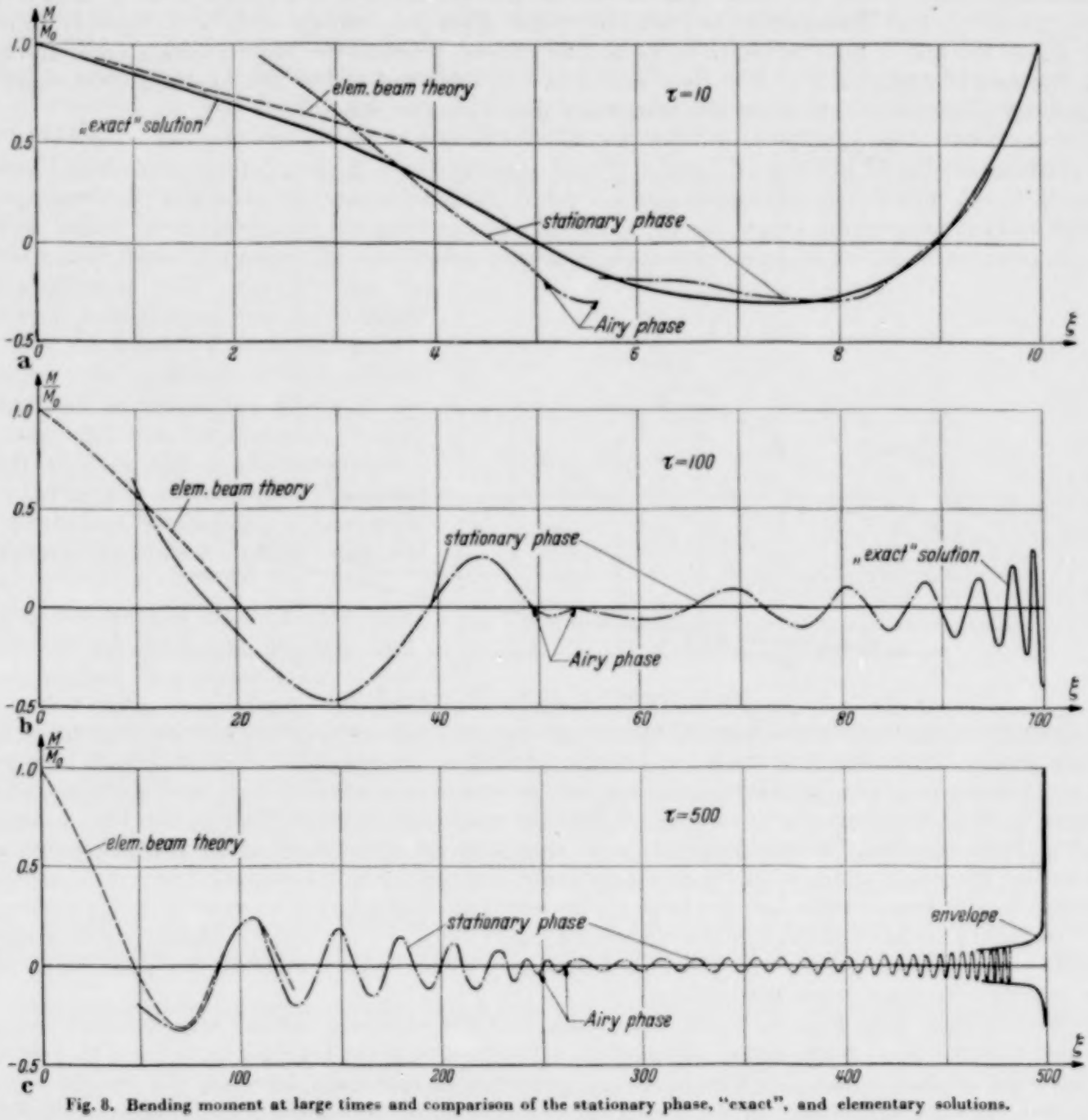


Fig. 8. Bending moment at large times and comparison of the stationary phase, "exact", and elementary solutions.

a rapid fluctuation develops directly behind the wave front. If one evaluates the derivative of eq. (22) or (26) at the bending wave front he obtains

$$\frac{dM}{d\xi}(\xi, \xi) = \frac{\xi}{2(\varkappa - 1)} M_0 .$$

Thus the slope in the ξ direction at the wave front varies linearly with ξ. Hence, as is illustrated by the plots, for large ξ, the wave consists of a jump followed by a steep sloping off into a rapid fluctuation.

Figs. 8 indicate the complete wave at times $\tau = 10$, 100 and 500, and also a comparison of the stationary phase, "exact", and elementary solutions. The stationary phase approximation requires the harmonic term in integrals such as I_2 and I_4 (eqs. (33)) to vary rapidly compared to the amplitude function ($A_1(\varkappa)$ or $A_2(\varkappa)$). At $\tau = 10$, this variation is rapid enough in I_2 so that in the region behind the bending wave front, where $I_4 \approx 0$, the stationary phase approximation is already quite accurate. However, in I_4 the harmonic term does not vary rapidly until larger times. Hence, in back of the shear wave front, where I_4 is the principal contribution, the stationary phase approximation, although approximating the general features of the solution, is still in considerable error at $\tau = 10$. Finally, as one proceeds to smaller ξ, the stationary phase approximation deviates from the exact solution because of the singularity at $\varkappa = 0$ (Section 6), and the elementary, *Bernoulli-Euler* beam theory becomes the better approximation.

For larger times ($\tau = 30$) the stationary phase values behind the bending wave front become indistinguishable from the exact values within the accuracy of the plots. This is exhibited in Fig. 8b for $\tau = 100$. Presumably the stationary phase approximation again represents closely the solution over the rest of the beam until the elementary theory becomes the more accurate approximation in the neighborhood of $\xi = 10$. But, except in the neighborhood of the bending wave front, we have no quantitative check on the stationary phase approximation.

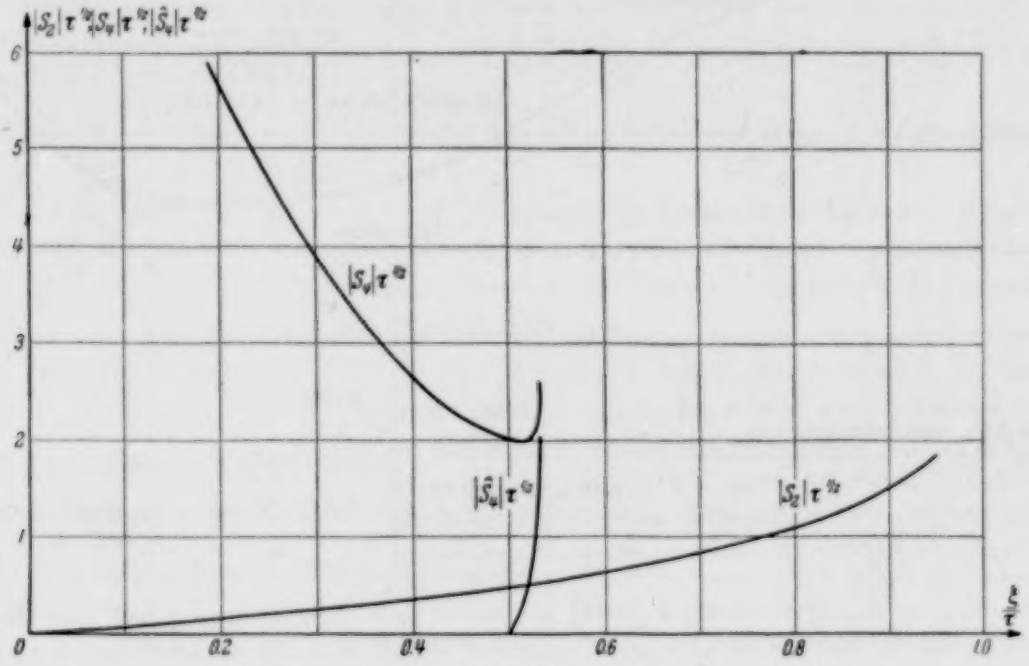


Fig. 9. Envelopes of $|S_2|\sqrt{\tau}$, $|S_4|\sqrt{\tau}$ and $|\hat{S}_4|\sqrt{\tau}$.

However, for sufficiently large τ, we can anchor the stationary phase approximations at both ends, that is, at the bending wave front and at small ξ. As discussed in Section 6, with increasing τ the stationary phase approximation reaches accurately to smaller and smaller values of the ratio ξ/τ, while the elementary beam theory solution reaches to larger and larger ξ/τ. Thus as is seen in Fig. 8c for $\tau = 500$, for very large τ the stationary phase and elementary beam theory solutions coalesce. Hence, in addition to the anchor provided by the "exact" solution of Section 5, the stationary phase approximation for very large τ is anchored at small ξ by the elementary beam theory.

In Figs. 9 we have plotted the envelopes for $|S_2|\sqrt{\tau}$, $|S_4|\sqrt{\tau}$, and $|\hat{S}_4|\sqrt{\tau}$, that is, the coefficients of the harmonic terms in eqs. (35). The stationary phase approximations for other times may be readily computed from these plots.

We see then from Figs. 6, 7 and 8 the nature of the dispersion of the step function bending moment by the *Timoshenko* beam. Behind the discontinuity at the bending wave front the response diminishes rapidly until the Airy phase neighborhood (contained between the two arrows) is reached. In back of the Airy phase region the response again increases, being of larger magnitude than in back of the bending wave front. Thus one obtains the sort of behavior that has been observed experimentally[1], namely, little response in back of the bending wave front, with the main response coming behind the Airy phase region.

(Eingegangen am 10. November 1958.)

Anschrift der Verfasser: Professor Dr. *W. Flügge*, Stanford University, Stanford, Calif. (U. S. A.); Dr. *E. E. Zajac*, Bell Telephone Laboratories, Inc., Murray Hill, New Jersey (U. S. A.).

[1] See footnote 5 on p. 59.

Über eine Analogie zwischen den Instabilitäten laminarer Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden*

Von H. Görtler

1. Instabilität an konkaven Wänden. Die Instabilität der ebenen Grenzschichtströmung an konkaven Wänden gegenüber Störungen in Gestalt longitudinaler Wirbel (Wirbel mit Längsachse in Hauptströmungsrichtung) wurde zunächst theoretisch nachgewiesen[1] und dann experimentell bestätigt[2,3,4]. Sie ist dynamisch begründet in dem instabilen Gleichgewicht zwischen der durch die konkave Krümmung der Stromlinien bedingten Zentrifugalkraft und dem Druckgefälle normal zu den Stromlinien. Infolge der hemmenden Wirkung der inneren Reibung werden die Störungen erst dann angefacht, wenn die *Reynolds*sche Zahl der Strömung und die Krümmung der Stromlinien ausreichend groß sind, genauer, sobald der Parameter $Re_\vartheta \sqrt{\vartheta/R}$ (Re_ϑ die mit der Impulsverlustdicke ϑ der Grenzschicht gebildete *Reynolds*sche Zahl, R der Krümmungsradius der Wand, der Bequemlichkeit halber positiv definiert für zur Strömung konkave Wände) einen gewissen kritischen Wert überschreitet (den kleinsten Eigenwert des zugrundeliegenden homogenen Randwertproblems). Dieser kritische Wert erweist sich als praktisch unabhängig von der Gestalt des Geschwindigkeitsprofils, also insbesondere vom äußeren Druckverlauf; maßgebend ist allein die Dicke ϑ der Grenzschicht. Das Einsetzen der Instabilität wird in Abb. 1 veranschaulicht. Sie wird im allgemeinen den Umschlag der laminaren Strömung an konkaven Wänden in die turbulente Strömung einleiten.

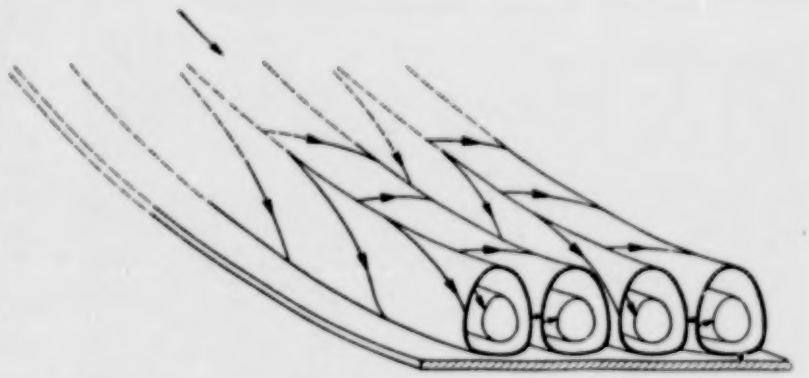


Abb. 1. Instabilität der laminaren Grenzschicht gegenüber longitudinalen Wirbeln an konkaven Wänden, nach [1].

Die beschriebene Instabilität tritt nicht nur an konkaven Wänden auf. Wenn in einer Grenzschicht die Stromlinien nur selbst nach jener Normalenseite konkav verlaufen, nach der die Geschwindigkeit zunimmt, und wenn eine weitere Bedingung, die dem Überschreiten des oben genannten kritischen Parameterwertes entspricht, erfüllt ist, werden Störungen in Gestalt longitudinaler Wirbel angefacht werden. Insbesondere ist neuerdings theoretisch nachgewiesen worden[5], daß eine primär gegenüber *Tollmien-Schlichting*schen Wellen instabil gewordene Grenzschicht bereits bei sehr kleinen Wellenamplituden sekundär gegenüber longitudinalen Wirbeln instabil wird. Der experimentelle Befund scheint in Einklang mit dieser theoretischen Voraussage zu stehen [6,7].

2. Instabilität an erwärmten Wänden. Schon vor mehr als drei Jahrzehnten sind die zu Abb. 1 qualitativ gleichen Anordnungen longitudinaler Wirbel in den Grenzschichtströmungen an hori-

* Diese Untersuchung wurde gefördert durch das Wirtschaftsministerium des Landes Baden-Württemberg.

[1] *H. Görtler*, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Neue Folge I, 2 (1940) S. 1—26. Englische Übersetzung: On the three-dimensional instability of laminar boundary layers on concave walls. NACA Techn. Memorandum 1375 (June 1954), 32 pp.

[2] *H. W. Liepmann*, Investigations on laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries. NACA Wartime Report (1943) W — 107; Investigation of boundary layer transition on concave walls. NACA Wartime Report (1945) W — 87.

[3] *H. L. Dryden*, „Advances in Applied Mechanics" 1 (1948) S. 1—40.

[4] *N. Gregory* and *W. S. Walker*, Rep. Memor. aero. Res. Coun., London, 2779 (1950).

[5] *H. Görtler* und *H. Witting*, Theorie der sekundären Instabilität der laminaren Grenzschichten. Grenzschichtforschung/Boundary Layer Research, IUTAM Symposium Freiburg i. Br. 1957, hrsg. v. *H. Görtler*, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer (1958), S. 110—126, auch Diskussionsbemerkungen S. 107—108.

[6] *G. B. Schubauer*, Mechanism of transition at subsonic speeds. Ebendort, S. 85—107.

[7] *H. L. Dryden*, Z. f. Flugwiss. 6 (1958) S. 217—233.

zontalen ebenen Wänden beobachtet worden, wenn die Wand auf eine ausreichende höhere Temperatur als die der Außenströmung gebracht wurde[1].

Eine theoretische Erklärung dieser Erscheinung wurde damals nicht gegeben. Man beschränkte sich auf beschreibende Studien vorwiegend qualitativer Art, die im Zusammenhang mit der Beobachtung verwandter Erscheinungen, wie der bekannten Instabilitätserscheinung der *Bénard*-Zellen bei ruhender Flüssigkeit über erwärmten Böden, durchgeführt wurden, und man interessierte sich später besonders für die meteorologische Bedeutung des Phänomens, vgl. etwa [2]. Neuerdings sind die thermischen Längswirbel für Erscheinungen der Sandverwehung über weit ausgedehnten Wüsten verantwortlich gemacht worden[3].

Die Vermutung ist naheliegend, daß eine unmittelbare Analogie zwischen dieser Erscheinung und der zuvor behandelten Instabilität an konkaven Wänden besteht: An Stelle der Zentrifugalkraft ist die durch die Erwärmung der Wand verursachte Auftriebskraft getreten. Bei waagerechter oder schwach geneigter ebener Wand wirkt auch sie praktisch senkrecht zu den Stromlinien. Jede Massenkraft dieser Art und geeigneten Gefälles muß sich dynamisch bei genügender Stärke in derselben Weise auswirken.

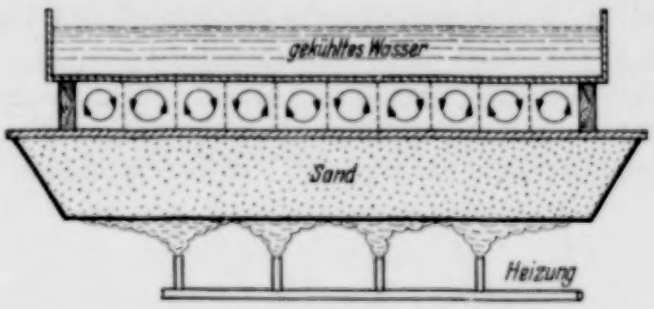


Abb. 2. Versuchsanordnung von *P. Idrac*, nach 8.

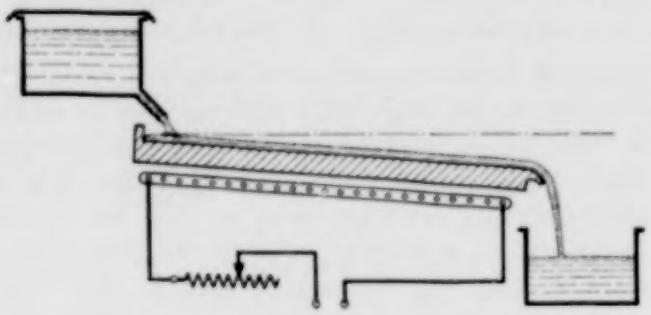


Abb. 3. Versuchsanordnung von *T. Terada*, nach 8.

Indem wir nachfolgend zeigen, daß in der Tat zwischen beiden Instabilitäten eine unmittelbare Analogie besteht, geben wir zugleich erstmals eine befriedigende Theorie dieser zunächst 1921 von *P. Idrac*[4] entdeckten und später 1928 von *T. Terada*[5] wiederentdeckten Erscheinung der „tourbillons en bandes" in Strömungen über erwärmte Platten.

Umgekehrt ist die Feststellung und Begründung dieser Analogie auch von Wert für unser Verständnis der Instabilität an konkaven Wänden. Die Längswirbel an konkaven Wänden sind bisher nur indirekt beobachtet worden, sei es vermöge des von ihnen erzeugten Strichmusters auf einer mit Töpferton bestrichenen oder vom Morgentau befeuchteten konkaven Fläche[6], sei es durch den von ihnen eingeleiteten Umschlag in die turbulente Strömungsform[7]. Es ist daher sehr willkommen, daß von den analogen Längswirbeln an erwärmten überströmten Platten bereits seit den Arbeiten von *Idrac* und *Terada* schöne Photographien existieren. *D. Avsec* und *M. Lunc* haben im Zusammenhang mit einer Fülle verwandter Untersuchungen eindrucksvolle Bilder veröffentlicht (vgl. etwa [8]).

Wir geben nach[8] in Abb. 2 die Versuchsanordnung von *Idrac* (mit Luft als strömendes Medium zwischen zwei parallelen Platten, Hauptströmung senkrecht zur Bildebene) und in Abb. 3 jene von *Terada* (der verschiedene Flüssigkeiten über eine leicht geneigte Platte fließen ließ) wieder. Abb. 4 (a und b) zeigt die nach *Idrac* beobachteten longitudinalen Wirbel, die mit Tabakrauch sichtbar gemacht wurden. Die Struktur dieser Wirbelsysteme entspricht ganz jener der longitudinalen Wirbel an konkaven Wänden (Abb. 1) nach unserer Theorie.

---

[1] Ich bin Herrn *M. Lunc*, Polnische Akademie der Wissenschaften, Warschau, dafür dankbar, daß er mich auf die Fülle der schönen Beobachtungen aus jener Zeit gesprächsweise aufmerksam gemacht und mir später bei der Auffindung der Literatur geholfen hat.

[2] *A. C. Phillips* and *G. T. Walker*, Quart. Journ. Roy. Met. Soc. 58 (1932), S. 23—30.

[3] *R. A. Bagnold*, The surface movement of blown sand in relation to meteorology. Proc. Int. Symposium on Desert Research, Jerusalem 1952, S. 89—96. Für den Hinweis auf diesen Vortrag danke ich Herrn *H. J. Schoemaker*, Delft.

[4] *P. Idrac*, Etudes expérimentales sur le vol à voile. Thése, Paris (1921).

[5] *T. Terada*, and Second Year Students of Physics, Some experiments on periodic columnar forms of vortices caused by convection. Reports of the Aeronautical Research Institute, Tôkyô Imperial University, 3 (No. 31) (1928) S. 1—52.

[6] S. Fußnote 4 von S. 71.

[7] S. Fußnote 2 von S. 71.

[8] *D. Avsec* et *M. Luntz*, La Météorologie 3 (1937) S. 180—194.

Auf Anregung von *A. R. Low*[1] hat *H. Jeffreys*[2] im Rahmen seiner theoretischen Behandlung der *Bénard*-Zellen auch kurz die Frage erörtert, wie aus diesen bei Überlagerung einer stationären Grundströmung Längswirbel entstehen können. Hierzu sei auch auf experimentelle Arbeiten von *A. Graham*[3] und *K. Chandra*[4] hingewiesen. Durch eine weitere Bemerkung von *Low*[1] angeregt, hat *Jeffreys*[2] gezeigt, daß eine gewisse, wenn auch nicht vollständige Analogie zwischen der Erscheinung der *Taylor*-Wirbel zwischen konzentrischen rotierenden Zylindern und jener der *Bénard*-Zellen besteht, vgl. auch *Low*[5]. Der Kern dieser Analogie ist natürlich derselbe wie für die in der vorliegenden Arbeit behandelte Analogie zwischen den Längswirbeln an konkaven und an erwärmten Wänden. Es liegt jedoch für unsere Behandlung der letzteren Analogie in der gestaltlichen Übereinstimmung der beiden Phänomene eine günstigere Ausgangsposition vor, und ferner gelangen wir methodisch zu einer größeren Vollständigkeit der darzustellenden Analogie, indem wir die Theorie der thermokonvektiven Längswirbel ganz auf unsere (im Rahmen der Linearisierung übrigens mathematisch strenge) ältere Theorie der Längswirbel an konkaven Wänden zurückführen.

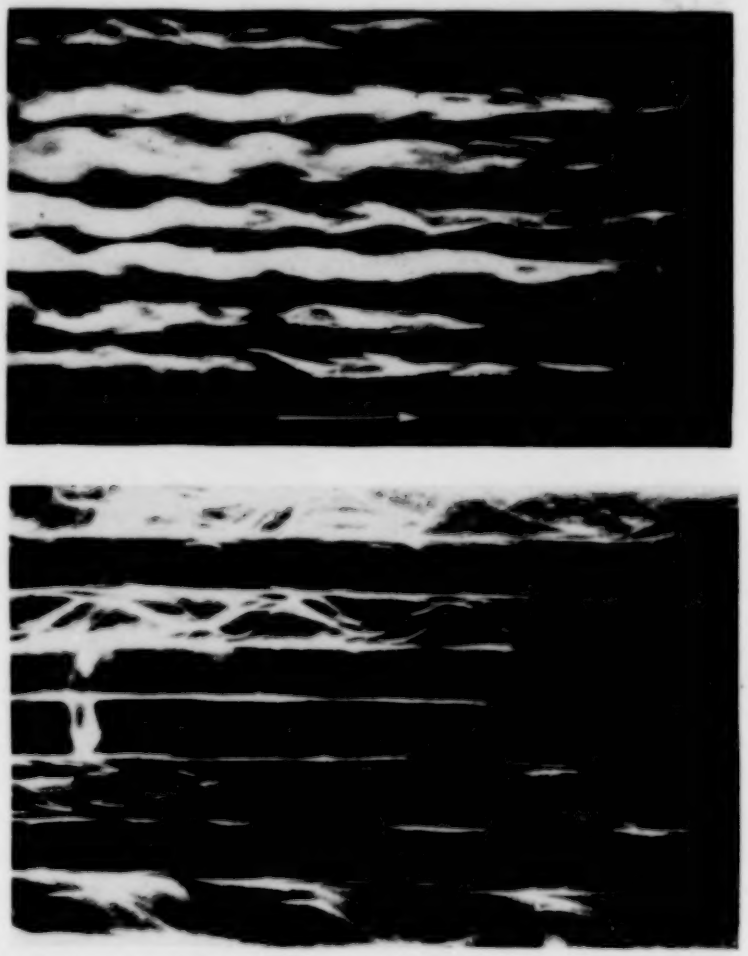


Abb. 4a und b. Longitudinale Wirbel in Luft, von *Idrac* mit Tabakrauch sichtbar gemacht, wiedergegeben nach [9].

Eine wertvolle Übersicht über Konvektionsphänomene in von unten erwärmten Flüssigkeiten gab neuerdings *S. Ostrach*[6].

3. Die Grundgleichungen. Wir werden im folgenden beide Erscheinungen gleichzeitig behandeln. Das Zusammenspiel von Wandkrümmung und Wanderwärmung bzw. ihr Gegeneinanderwirken als Ursachen von Stabilisierung oder Destabilisierung der Grenzschicht führt auf weitere Möglichkeiten, und die Beiträge der beiden durch Krümmung und Erwärmung bedingten Kraftfelder lassen sich in sehr einfacher Weise überschauen.

Da es uns im folgenden nur auf das Grundsätzliche ankommt und wir dieses klar hervortreten lassen wollen, machen wir von jeder Vereinfachung Gebrauch, die sich uns bietet. Es sei jedoch hier ausdrücklich betont, daß diese Vereinfachungen, mit Ausnahme der nachfolgenden Erfassung des Einflusses der Erwärmung als Auftriebskraft, für die Darstellung der Analogie aus den Bewegungsgleichungen *nicht erforderlich* sind. Sie werden nach dem Vorbilde von[7] lediglich dazu eingeführt, die mathematische Lösung der Grundgleichungen zu erleichtern.

Die überströmte Wand — vgl. Abb. 5 — habe einen konstanten Krümmungsradius R, der wieder für eine zur Strömung konkave Wand positiv, für eine zur Strömung konvexe Wand negativ gewählt werden mag. Ist δ ein Maß für die Grenzschichtdicke, so soll $|R| \gg \delta$ sein. Das hat zur Konsequenz, daß wir in den auf die krummlinigen Koordinaten x, y (x Wandbogenlänge, y senkrechter Abstand von der Wand) bezogenen *Navier-Stokes*schen Gleichungen die gleichen Vereinfachungen — Beschränkung auf lineare Terme in δ/R — vornehmen können, wie bereits in [8].

Wir beschränken zugleich unsere Betrachtung auf ein Wandstück $|x| \leq L$ mit $L \ll R$. Die Wandtangente in $x = 0$ liege waagerecht. Dann kann die vertikal wirkende konstante Schwerkraft

[1] *A. R. Low*, Nature **115** (1925) S. 299—300, mit anschließenden Bemerkungen von *D. Brunt*, S. 300—301.
[2] *H. Jeffreys*, Proc. Roy. Soc. London A 118 (1928) S. 195—208.
[3] *A. Graham*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 232 (1933) S. 285—296.
[4] *K. Chandra*, Proc. Roy. Soc. London A 164 (1938) S. 231—242.
[5] *A. R. Low*, Proc. Roy. Soc. London A 125 (1929) S. 180—195.
[6] *S. Ostrach*, Convection phenomena in fluids heated from below. A. S. M. E. Paper No. 55—A—83 (1955).
[7] S. Fußnote 1 von S. 71.
[8] S. Fußnote 1 von S. 71.
[9] S. Fußnote 8 von S. 72.

wegen $L/R \ll 1$ in hier ausreichender erster Näherung durch eine in y-Richtung normal zur Wand wirkende Kraft gleichen Betrags ersetzt werden.

Wie zumeist in den bisherigen Theorien der Grenzschichtstabilität erforderlich, vernachlässigen wir Veränderungen des Strömungs- und Temperaturfeldes in Hauptströmungsrichtung x.

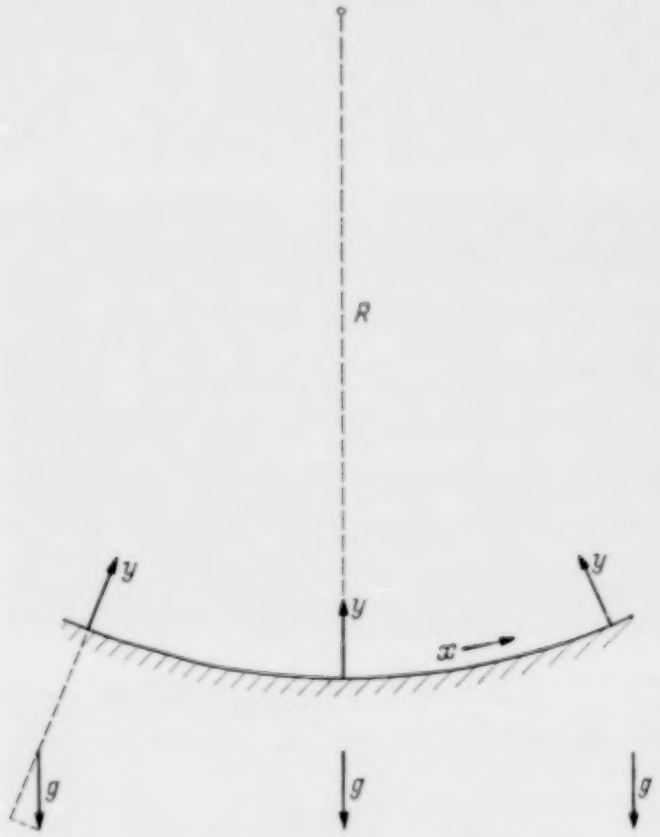


Abb. 5. Koordinatenwahl.

Die Wand habe eine konstante Temperatur T_w, die größer oder kleiner als die ebenfalls konstante Temperatur T_∞ der Flüssigkeit weitab von der Wand sein kann. Wie zumeist bei Untersuchung von Konvektionsströmungen machen wir die Annahme, daß die durch Erwärmung verursachten Dichteänderungen der Flüssigkeit vernachlässigbar bleiben, insofern wir nur ihre Auswirkung auf die Massenkraft der Schwere berücksichtigen. Das geschieht in der wohl erstmals von *Boussinesq*[1] begründeten Weise, daß man eine Auftriebskraft pro Volumeneinheit der Größe $g\,\varrho\,\beta\,(T_w - T_\infty)\,\Theta$ einführt. Hierin ist g die Erdbeschleunigung, ϱ die konstante Dichte, β der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit ($\beta > 0$ konstant im folgenden) und es bezeichnet Θ die zur lokalen Temperatur T gehörige dimensionslos gemachte Temperatur-Differenz gegenüber der Außenströmung: $\Theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$.

Unter diesen Annahmen sind die Bewegungsgleichungen aus[2] nur durch den oben gegebenen und in y-Richtung wirkenden Auftrieb zu ergänzen. Mit z als dritte Koordinate des Rechtssystems x, y, z, also z in Richtung der Erzeugenden des zylindrischen Wandstücks gemessen, und mit u, v, w als Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. y-, z-Richtung sowie schließlich mit p als Druck und ν als konstante kinematische Zähigkeit lauten diese dann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \nu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right\} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{u^2}{R} + g\,\beta\,(T_w - T_\infty)\,\Theta \\
\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \nu\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right\} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet in entsprechender Vereinfachung

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,. \tag{2}$$

Zu diesen Gleichungen tritt nun noch jene für die dimensionslose Temperaturverteilung Θ:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + v\frac{\partial \Theta}{\partial y} + w\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\nu}{Pr}\left\{\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}\right\}. \tag{3}$$

Darin ist Pr die *Prandtl*sche Zahl.

Um das Grundsätzliche herauszuarbeiten genügt es hier, wenn wir uns auf $Pr = 1$ beschränken. Das bringt bekanntlich den großen Vorteil, daß (3) formal mit der ersten Gleichung (1) übereinstimmt und daß wir daher unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\Theta(y,t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad y = 0 \\ 0 & \text{für} \quad y = \infty \end{cases} \qquad u(y,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad y = 0 \\ U_\infty & \text{für} \quad y = \infty \end{cases} \tag{4}$$

— für Flüssigkeitsschichten endlicher Dicke zwischen parallelen Wänden (konzentr. Zylindern) oder mit freier Oberfläche sind die Randbedingungen entsprechend abzuwandeln — den Zusammenhang

[1] *J. Boussinesq*, Théorie Analytique de la Chaleur. Bd. 2, S. 172 (1903); vgl. auch Comptes rendus Acad. Sci. 132 (1901) S. 1382.

[2] S. Fußnote 1 von S. 71.

$$\Theta(y,t) = 1 - \frac{u(y,t)}{U_\infty} \tag{5}$$

erhalten. Dabei ist Verträglichkeit von (5) mit den Anfangsbedingungen bzw. mit der anzusetzenden Zeitabhängigkeit vorausgesetzt. Dies wird bei dem nachfolgenden Störungsansatz erfüllt sein.

Man erkennt hier schon: Der ganze Unterschied gegenüber der Theorie[1] der Instabilität an konkaven Wänden ohne Temperaturunterschiede besteht bei den von uns gemachten und unbedenklichen Vereinfachungen darin, daß an Stelle der Zentrifugalbeschleunigung $-u^2/R$ nun in der zweiten Gleichung (1) die zusammengesetzte Beschleunigung

$$-\frac{u^2}{R} + g\,\beta\,(T_w - T_\infty)\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \tag{6}$$

als das für Stabilität oder Instabilität gegenüber longitudinalen Wirbeln maßgebende Glied auftritt.

Dieses Ergebnis ermöglicht eine sehr einfache Diskussion, ohne daß für die qualitative Darstellung die gesamte Stabilitätstheorie (im wesentlichen ein Eigenwertproblem eines Systems 6. Ordnung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das nach[1] am besten durch Übergang zu den äquivalenten Integralgleichungen behandelt wird) erneut hier durchgeführt werden muß.

4. Longitudinale Wirbel. Hat die ungestörte stationäre Grundströmung die Geschwindigkeitsverteilung $\{u_0(y), 0, 0\}$, den Druck $p_0(y)$ und die Temperaturverteilung $\Theta_0(y)$, so machen wir nun den bereits in[2] benutzten Störungsansatz

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0(y) + u_1(y)\cos\alpha z\, e^{\sigma' t}, \\ v &= v_1(y)\cos\alpha z\, e^{\sigma' t}, \\ w &= w_1(y)\sin\alpha z\, e^{\sigma' t}, \\ p &= p_0(y) + p_1(y)\cos\alpha z\, e^{\sigma' t}, \\ \Theta &= \Theta_0(y) + \Theta_1(y)\cos\alpha z\, e^{\sigma' t}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und setzen ferner

Da u und Θ im Ansatz ihrer Zeitabhängigkeit mit (5) verträglich sind, folgt aus (5)

$$\Theta_0(y) = 1 - \frac{u_0(y)}{U_\infty}, \qquad \Theta_1(y) = -\frac{u_1(y)}{U_\infty}. \tag{8}$$

Die mit dem Index Null behafteten Größen sollen als jene der stationären Grundströmung eine Lösung der Grundgleichungen darstellen (approximativ im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen). Bezüglich der mit dem Index Eins versehenen Störungsamplituden wird linearisiert. Im Vergleich zur Theorie[1] ohne Erwärmung besteht, wie wir feststellten, der einzige Unterschied im Ausdruck (6). Dementsprechend ist nur jene Störungsdifferentialgleichung, die aus der zweiten Gleichung (1) bei Linearisierung hervorgeht, gegenüber jener in[1] zu erweitern: Wo in[1] aus $-u^2/R$ das in u_1 linearisierte Störungsglied $-2\,u_0\,u_1/R$ (unter Weglassung des allen Gliedern der Gleichung gemeinsamen Faktors $\cos\alpha z\, e^{\sigma' t}$) hervorgegangen war, ist jetzt

$$-\left\{\frac{2\,u_0}{R} + \frac{g\,\beta}{U_\infty}(T_w - T_\infty)\right\} u_1 \tag{6'}$$

zu setzen.

Es werde wie in[1] der Eigenwertparameter

$$\mu = 2\left(\frac{U_\infty\,\vartheta}{\nu}\right)^2 \frac{\vartheta}{R} = 2\,Re_\vartheta^3\,\frac{\vartheta}{R} \tag{9}$$

eingeführt (ϑ die Impulsverlustdicke der Grenzschicht). Schreiben wir ferner

$$\eta = y/\vartheta, \qquad U_0(\eta) = \frac{u_0(y)}{U_\infty}, \tag{10}$$

und

$$\sigma = \alpha\,\vartheta, \qquad Gr = \frac{g\,\vartheta^3}{\nu^2}\beta\,(T_w - T_\infty) \tag{11}$$

(*Gr* eine *Grashof*sche Zahl), so ist — das ist das wesentliche Ergebnis dieser Untersuchung — die alte Störungstheorie[1] durch das Hinzukommen eines Temperaturunterschiedes lediglich dahingehend zu modifizieren, daß an jener einen Stelle, wo der Term $-\mu\,U_0(\eta)$ als Koeffizient auftrat, nun

$$-\{\mu\,U_0(\eta) + Gr\} \tag{6''}$$

zu setzen ist.

[1] S. Fußnote 1 von S. 71.

Es ist $U_0(\eta) \geq 0$ (ungestörtes Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht) und

$$\mu \begin{cases} > 0 \text{ an konkaven Wänden } (R > 0) \\ < 0 \text{ an konvexen Wänden } (R < 0) \end{cases}$$

$$Gr \begin{cases} > 0 \text{ an erwärmten Wänden } (T_w > T_\infty) \\ < 0 \text{ an gekühlten Wänden } (T_w < T_\infty) . \end{cases}$$

Unseren Erwartungen entsprechend weist (6″) darauf hin, daß sich eine Erwärmung im selben Sinne wie Konkavität, eine Kühlung im selben Sinne wie Konvexität der Wand auswirken wird.

5. Einige Ergebnisse. Das Studium des Eigenwertproblems im einzelnen — am bequemsten in Form des äquivalenten Integralgleichungsproblems, wie schon in[1] — bietet keine neuen Schwierigkeiten. Die Durchführung der mathematischen Beweisführungen in aller Strenge und die zugehörigen numerischen Auswertungen hat auf meinen Wunsch mein Mitarbeiter *K. Kirchgässner* übernommen. Sein ausführlicher Bericht wird in Kürze gesondert veröffentlicht werden. Hier sollen daraus nur einige qualitative Aussagen gemacht werden um zu unterstreichen, daß unser vereinfachtes Modell des Strömungsvorgangs die erwarteten Ergebnisse in mathematischer Strenge liefert. Wir beschränken uns hierbei auf neutrale Wirbel ($\gamma = 0$).[2]

1. $R > 0$, $T_w > T_\infty$ (konkave, erwärmte Wand). Es existiert für jeden festen Wert von $T_w - T_\infty > 0$ ein kleinster positiver Eigenwert μ ($= 2\, Re_\vartheta^2\, \vartheta/R$), der von $\sigma = \alpha\, \vartheta$ abhängt, d. h. von der Breitenabmessung $\lambda = 2\pi/\alpha = 2\pi\, \vartheta/\sigma$ eines Wirbelpaares (Periode der Wirbelanordnung). Die Kurve $\mu(\sigma)$ hat ein Minimum, und den Wert dieses Minimums nennen wir im folgenden den kritischen Eigenwert. (Die Stelle σ des Minimums gibt die Abmessung jener Wirbel, die mit wachsender *Reynolds*scher Zahl oder wachsender Krümmung erstmals nicht mehr gedämpft werden; oberhalb des kritischen Eigenwerts existieren angefachte Wirbel.) Aus dem zugrunde liegenden Integralgleichungsproblem folgert man leicht, daß der kritische Eigenwert monoton abnimmt mit wachsender Temperaturdifferenz $T_w - T_\infty$. Anders gesagt: Je größer die Wanderwärmung, desto kleiner ist die für das Eintreten der Instabilität erforderliche Wandkrümmung.

2. $R < 0$, $T_w > T_\infty$ (konvexe, erwärmte Wand). Wird die Temperaturdifferenz groß genug, so nimmt der kritische Eigenwert μ schließlich soweit ab, daß er negative Werte erreicht, d. h. die Instabilität kann auch an konvexen Wänden auftreten, jedoch erst bei größerer Temperaturdifferenz $T_w - T_\infty$ als an der konkaven (oder ebenen) Wand. Einschränkend muß hierzu zweierlei bemerkt werden: a) Unser vereinfachtes Modell der Strömung ist an die Voraussetzung nicht zu großer Temperaturdifferenzen gebunden. b) Die Grenzschichtströmungen an ebenen und an konvexen Wänden (sogar an extrem schwach konkaven Wänden) können eventuell, bevor instabile Längswirbel möglich werden, bereits gegenüber *Tollmien-Schlichting*schen Wellen instabil geworden sein. Je nach Erwärmung hängt das von der *Reynolds*schen Zahl und von der für diese andere Instabilität entscheidende Gestalt des Geschwindigkeitsprofils $U_0(\eta)$ im einzelnen ab.

3. $R > 0$, $T_w < T_\infty$ (konkave, gekühlte Wand). Hier gilt streng, wie nun zu erwarten: Mit zunehmender (im Rahmen unserer Modellvoraussetzungen nicht zu starker) Kühlung nimmt der kritische Eigenwert zu, d. h. die Längswirbel werden zwar selbst noch bei Wandkühlung instabil, aber erst bei stärkerer Wandkrümmung als im Falle ungekühlter Wand, immer bei Annahme des gleichen Grenzschichtprofils $U_0(\eta)$. (Hier muß einschränkend bemerkt werden, daß unsere Theorie an die Voraussetzung $\delta/R \ll 1$ gebunden ist.) Es kann die Grenzschicht an einer konkaven Wand durch Kühlung eventuell soweit stabilisiert werden, daß bei wachsender *Reynolds*scher Zahl zuerst Instabilität gegenüber *Tollmien-Schlichting*sche Wellen eintritt.

4. $R < 0$, $T_w < T_\infty$ (konvexe, gekühlte Wand). Hier wirken beide Einflüsse stabilisierend. Schon für $T_w = T_\infty$ ist die Strömung an konvexen Wänden stets gegenüber Längswirbeln stabil. Wie zu erwarten, existieren erst recht für $T_w < T_\infty$ keine instabilen oder neutralen Längswirbel an konvexen Wänden.

5. $R = \infty$ (ebene Wand). Dies ist der Fall der Experimente von *Idrac*, *Terada* u. a (s. oben). Für $\mu = 0$ wird die der Instabilitätstheorie zugrunde liegende Integralgleichung besonders einfach

[1] S. Fußnote 1 S. 71.

[2] Die Tatsache, daß in (6″) der Term $\mu\, U_0(\eta)$ eine Funktion von η ist ($U_0(\eta) \geq 0$), Gr dagegen eine Konstante, bedeutet keine wesentliche Beeinträchtigung der Analogie. In der zum Eigenwertproblem äquivalenten Integralgleichung erscheint (6″) als Kernfaktor unter dem Integral, wird also einer gewissen Mittelbildung unterworfen. Ich verweise auf den angekündigten Bericht von *Kirchgässner*.

(weil nämlich der Koeffizient (6″) nun eine Konstante ist $= -Gr$). Angefachte oder neutrale Längswirbel existieren nur für erwärmte Wände ($Gr > 0$), und zwar muß diese Erwärmung in qualitativer Übereinstimmung mit den Experimenten eine gewisse Mindestgröße erreichen oder überschreiten. Dieser Wert für neutrale Wirbel, ausgedrückt etwa durch die zugehörige *Grashof*sche Zahl Gr, ist natürlich wieder von σ abhängig.

Eine numerische Auswertung von $Gr(\sigma)$ für neutrale Wirbel bei Zugrundelegung der *Blasius*schen Plattengrenzschicht wurde von meinem Mitarbeiter *K. Kirchgässner* vorgenommen. Als kritische *Grashof*sche Zahl (Minimalwert) erhält man etwa $Gr = 0{,}17$. Für Strömungen einer Flüssigkeitsschicht mit freier Oberfläche (*Terada*) oder zwischen zwei ebenen Wänden (*Idrac*) sowie für $Pr \neq 1$ wird das Zahlenergebnis anders lauten. Ich verweise auf den angekündigten Bericht von *Kirchgässner*.

Das Hauptergebnis der gesamten Betrachtung kann qualitativ durch Abb. 6 zusammengefaßt werden: Der kritische Parameter $Re^2\,\vartheta/R$ nimmt mit wachsender *Grashof*scher Zahl ab. (Sein Durchgang durch Null ist der Fall der ebenen Wand.) Für sehr große positive und für vom Betrag große negative Gr-Werte ist die Aussage nur durch die Annahme unseres Modells beschränkt, wonach $|Gr|$ nur so große Werte annehmen darf, daß der *Boussinesq*sche Auftriebsansatz benutzt werden darf.

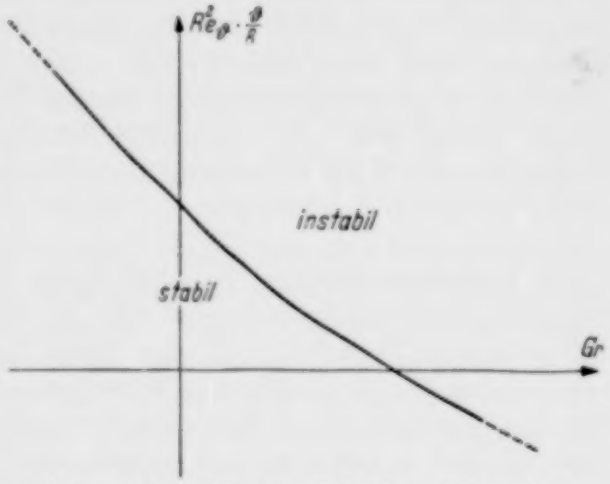


Abb. 6. Kritischer Wert von $Re^2_\vartheta\,\vartheta/R$ in Abhängigkeit von Gr (qualitativ).

Es sei noch hervorgehoben, daß bei unseren Vergleichsaussagen (zusammengefaßt in Abb. 6) ein festes (aber beliebiges) dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil $U_0(\eta)$ zugrunde gelegt ist. Dabei wird nur Rückströmung ausgeschlossen: $U_0(\eta) \geq 0$.

Numerische Aussagen sind natürlich nur unter Zugrundelegung eines fest gewählten Profils $U_0(\eta)$ möglich. In der früheren Theorie[1] ($T_w = T_\infty$) erwies sich der kritische Eigenwert jedoch als praktisch (wenn auch nicht exakt) unabhängig von der Profilform bei der auch oben gewählten Größe ϑ als Maß für die Grenzschichtdicke. Es ist zu vermuten, daß dies auch für $Gr \neq 0$ gelten wird.

6. Schlußbemerkung: Sekundäre Instabilität. Während (vgl. Theorie in [2]) Grenzschichten, die gegenüber *Tollmien-Schlichting*schen Wellen instabil sind, bei ausreichender (praktisch noch sehr

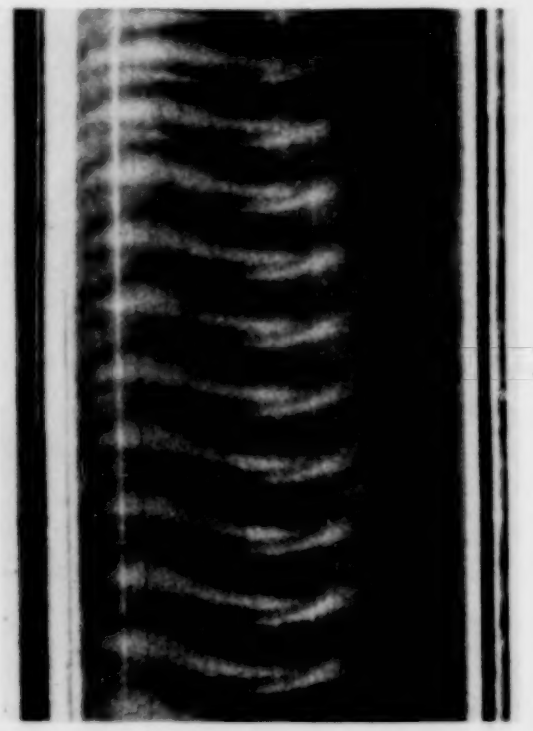


Abb. 7. Wellige Störung der *Taylor*-Wirbel zwischen koaxialen Zylindern bei überkritischer Drehgeschwindigkeit des inneren Zylinders, nach *Schultz-Grunow*[3].

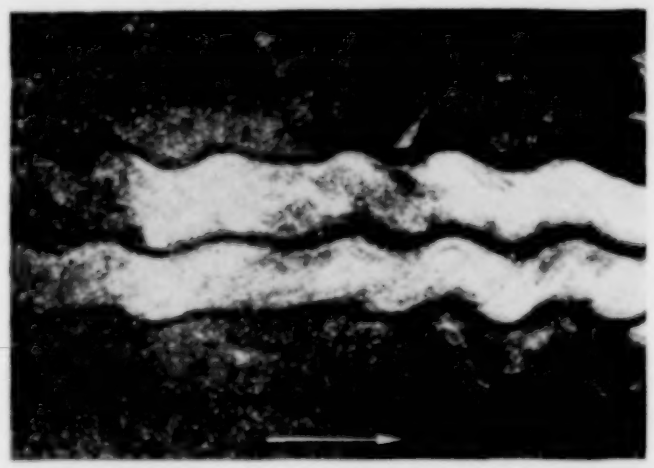


Abb. 8. Wellige Störung der longitudinalen Wirbel zwischen ebenen horizontalen Wänden bei überkritischer Erwärmung von unten, nach *Avsec*[4].

[1] S. Fußnote 1 von S. 71
[2] S. Fußnote 5 von S. 71
[3] S. Fußnote 1 von S. 78
[4] S. Fußnote 2 von S. 78

kleiner) Wellenamplitude sekundär gegenüber longitudinalen Wirbeln instabil werden können, können auch umgekehrt, wie experimentell erwiesen ist, Strömungen, die primär gegenüber longitudinalen Wirbeln instabil geworden sind, sekundär wellenartig instabil werden: Die Längswirbel werden von einer wellenartig über ihre Achsenrichtung verlaufenden Störung überlagert. Besonders schön ist dies am Falle der *Taylor*-Wirbel zwischen koaxialen Zylindern von *Schultz-Grunow*[1] demonstriert worden, vgl. Abb. 7.

Es ist interessant, daß sich die in der vorliegenden Untersuchung behandelte Analogie auch auf diese Erscheinung erstreckt (was vermuten läßt, daß sie auch im Rahmen einer linearisierten Störungstheorie theoretisch erfaßbar sein wird, d. h. bei noch relativ schwachen Längswirbeln bereits einsetzt). Zum Beleg dessen ist in Abb. 8 ein Beobachtungsergebnis von *D. Avsec*[2] wiedergegeben. Die Strömung verläuft zwischen ebenen horizontalen Wänden bei Erwärmung von unten. Dabei ist die Temperaturdifferenz beider Wände größer als zur Erreichung der Instabilität gegenüber longitudinalen Wirbeln erforderlich. Die zuvor streng geradlinigen Wirbel gehen dann in diese wellig verformte Gestalt über.

7. Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß die von *Idrac* (1921) und *Terada* (1928) unabhängig voneinander entdeckten Längswirbel in Strömungen über erwärmten Platten, für die bisher eine befriedigende Theorie fehlte, das thermokonvektive Analogon zu der dynamischen Instabilitätserscheinung der longitudinalen Wirbel in Grenzschichtströmungen an konkaven Wänden darstellen. Für das Bestehen dieser Wirbel an erwärmten Wänden ist die Erreichung einer gewissen kritischen *Grashof*-Zahl notwendig und hinreichend. — Bei Zusammenwirken von Wandkrümmung und Wanderwärmung bzw. -kühlung kann die stabilisierende Wirkung des einen Effektes durch die instabilisierende Wirkung des anderen überboten werden oder umgekehrt. Die Erfassung der beiden Einflüsse in ihrer gegenseitigen Relation ist einfach und im Rahmen der Linearisierung der vorliegenden Störungstheorie in aller mathematischen Strenge angebbar. Diese Störungstheorie setzt schwache Wandkrümmung und relativ kleine Temperaturunterschiede voraus.

(Eingegangen am 15. November 1958)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Görtler*, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Freiburg i. Br., Hebelstr. 40.

[1] *F. Schultz-Grunow* und *H. Hein*, Z. f. Flugwiss. 4 (1956) S. 28—30.
[2] *D. Avsec*, Comptes rendus Acad. Sci. 204 (1937) S. 167—169.

Zur Tilgung geradliniger Schwingungen mit Hilfe des Zentrifugalpendels

Von **G. Heinrich** und **K. Desoyer**

1. Einleitung. Zur Tilgung geradliniger Schwingungen wurde u. a. eine Anordnung vorgeschlagen, die aus abgestimmten Pendeln besteht, welche an einer rotierenden Welle angelenkt sind, so daß sie in einer die Wellenachse enthaltenden Ebene schwingen können (Abb. 1). Der Vorschlag sowie eine Behandlung nach der Methode der kleinen Schwingungen stammen von *F. E. Reed*[1]. Im folgenden soll eine Erweiterung der genannten Untersuchungen durch Einbeziehung einer Dämpfung für die zu tilgende Schwingung, der Schwerkraftwirkung und Berücksichtigung nichtlinearer Terme in den Ausgangsgleichungen durchgeführt werden.

Nach der linearisierten Theorie könnte man bei Einhaltung einer „Abstimmbedingung" die Schwingung vollständig tilgen, solange man den Tilger als ungedämpft ansieht. Die linearisierte Theorie liefert daher keinen Anhaltspunkt für die Bemessung des Tilgers. Will man nämlich erreichen, daß der ohne Tilger vorhandene Schwingungsausschlag durch den Tilger auf einen bestimmten Bruchteil herabgedrückt wird, so kann man diesen Restausschlag aus der linearisierten Theorie nicht gewinnen. Durch Einführung einer Tilgerdämpfung erhält man zwar auch in der linearisierten Theorie einen Restausschlag, doch zeigt sich, daß auch die nichtlinearen Terme einen Restausschlag liefern. Er kann, wie in einem Zahlenbeispiel gezeigt werden soll, weit größer als der durch die Tilgerdämpfung verursachte sein. Um daher zu einer verläßlichen Dimensionierungsgrundlage für solche Tilger zu kommen, ist die Einbeziehung nichtlinearer Terme unbedingt erforderlich.

2. Bewegungsgleichungen. Wir betrachten folgende Anordnung: eine auf Federn gelagerte Masse m_1 wird durch eine periodische Kraft

$$P = P_0 \sin \omega t \tag{1}$$

zu Translationsschwingungen angeregt. Diese Kraft rührt z. B. von der Unwucht einer Maschine her. Zur Tilgung dieser Schwingungen wird von der Maschinenwelle mittels einer Übersetzung eine

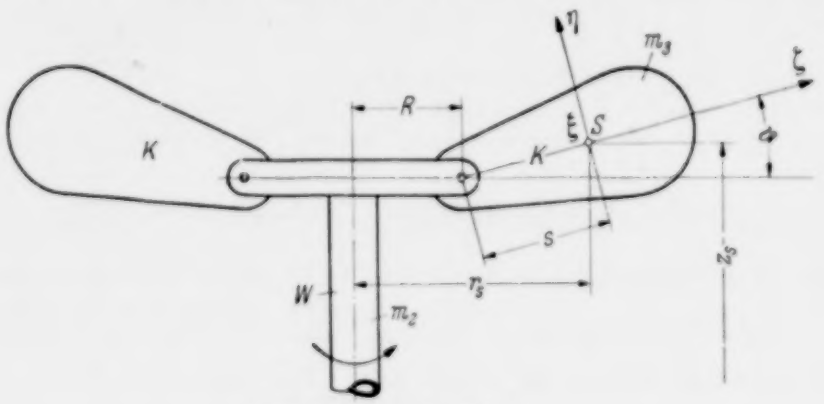


Abb. 1. Schema des Tilgers.

Welle W angetrieben, auf der Pendelkörper K drehbar gelagert sind (Abb. 1). Die Welle W rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\psi} = \nu\, \omega\,, \tag{2}$$

wobei ν ein durch die Übersetzung und durch die Ordnung der zu tilgenden Kreisfrequenz ω bestimmter Festwert ist. Wir bezeichnen mit:

a, b, c die Hauptträgheitsradien eines Pendelkörpers in bezug auf seinen Schwerpunkt (Hauptträgheitsachsen ξ, η, ζ),

w Trägheitsradius der Welle W mit Pendelträger in bezug auf ihre Drehachse,

$\varkappa$ Federkonstante der Federn,

l_0 Längen der unbelasteten Federn,

[1] *F. E. Reed*, Journ. of appl. Mech., (1949), S. 190—194.

z bzw. z_S von einem Fixpunkt nach oben positiv gezählte vertikale Ortskoordinate eines körperfesten Punktes der Masse m_1 bzw. des Schwerpunktes eines Pendelkörpers,
z_0 eine Konstante, die so gewählt wird, daß die Federkraft $\varkappa\,(z + z_0 - l_0)$ ist,
ψ Drehwinkel der Welle W, von einer beliebigen Anfangslage aus gezählt,
M_D das auf die Welle W wirkende Antriebsdrehmoment (abzüglich dem Reibungsmoment),
n Anzahl der verwendeten Pendelkörper.

Die restlichen Bezeichnungen sind aus Abb. 1 zu ersehen.

Um die Einführung von Zwangskräften, wie sie *F. E. Reed* verwendet, zu vermeiden, gehen wir von den *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen zweiter Art aus, wobei wir als verallgemeinerte Koordinaten z, ϑ und ψ verwenden (3 Freiheitsgrade)[1]. Bei Vernachlässigung der Federmasse besteht die Bewegungsenergie des Systems aus dem Anteil T_1 der Masse m_1, dem Anteil T_2 der Masse m_2 (Welle W mit Pendelträger) und der Bewegungsenergie $n\ T_3$ der n Pendelkörper. Es ist

$$T_1 = \frac{m_1}{2}\,\dot{z}^2, \tag{3}$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\,(\dot{z}^2 + w^2\,\dot{\psi}^2). \tag{4}$$

Zur Berechnung von T_3 ermitteln wir zunächst die Geschwindigkeit v_S des Schwerpunktes eines Pendelkörpers. Es gilt

$$v_S^2 = \dot{z}_S^2 + \dot{r}_S^2 + (r_S\,\dot{\psi})^2. \tag{5}$$

Mit

$$z_S = z + s\sin\vartheta + \text{Const} \tag{6}$$

und

$$r_S = R + s\cos\vartheta\,, \tag{7}$$

wird

$$v_S^2 = (\dot{z} + s\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta)^2 + (-s\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta)^2 + (R + s\cos\vartheta)^2\,\dot{\psi}^2. \tag{8}$$

Reduziert man den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}$ des Pendelkörpers in dessen Schwerpunkt und zerlegt ihn nach den Richtungen der Hauptträgheitsachsen, so erhält man

$$\Omega_\xi = -\dot{\vartheta}\,, \qquad \Omega_\eta = \dot{\psi}\cos\vartheta\,, \qquad \Omega_\zeta = \dot{\psi}\sin\vartheta\,. \tag{9}$$

Die gesamte Bewegungsenergie T_3 eines Pendelkörpers ist

$$T_3 = \frac{m_3}{2}\,(v_S^2 + a^2\,\Omega_\xi^2 + b^2\,\Omega_\eta^2 + c^2\,\Omega_\zeta^2)\,. \tag{10}$$

Die Bewegungsenergie T des ganzen Systems ist daher

$$T = T_1 + T_2 + n\,T_3 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2 + n\,m_3)\,\dot{z}^2 + \frac{n\,m_3}{2}\,(s^2 + a^2)\,\dot{\vartheta}^2 + n\,m_3\,s\,\dot{z}\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$
$$+ \frac{1}{2}\,\{m_2\,w^2 + n\,m_3\,[(R + s\cos\vartheta)^2 + b^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta]\}\,\dot{\psi}^2. \tag{11}$$

Die elementare Arbeit der eingeprägten Kräfte ist

$$\delta A = P(t)\,\delta z - (m_1 + m_2)\,g\,\delta z - n\,m_3\,g\,\delta z_S - \varkappa\,(z + z_0 - l_0)\,\delta z + M_D(t)\,\delta\psi - f_z\,\dot{z}\,\delta z - n\,f_\vartheta\,\dot{\vartheta}\,\delta\vartheta\,. \tag{12}$$

Hierin bedeuten die einzelnen Terme der Reihe nach: die Arbeiten der erregenden Kraft, der auf die Massen m_1, m_2 und m_3 wirkenden Schwerkraft, der Federkraft und des auf die Welle W wirkenden Antriebsmomentes. Die beiden letzten Terme sind die Arbeiten der auf das Fundament bzw. auf die Pendelkörper wirkenden Dämpfungskräfte. Unter Beachtung von (6) wird aus (12)

$$\delta A = [P(t) - (m_1 + m_2 + n\,m_3)\,g - f_z\,\dot{z} - \varkappa\,(z + z_0 - l_0)]\,\delta z$$
$$- (n\,m_3\,g\,s\cos\vartheta + n\,f_\vartheta\,\dot{\vartheta})\,\delta\vartheta + M_D(t)\,\delta\psi\,. \tag{13}$$

Die verallgemeinerten Kräfte Q_z, Q_ϑ und Q_ψ ergeben sich durch Vergleich der Beziehung

$$\delta A = Q_z\,\delta z + Q_\vartheta\,\delta\vartheta + Q_\psi\,\delta\psi$$

mit (13) zu

$$\left.\begin{aligned} Q_z &= P(t) - (m_1 + m_2 + n\,m_3)\,g - \varkappa\,(z + z_0 - l_0) - f_z\,\dot{z}\,,\\ Q_\vartheta &= -\,n\,m_3\,g\,s\cos\vartheta - n\,f_\vartheta\,\dot{\vartheta}\,,\\ Q_\psi &= M_D(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

[1] Das System besitzt eigentlich $n + 2$ Freiheitsgrade, doch sollen hier nur periodische Lösungen betrachtet werden, bei denen die Pendelkörper synchron schwingen.

Die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen zweiter Art lauten für die verallgemeinerten Koordinaten z, ϑ und ψ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial T}{\partial z}=Q_z\,,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \vartheta}=Q_\vartheta\,,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}=Q_\psi\,. \tag{15}$$

Mit (1), (11) und (14) ergeben die Gleichungen (15) die drei Beziehungen

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2+n\,m_3)\,\ddot{z}+n\,m_3\,s\,(\ddot{\vartheta}\cos\vartheta-\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta)\\&\qquad=P_0\sin\omega\,t-[(m_1+m_2+n\,m_3)\,g+\varkappa\,(z+z_0-l_0)]-f_z\,\dot{z}\,,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}&n\,m_3\{\ddot{z}\,s\cos\vartheta+(s^2+a^2)\,\ddot{\vartheta}+[s\,(R+s\cos\vartheta)+(b^2-c^2)\cos\vartheta]\,\dot{\psi}^2\sin\vartheta\}\\&\qquad=-n\,m_3\,g\,s\cos\vartheta-n\,f_\vartheta\,\dot{\vartheta}\,,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\{m_2\,w^2+n\,m_3\,[(R+s\cos\vartheta)^2+b^2\cos^2\vartheta+c^2\sin^2\vartheta]\}\,\ddot{\psi}\\&\qquad-2\,n\,m_3\,\dot{\vartheta}\,\dot{\psi}\,[R\,s+(s^2+b^2-c^2)\cos\vartheta]\sin\vartheta=M_D(t)\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Wir verfügen über die bisher noch unbestimmte Konstante z_0 in (16) so, daß

$$(m_1+m_2+n\,m_3)\,g+\varkappa\,(z_0-l_0)=0 \tag{19}$$

wird.

Da, wie vorne erwähnt, die Tilgerwelle W über eine Übersetzung von der betrachteten Maschine her angetrieben wird, kann die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}=\nu\,\omega$ der Tilgerwelle mit genügender Genauigkeit als konstant angesehen werden. In diesem Falle ist in (18) $\ddot{\psi}=0$ zu setzen und die verbleibende Gleichung gibt die Größe des auf die Tilgerwelle übertragenen Antriebsmomentes an, das jedoch für das Folgende nicht von Interesse ist. Wir setzen

$$\omega\,t=\tau \tag{20}$$

und bezeichnen die Ableitungen nach τ durch Striche. Faßt man nun z', z'', ϑ, ϑ' und ϑ'' als „kleine Größen" auf und entwickelt die Gleichungen (16) und (17) in Potenzreihen bis zu Termen dritter Ordnung in diesen Größen, so erhält man bei Verwendung von (2) mit den nachstehenden Abkürzungen die dimensionslosen Gleichungen

$$z^{*\prime\prime}+f_z^*\,z^{*\prime}+\varkappa^*\,z^*+m^*\left[\vartheta''\left(1-\frac{1}{2}\,\vartheta^2\right)-\vartheta\,\vartheta'^2\right]=P_0^*\sin\tau\,, \tag{21}$$

$$z^{*\prime\prime}\left(1-\frac{1}{2}\,\vartheta^2\right)+a^*\,\vartheta''+f_\vartheta^*\,\vartheta'+(R^*+b^*)\,\vartheta-\frac{1}{6}\,(R^*+4\,b^*)\,\vartheta^3=-g^*\left(1-\frac{1}{2}\,\vartheta^2\right). \tag{22}$$

Hierin bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}&z^*=\frac{z}{s}\,,\qquad R^*=\frac{R}{s}\,\nu^2\,,\qquad a^*=\frac{s^2+a^2}{s^2}\,,\qquad b^*=\frac{s^2+b^2-c^2}{s^2}\,\nu^2\,,\\&P_0^*=\frac{P_0}{(m_1+m_2+n\,m_3)\,s\,\omega^2}\,,\qquad m^*=\frac{n\,m_3}{m_1+m_2+n\,m_3}\,,\qquad g^*=\frac{g}{s\,\omega^2}\,,\\&\varkappa^*=\frac{\varkappa}{(m_1+m_2+n\,m_3)\,\omega^2}\,,\qquad f_z^*=\frac{f_z}{(m_1+m_2+n\,m_3)\,\omega}\,,\qquad f_\vartheta^*=\frac{f_\vartheta}{m_3\,s^2\,\omega}\,.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

3. Lösung der Bewegungsgleichungen. Zur Integration der Gleichungen (21) und (22) sollen $z(\tau)$ und $\vartheta(\tau)$ als *Fourier*-Reihen in komplexer Darstellung

$$z^*=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k\,e^{i\,k\,\tau}\,, \tag{24}$$

$$\vartheta=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}B_k\,e^{i\,k\,\tau} \tag{25}$$

angesetzt werden. Da z^* und ϑ reell sind, muß gelten

$$A_{-k}=\bar{A}_k\qquad\text{und}\qquad B_{-k}=\bar{B}_k\,, \tag{26}$$

wobei die Querstriche den Übergang zur konjugiert komplexen Größe bedeuten. Führt man die Ansätze (24) und (25) in die Gleichungen (21) und (22) ein, dann erhält man die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned}&\sum_k[(\varkappa^*-k^2+i\,k\,f_z^*)\,A_k-m^*\,k^2\,B_k]\,e^{i\,k\,\tau}\\&\qquad+\sum_k\sum_l\sum_m m^*\left(\frac{k^2}{2}+l\,m\right)B_k\,B_l\,B_m\,e^{i\,(k+l+m)\,\tau}=\frac{P_0^*}{2\,i}\,(e^{i\,\tau}-e^{-i\,\tau})\,,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\sum_k[-k^2\,A_k+(R^*+b^*-k^2\,a^*+i\,k\,f_\vartheta^*)\,B_k]\,e^{i\,k\,\tau}-\frac{g^*}{2}\sum_k\sum_l B_k\,B_l\,e^{i\,(k+l)\,\tau}\\&\qquad+\sum_k\sum_l\sum_m\left[\frac{1}{2}\,k^2\,A_k-\frac{1}{6}\,(R^*+4\,b^*)\,B_k\right]B_l\,B_m\,e^{i\,(k+l+m)\,\tau}=-g^*.\end{aligned} \tag{28}$$

Die Ermittlung der Koeffizienten A_j und B_j soll nach der Methode von *Galerkin* erfolgen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir (27) und (28) mit $e^{i\alpha\tau}$ (α ganzzahlig) und integrieren von 0 bis 2π. Wir beschränken uns dabei auf die Näherung, k, l und m nur die Werte -3 bis $+3$ durchlaufen zu lassen. Man erhält auf diese Weise, unter Beachtung der Beziehungen (26) und

$$\int_0^{2\pi} e^{i\beta\tau}\,d\tau = \begin{cases} 0 \text{ wenn } \beta \neq 0 \text{ und ganzzahlig,} \\ 2\pi \text{ wenn } \beta = 0\,, \end{cases} \tag{29}$$

der Reihe nach für $\alpha = 0, -1, -2, -3$ aus (27) die Gleichungen

$$A_0 = 0\,, \tag{30}$$

$$(\varkappa^* - 1 + i f_z^*)\,A_1 - m^*\,B_1 + \frac{m^*}{2}[(B_0^2\,B_1 + B_1^2\,\bar{B}_1 + \bar{B}_1^2\,B_3 + B_2^2\,\bar{B}_3) + 2\,(B_0\,\bar{B}_1\,B_2 + B_0\,\bar{B}_2\,B_3 + B_1\,B_2\,\bar{B}_2 + B_1\,B_3\,\bar{B}_3)] = \frac{P_0^*}{2\,i}\,, \tag{31}$$

$$(\varkappa^* - 4 + i\,2 f_z^*)\,A_2 - 4\,m^*\,B_2 + 2\,m^*\,[(B_0^2\,B_2 + B_0\,B_1^2 + B_2^2\,\bar{B}_2) + 2\,(B_0\,\bar{B}_1\,B_3 + B_1\,\bar{B}_1\,B_2 + B_1\,\bar{B}_2\,B_3 + B_2\,B_3\,\bar{B}_3)] = 0\,, \tag{32}$$

$$(\varkappa^* - 9 + i\,3 f_z^*)\,A_3 - 9\,m^*\,B_3 + \frac{3}{2}\,m^*\,[3\,(B_0^2\,B_3 + \bar{B}_1\,B_2^2 + B_3^2\,\bar{B}_3) + 6\,(B_0\,B_1\,B_2 + B_1\,\bar{B}_1\,B_3 + B_2\,\bar{B}_2\,B_3) + B_1^3] = 0 \tag{33}$$

und aus (28) die Gleichungen

$$(R^* + b^*)\,B_0 + g^* - \frac{g^*}{2}\,[B_0^2 + 2\,(B_1\,\bar{B}_1 + B_2\,\bar{B}_2 + B_3\,\bar{B}_3)] + A_1\,(B_0\,\bar{B}_1 + B_1\,\bar{B}_2 + B_2\,\bar{B}_3) + \bar{A}_1\,(B_0\,B_1 + \bar{B}_1\,B_2 + \bar{B}_2\,B_3) + 2\,A_2\,[\bar{B}_1^2 + 2\,(B_0\,\bar{B}_2 + B_1\,\bar{B}_3)] + 2\,\bar{A}_2\,[B_1^2 + (2\,B_0\,B_2 + \bar{B}_1\,B_3)] + 9\,A_3\,(B_0\,\bar{B}_3 + B_1\,\bar{B}_2) + 9\,\bar{A}_3\,(B_0\,B_3 + B_1\,B_2) - \frac{1}{6}\,(R^* + 4\,b^*)\,[6\,B_0\,(B_1\,\bar{B}_1 + B_2\,\bar{B}_2 + B_3\,\bar{B}_3) + 6\,(B_1\,B_2\,\bar{B}_3 + \bar{B}_1\,\bar{B}_2\,B_3) + 3\,(B_1^2\,\bar{B}_2 + \bar{B}_1^2\,B_2) + B_0^3] = 0\,, \tag{34}$$

$$-A_1 + (R^* + b^* - a^* + i f_\delta^*)\,B_1 - g^*\,(B_0\,B_1 + \bar{B}_1\,B_2 + \bar{B}_2\,B_3) + \frac{1}{2}\,A_1\,[B_0^2 + 2\,(B_1\,\bar{B}_1 + B_2\,\bar{B}_2 + B_3\,\bar{B}_3)] + \frac{1}{2}\,\bar{A}_1\,[B_1^2 + 2\,(B_0\,B_2 + \bar{B}_1\,B_3)] + 4\,A_2\,(B_0\,\bar{B}_1 + B_1\,\bar{B}_2 + B_2\,\bar{B}_3) + 4\,\bar{A}_2\,(B_0\,B_3 + B_1\,B_2) + \frac{9}{2}\,A_3\,[\bar{B}_1^2 + 2\,(B_0\,\bar{B}_2 + B_1\,\bar{B}_3)] + \frac{9}{2}\,\bar{A}_3\,(2\,B_1\,B_3 + B_2^2) - \frac{1}{2}\,(R^* + 4\,b^*)\,[2\,(B_0\,\bar{B}_1\,B_2 + B_0\,\bar{B}_2\,B_3 + B_1\,B_2\,\bar{B}_2 + B_1\,B_3\,\bar{B}_3) + B_0^2\,B_1 + B_1^2\,B_1 + \bar{B}_1^2\,B_3 + B_2^2\,\bar{B}_3] = 0\,, \tag{35}$$

$$-4\,A_2 + (R^* + b^* - 4\,a^* + i\,2 f_\delta^*)\,B_2 - \frac{g^*}{2}\,[B_1^2 + 2\,(B_0\,B_2 + \bar{B}_1\,B_3)] + A_1\,(B_0\,B_1 + \bar{B}_1\,B_2 + \bar{B}_2\,B_3) + \bar{A}_1\,(B_0\,B_3 + B_1\,B_2) + 2\,A_2\,[B_0^2 + 2\,(B_1\,\bar{B}_1 + B_2\,\bar{B}_2 + B_3\,\bar{B}_3)] + 2\,\bar{A}_2\,(B_2^2 + 2\,B_1\,B_3) + 9\,A_3\,(B_0\,\bar{B}_1 + B_1\,\bar{B}_2 + B_2\,\bar{B}_3) + 9\,\bar{A}_3\,B_2\,B_3 - \frac{1}{2}\,(R^* + 4\,b^*)\,[2\,(B_0\,\bar{B}_1\,B_3 + B_1\,\bar{B}_1\,B_2 + B_1\,\bar{B}_2\,B_3 + B_2\,B_3\,\bar{B}_3) + B_0\,B_1^2 + B_0^2\,B_2 + B_2^2\,\bar{B}_2] = 0\,, \tag{36}$$

$$-9\,A_3 + (R^* + b^* - 9\,a^* + i\,3 f_\delta^*)\,B_3 - g^*\,(B_0\,B_3 + B_1\,B_2) + \frac{1}{2}\,A_1\,[B_1^2 + 2\,(B_0\,B_2 + \bar{B}_1\,B_3)] + \frac{1}{2}\,\bar{A}_1\,(B_2^2 + 2\,B_1\,B_3) + 4\,A_2\,(B_0\,B_1 + \bar{B}_1\,B_2 + \bar{B}_2\,B_3) + 4\,\bar{A}_2\,B_2\,B_3 + \frac{9}{2}\,A_3\,[B_0^2 + 2\,(B_1\,\bar{B}_1 + B_2\,\bar{B}_2 + B_3\,\bar{B}_3)] + \frac{9}{2}\,\bar{A}_3\,B_3^2 - \frac{1}{6}\,(R^* + 4\,b^*)\,[6\,(B_0\,B_1\,B_2 + B_1\,\bar{B}_1\,B_3 + B_2\,\bar{B}_2\,B_3) + 3\,(B_0^2\,B_3 + \bar{B}_1\,B_2^2 + B_3^2\,\bar{B}_3) + B_1^3] = 0\,. \tag{37}$$

Für die Werte $\alpha = 1, 2, 3$ erhält man die zu (31), (32), (33) bzw. (35), (36), (37) konjugiert komplexen Gleichungen.

Die Lösung der Gleichungen (30) bis (37) kann durch Iteration gewonnen werden, da die Beträge von A_1, A_2, A_3 und B_0, B_1, B_2, B_3 laut Voraussetzung klein gegen Eins sind. Durch Weglassen der Glieder zweiter und höherer Kleinheitsordnung in den Gleichungen (30) bis (37) erhält man als „nullte Näherung" (gekennzeichnet durch den zweiten Index Null):

$$A_{00} = 0\,, \qquad (R^* + b^*)\, B_{00} + g^* = 0\,, \tag{38}$$

$$(\varkappa^* - 1 + i f_z^*)\, A_{10} - m^*\, B_{10} = -\frac{i}{2} P_0^*\,, \qquad -A_{10} + (R^* + b^* - a^* + i f_\delta^*)\, B_{10} = 0\,, \tag{39}$$

$$(\varkappa^* - 4 + i 2 f_z^*)\, A_{20} - 4 m^*\, B_{20} = 0\,, \qquad -4 A_{20} + (R^* + b^* - 4 a^* + i 2 f_\delta^*)\, B_{20} = 0\,, \tag{40}$$

$$(\varkappa^* - 9 + i 3 f_z^*)\, A_{30} - 9 m^*\, B_{30} = 0\,, \qquad -9 A_{30} + (R^* + b^* - 9 a^* + i 3 f_\delta^*)\, B_{30} = 0\,. \tag{41}$$

Aus (38) bis (41) erhält man

$$A_{00} = 0\,, \qquad B_{00} = -\frac{g^*}{R^* + b^*}\,, \tag{42}$$

$$A_{10} = \frac{i}{2} P_0^* \frac{R^* + b^* - a^* + i f_\delta^*}{m^* - (\varkappa^* - 1 + i f_z^*)(R^* + b^* - a^* + i f_\delta^*)}\,, \tag{43}$$

$$B_{10} = \frac{i}{2} P_0^* \frac{1}{m^* - (\varkappa^* - 1 + i f_z^*)(R^* + b^* - a^* + i f_\delta^*)}\,, \tag{44}$$

$$A_{20} = 0\,, \qquad B_{20} = 0\,, \qquad A_{30} = 0\,, \qquad B_{30} = 0\,. \tag{45}$$

Aus Gleichung (43) ist ersichtlich, daß im ungedämpften System ($f_\delta^* = f_z^* = 0$) die Amplitude A_{10} getilgt werden kann, wenn die Bedingung

$$R^* + b^* - a^* = 0 \tag{46}$$

erfüllt wird. Im folgenden sollen alle Amplituden, die sich unter Beachtung der Bedingung (46) ergeben, mit einer Tilde gekennzeichnet werden. Aus (42), (43) und (44) ergibt sich

$$\tilde{A}_{00} = 0\,, \qquad \tilde{B}_{00} = -\frac{g^*}{a^*}\,, \tag{47}$$

$$\tilde{A}_{10} = \tilde{A}_{10}^R + i\, \tilde{A}_{10}^I = -\frac{P_0^*}{2} f_\delta^* \frac{m^* + f_z^* f_\delta^* + i(\varkappa^* - 1) f_\delta^*}{(m^* + f_z^* f_\delta^*)^2 + (\varkappa^* - 1)^2 f_\delta^{*2}}\,, \tag{48}$$

$$\tilde{B}_{10} = \tilde{B}_{10}^R + i\, \tilde{B}_{10}^I = -\frac{P_0^*}{2} \frac{(\varkappa^* - 1) f_\delta^* - i(m^* + f_z^* f_\delta^*)}{(m^* + f_z^* f_\delta^*)^2 + (\varkappa^* - 1)^2 f_\delta^{*2}}\,. \tag{49}$$

Die nächste Näherung (zweiter Index 1) wird nun so gefunden, daß in den Gleichungen (30) bis (37) in den Gliedern zweiter und höherer Kleinheitsordnung die durch die Gleichungen (45), (47), (48) und (49) dargestellte „nullte Näherung" unter Beachtung der Bedingung (46) eingesetzt wird. Man erhält damit aus (30) und (34)

$$\tilde{A}_{01} = 0\,, \tag{50}$$

$$\tilde{B}_{01} = -\frac{g^*}{a^*}\left\{1 + \frac{3 b^*}{a^*}\left[(\tilde{B}_{10}^R)^2 + (\tilde{B}_{10}^I)^2\right] - \frac{2}{a^*}\left(\tilde{A}_{10}^R \tilde{B}_{10}^R + \tilde{A}_{10}^I \tilde{B}_{10}^I\right)\right\} + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{b^*}{2 a^*}\right), \tag{51}$$

aus (31) und (35) zunächst

$$(\varkappa^* - 1 + i f_z^*)\, \tilde{A}_{11} - m^*\, \tilde{B}_{11} = R_{11} + i\, R'_{11}\,, \qquad -\tilde{A}_{11} + i f_\delta^*\, \tilde{B}_{11} = S_{11} + i\, S'_{11}$$

und daraus

$$\tilde{A}_{11} = \frac{(f_\delta^* R'_{11} - m^* S_{11})(m^* + f_z^* f_\delta^*) + (f_\delta^* R_{11} + m^* S'_{11})(\varkappa^* - 1) f_\delta^*}{(m^* + f_z^* f_\delta^*)^2 + (\varkappa^* - 1)^2 f_\delta^{*2}}$$

$$+ i \frac{(f_\delta^* R'_{11} - m^* S_{11})(\varkappa^* - 1) f_\delta^* - (f_\delta^* R_{11} + m^* S'_{11})(m^* + f_z^* f_\delta^*)}{(m^* + f_z^* f_\delta^*)^2 + (\varkappa^* - 1)^2 f_\delta^{*2}}\,, \tag{52}$$

$$B_{11} = \frac{[f_z^* S'_{11} - R_{11} - (\varkappa^* - 1) S_{11}](m^* + f_z^* f_\delta^*) + [f_z^* S_{11} + R'_{11} + (\varkappa^* - 1) S'_{11}](\varkappa^* - 1) f_\delta^*}{(m^* + f_z^* f_\delta^*)^2 + (\varkappa^* - 1)^2 f_\delta^{*2}}$$

$$+ i \frac{[f_z^* S_{11} - R_{11} - (\varkappa^* - 1) S_{11}](\varkappa^* - 1) f_\delta^* - [f_z^* S_{11} + R'_{11} + (\varkappa^* - 1) S'_{11}](m^* + f_z^* f_\delta^*)}{(m^* + f_z^* f_\delta^*)^2 + (\varkappa^* - 1)^2 f_\delta^{*2}} \tag{53}$$

mit den Abkürzungen

$$R_{11} = -\frac{m^*}{2}\,\tilde{B}^R_{10}\left[(\tilde{B}^R_{10})^2 + (\tilde{B}^I_{10})^2 + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right], \tag{54}$$

$$R'_{11} = -\frac{P^*_6}{2} - \frac{m^*}{2}\,\tilde{B}^I_{10}\left[(\tilde{B}^R_{10})^2 + (\tilde{B}^I_{10})^2 + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right], \tag{55}$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}\,\tilde{A}^R_{10}\left[3\,(\tilde{B}^R_{10})^2 + (\tilde{B}^I_{10})^2 + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,(3\,b^* + a^*)\,\tilde{B}^R_{10}\,[(\tilde{B}^R_{10})^2 + (\tilde{B}^I_{10})^2]$$
$$+ \frac{1}{2}\,(3\,b^* - a^*)\,\tilde{B}^R_{10}\left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2 - \tilde{A}^I_{10}\,\tilde{B}^R_{10}\,\tilde{B}^I_{10}, \tag{56}$$

$$S'_{11} = -\frac{1}{2}\,\tilde{A}^I_{10}\left[(\tilde{B}^R_{10})^2 + 3\,(\tilde{B}^I_{10})^2 + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,(3\,b^* + a^*)\,\tilde{B}^I_{10}\,[(\tilde{B}^R_{10})^2 + (\tilde{B}^I_{10})^2]$$
$$+ \frac{1}{2}\,(3\,b^* - a^*)\,\tilde{B}^I_{10}\left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2 - \tilde{A}^R_{10}\,\tilde{B}^R_{10}\,\tilde{B}^I_{10}. \tag{57}$$

Aus (32) und (36) erhält man auf analoge Weise zunächst

$$(\varkappa^* - 4 + i\,2\,f^*_z)\,\tilde{A}_{21} - 4\,m^*\,\tilde{B}_{21} = R_{21} + i\,R'_{21}, \qquad -4\,\tilde{A}_{21} - (3\,a^* - i\,2\,f^*_\vartheta)\,\tilde{B}_{21} = S_{21} + i\,S'_{21}$$

und daraus

$$\tilde{A}_{21} = \frac{[3\,a^*\,R_{21} + 2\,f^*_\vartheta\,R'_{21} - 4\,m^*\,S_{21}]\,[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}$$
$$+ \frac{[3\,a^*\,R'_{21} - 2\,f^*_\vartheta\,R_{21} - 4\,m^*\,S'_{21}]\,[6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}$$
$$+ i\left\{\frac{[3\,a^*\,R'_{21} - 2\,f^*_\vartheta\,R_{21} - 4\,m^*\,S'_{21}]\,[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}\right.$$
$$\left. - \frac{[3\,a^*\,R_{21} + 2\,f^*_\vartheta\,R'_{21} - 4\,m^*\,S_{21}]\,[6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}\right\}, \tag{58}$$

$$\tilde{B}_{21} = \frac{[2\,f^*_z\,S'_{21} - 4\,R_{21} - (\varkappa^* - 4)\,S_{21}]\,[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}$$
$$- \frac{[2\,f^*_z\,S_{21} + 4\,R'_{21} + (\varkappa^* - 4)\,S'_{21}]\,[6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}$$
$$+ i\left\{\frac{[2\,f^*_z\,S'_{21} - 4\,R_{21} - (\varkappa^* - 4)\,S_{21}]\,[2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4) - 6\,a^*\,f^*_z]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}\right.$$
$$\left. - \frac{[2\,f^*_z\,S_{21} + 4\,R'_{21} + (\varkappa^* - 4)\,S'_{21}]\,[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]}{[3\,a^*\,(\varkappa^* - 4) + 16\,m^* + 4\,f^*_z\,f^*_\vartheta]^2 + [6\,a^*\,f^*_z - 2\,f^*_\vartheta\,(\varkappa^* - 4)]^2}\right\} \tag{59}$$

mit

$$R_{21} = \frac{2\,m^*\,g^*}{a^*}\,[(\tilde{B}^R_{10})^2 - (\tilde{B}^I_{10})^2], \tag{60}$$

$$R'_{21} = \frac{4\,m^*\,g^*}{a^*}\,\tilde{B}^R_{10}\,\tilde{B}^I_{10}, \tag{61}$$

$$S_{21} = \frac{g^*}{a^*}\left\{\tilde{A}^R_{10}\,\tilde{B}^R_{10} - \tilde{A}^I_{10}\,\tilde{B}^I_{10} - \frac{3\,b^*}{2}\,[(\tilde{B}^R_{10})^2 - (\tilde{B}^I_{10})^2]\right\}, \tag{62}$$

$$S'_{21} = \frac{g^*}{a^*}(\tilde{A}^R_{10}\,\tilde{B}^I_{10} + \tilde{A}^I_{10}\,\tilde{B}^R_{10} - 3\,b^*\,\tilde{B}^R_{10}\,\tilde{B}^I_{10}). \tag{63}$$

Schließlich erhält man aus (33) und (37) zunächst

$$(\varkappa^* - 9 + i\,3\,f^*_z)\,\tilde{A}_{31} - 9\,m^*\,\tilde{B}_{31} = R_{31} + i\,R'_{31}, \qquad 9\,\tilde{A}_{31} + (8\,a^* - i\,3\,f^*_\vartheta)\,\tilde{B}_{31} = S_{31} + i\,S'_{31}$$

und daraus

$$\tilde{A}_{31} = \frac{[8\,a^*\,R_{31} + 3\,f_\vartheta^*\,R'_{31} + 9\,m^*\,S_{31}]\,[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}$$
$$+ \frac{[8\,a^*\,R'_{31} + 9\,m^*\,S'_{31} - 3\,f_\vartheta^*\,R_{31}]\,[24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}$$
$$+ i\left\{\frac{[8\,a^*\,R'_{31} - 3\,f_\vartheta^*\,R_{31} + 9\,m^*\,S'_{31}]\,[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}\right.$$
$$\left. - \frac{[8\,a^*\,R_{31} + 9\,m^*\,S_{31} + 3\,f_\vartheta^*\,R'_{31}]\,[24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}\right\}, \tag{64}$$

$$\tilde{B}_{31} = \frac{[(\varkappa^* - 9)\,S_{31} - 3\,f_z^*\,S'_{31} - 9\,R_{31}]\,[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}$$
$$+ \frac{[(\varkappa^* - 9)\,S'_{31} + 3\,f_z^*\,S_{31} - 9\,R'_{31}]\,[24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}$$
$$+ i\left\{\frac{[(\varkappa^* - 9)\,S'_{31} + 3\,f_z^*\,S_{31} - 9\,R'_{31}]\,[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}\right.$$
$$\left. - \frac{[(\varkappa^* - 9)\,S_{31} - 3\,f_z^*\,S'_{31} - 9\,R_{31}]\,[24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]}{[8\,a^*\,(\varkappa^* - 9) + 81\,m^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]^2 + [24\,a^*\,f_z^* - 3\,f_\vartheta^*\,(\varkappa^* - 9)]^2}\right\} \tag{65}$$

mit den Abkürzungen

$$R = {}_{31}\frac{3\,m^*}{2}\,\tilde{B}_{10}^R\,[3\,(\tilde{B}_{10}^I)^2 - (\tilde{B}_{10}^R)^2], \tag{66}$$

$$R'_{31} = \frac{3\,m^*}{2}\,\tilde{B}_{10}^I\,[(\tilde{B}_{10}^I)^2 - 3\,(\tilde{B}_{10}^R)^2], \tag{67}$$

$$S_{31} = \frac{1}{2}\,\tilde{A}_{10}^R\,[(\tilde{B}_{10}^R)^2 - (\tilde{B}_{10}^I)^2] + \frac{1}{6}\,(a^* + 3\,b^*)\,\tilde{B}_{10}^R\,[3\,(\tilde{B}_{10}^I)^2 - (\tilde{B}_{10}^R)^2] - \tilde{A}_{10}^I\,\tilde{B}_{10}^R\,\tilde{B}_{10}^I, \tag{68}$$

$$S'_{31} = \frac{1}{2}\,\tilde{A}_{10}^I\,[(\tilde{B}_{10}^R)^2 - (\tilde{B}_{10}^I)^2] - \frac{1}{6}\,(a^* + 3\,b^*)\,\tilde{B}_{10}^I\,[3\,(\tilde{B}_{10}^R)^2 - (\tilde{B}_{10}^I)^2] + \tilde{A}_{10}^R\,\tilde{B}_{10}^R\,\tilde{B}_{10}^I. \tag{69}$$

4. Resonanzfall. Aus Gleichung (21) erkennt man, daß Resonanz zwischen der Eigenschwingung des Fundamentes und der Erregerschwingung besteht, wenn $\varkappa^* = 1$ ist. Für diesen praktisch wichtigen Fall sollen die vorstehenden Formeln spezialisiert werden. Die zugehörigen komplexen Amplituden sollen dabei durch eine Doppeltilde gekennzeichnet werden.

Aus (48) und (49) erhält man für diesen Fall

$$\tilde{\tilde{A}}_{10}^R = -\frac{P_0^*\,f_\vartheta^*}{2\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)}, \qquad \tilde{\tilde{A}}_{10}^I = 0, \tag{70}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{10}^R = 0, \qquad \tilde{\tilde{B}}_{10}^I = \frac{P_0^*}{2\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)}. \tag{71}$$

Damit ergibt sich aus (50) und (51)

$$\tilde{\tilde{A}}_{01} = 0, \tag{72}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{01} = -\frac{g^*}{a^*}\left[1 + \frac{3\,b^*}{4\,a^*}\left(\frac{P_0^*}{m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*}\right)^2\right] + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^3\left(\frac{1}{3} - \frac{b^*}{2\,a^*}\right). \tag{73}$$

Aus (52) bis (57) erhält man mit (70) und (71)

$$\tilde{\tilde{A}}_{11} = -\frac{P_0^*\,f_\vartheta^*}{2\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)}\left\{1 + \frac{m^*}{m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*}\left[\frac{P_0^{*2}}{4\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right]\right\}$$
$$- i\,\frac{P_0^*\,m^*}{4\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2}\left[\frac{(3\,b^* + a^*)\,P_0^{*2}}{4\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} + (3\,b^* - a^*)\left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right], \tag{74}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{11} = \frac{P_0^*\,f_z^*}{4\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2}\left[\frac{(3\,b^* + a^*)\,P_0^{*2}}{4\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} + (3\,b^* - a^*)\left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right]$$
$$+ i\,\frac{P_0^*}{2\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)}\left\{1 + \frac{1}{2}\,\frac{m^* - f_z^*\,f_\vartheta^*}{m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*}\left[\frac{P_0^{*2}}{4\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} + \left(\frac{g^*}{a^*}\right)^2\right]\right\}. \tag{75}$$

Aus (58) und (59) erhält man mit (60) bis (63) und (70), (71)

$$\tilde{\tilde{A}}_{21} = \frac{3\,m^*\,g^*\,P_0^{*2}}{2\,a^*\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} \cdot \frac{(a^* + b^*)\,(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*) + 8\,f_\vartheta^*\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 36\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2}$$

$$+ i\,\frac{m^*\,g^*\,P_0^{*2}}{a^*\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} \cdot \frac{9\,(a^* + b^*)\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*) - 2\,f_\vartheta^*\,(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)}{(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 36\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2}\,, \tag{76}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{21} = \frac{g^*\,P_0^{*2}}{8\,a^*\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} \cdot \frac{(16\,m^* - 9\,a^* + 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,(16\,m^* + 9\,b^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*) - 36\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)\,(b^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 36\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2}$$

$$+ i\,\frac{3\,g^*\,P_0^{*2}}{4\,a^*\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^2} \cdot \frac{(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,(b^*\,f_z^* + f_\vartheta^*) - (16\,m^* + 9\,b^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(9\,a^* - 16\,m^* - 4\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 36\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2}\,. \tag{77}$$

Schließlich erhält man aus (64) und (65) mit (66) bis(69) und (70), (71)

$$\tilde{\tilde{A}}_{31} = \frac{9\,m^*\,P_0^{*3}}{8\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^3} \cdot \frac{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,f_\vartheta^* + 12\,(3\,a^* + b^*)\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 576\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2}$$

$$+ i\,\frac{9\,m^*\,P_0^{*3}}{16\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^3} \cdot \frac{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,(3\,a^* + b^*) - 48\,f_\vartheta^*\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 576\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2}\,, \tag{78}$$

$$\tilde{\tilde{B}}_{31} = -\frac{P_0^{*3}}{16\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^3} \left\{ \frac{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,[(a^* + 3\,b^*)\,f_z^* + 8\,f_\vartheta^*]}{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 576\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{8\,[81\,m^* + 8\,(a^* + 3\,b^*) - 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 576\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2} \right\}$$

$$+ i\,\frac{P_0^{*3}}{48\,(m^* + f_z^*\,f_\vartheta^*)^3} \left\{ \frac{72\,[(a^* + 3\,b^*)\,f_z^* + 8\,f_\vartheta^*]\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)}{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 576\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)\,[81\,m^* + 8\,(a^* + 3\,b^*) - 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*]}{(81\,m^* - 64\,a^* + 9\,f_z^*\,f_\vartheta^*)^2 + 576\,(a^*\,f_z^* + f_\vartheta^*)^2} \right\}. \tag{79}$$

5. Zahlenbeispiel. Auf Grund der gewonnenen Formeln soll nun die Dimensionierung eines Tilgers für einen speziellen Fall durchgerechnet werden. Durch eine Unwucht mit der Amplitude $P_0 = 500\,\text{kp}$ und einer Kreisfrequenz $\omega = 216\,\text{sec}^{-1}$ wird ein Fundament vom Gewicht $m_1 g = 10^4\,\text{kp}$ zu Resonanzschwingungen ($\varkappa^* = 1$) angeregt. Es zeigt sich eine Schwingungsamplitude des Fundamentes von der Größe $Z = 1\,\text{mm}$. Aus diesen Angaben kann die Fundamentdämpfungszahl f_z bzw. f_z^* ermittelt werden. Die Gleichung der erzwungenen Fundamentschwingung ohne Tilger ist laut (21)

$$z^{*\prime\prime} + f_z^*\,z^{*\prime} + \varkappa^*\,z^* = P_0^*\,\sin\tau\,.$$

Für den Ausschlag Z bei Resonanz ($\varkappa^* = 1$) ergibt sich daraus mit (23)

$$Z = \frac{P_0}{m_1\,\omega^2\,f_z^*}$$

und daher

$$f_z^* = \frac{P_0}{Z\,m_1\,\omega^2} = 1{,}05 \cdot 10^{-2}\,.$$

Zur Abschätzung der Dämpfungszahl f_ϑ^* für die Pendelkörper des Tilgers wird angenommen, daß die Amplitude ihrer freien Schwingung nach 120 Schwingungen auf $1/e$ des ursprünglichen Wertes abklingt. Für die freie Tilgerschwingung gilt laut (22), wenn man nur die linearen Terme berücksichtigt

$$a^*\,\vartheta^{\prime\prime} + f_\vartheta^*\,\vartheta^\prime + (R^* + b^*)\,\vartheta = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet bei Beachtung von (46)

$$\vartheta = C\,e^{-\frac{f_\vartheta^*}{2\,a^*}\tau} \cos\left[\sqrt{1 - \left(\frac{f_\vartheta^*}{2\,a^*}\right)^2}\,\tau - \varepsilon\right].$$

Bezeichnet man mit $t_0 = \tau_0/\omega$ jene Zeit, in der die Amplitude auf den Bruchteil $1/e$ abklingt, so wird

$$\frac{f_\vartheta^*}{2\,a^*}\,\tau_0 = \frac{f_\vartheta^*}{2\,a^*}\,\omega\,t_0 = 1\,.$$

Weiter soll nach obiger Annahme gelten $\frac{\omega t_0}{2\pi} = 120$.

Daraus ergibt sich

$$f_\delta^* = \frac{a^*}{120\,\pi}. \tag{80}$$

Der Tilger soll zwei zylinderförmige Pendelkörper nach Abb. 2 erhalten. Um zu konstruktiv günstigen Abmessungen zu kommen wird (mit den Bezeichnungen der Abb. 2) festgesetzt:

$$s = R = \frac{l}{3}, \qquad r = \frac{l}{6}. \tag{81}$$

Die Trägheitsradien sind dann $a = b = \frac{\sqrt{13}}{12}\,l$, $c = \frac{l}{6\sqrt{2}}$.

Die Abstimmbedingung (46) liefert mit (23) $\nu^2 = \frac{29}{43} = 0{,}674$. Aus (23) ergibt sich mit den obigen Werten $a^* = \frac{29}{16} = 1{,}813$ und $b^* = \frac{27}{16}\nu^2 = 1{,}137$. Damit und aus (80) erhält man $f_\delta^* = 0{,}481 \cdot 10^{-2}$. Die noch festzulegende Länge l der Pendelkörper soll nun so bestimmt werden,

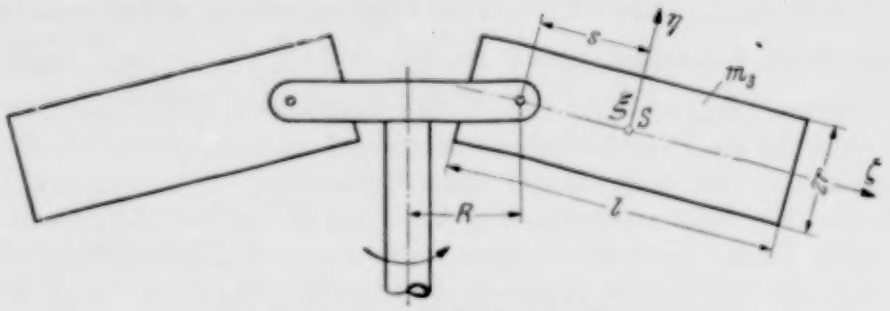


Abb. 2. Skizze für das Zahlenbeispiel.

daß die ursprüngliche Amplitude Z der Fundamentschwingung auf etwa 1/10 ihres Wertes herabgedrückt wird. Wie später zahlenmäßig gezeigt wird, ist für die Amplitude der verbleibenden Fundamentschwingung praktisch nur die Größe $\tilde{\bar{A}}_{11}$ nach Gleichung (74) maßgebend. Hierin können die Terme mit $(g^*/a^*)^2$ vernachlässigt werden. Da sich außerdem $f_z^*\, f_\delta^*$ als klein gegen m^* erweist, werden die Glieder $f_z^*\, f_\delta^*/m^*$ nur in erster Ordnung berücksichtigt. Auf diese Weise erhält man aus (74)

$$\tilde{\bar{A}}_{11} = -\frac{f_\delta^*\, P_0^*}{2\,m^*}\left(1 - \frac{f_z^*\, f_\delta^*}{m^*}\right) - \frac{f_\delta^*}{8}\left(\frac{P_0^*}{m^*}\right)^3\left(1 - 4\,\frac{f_z^*\, f_\delta^*}{m^*}\right) - i\,\frac{3\,b^* + a^*}{16}\left(\frac{P_0^*}{m^*}\right)^3\left(1 - 4\,\frac{f_z^*\, f_\delta^*}{m^*}\right). \tag{82}$$

Aus (23), $n = 2$ und den Festsetzungen (81) folgt

$$\left.\begin{aligned} m^* &= E\,l^3 \qquad \text{und} \qquad P_0^* = \frac{F}{l} \\ \text{mit} \qquad & \\ E &= \frac{\pi\,\gamma}{18\,m_1\,g} \qquad \text{und} \qquad F = \frac{3\,P_0}{m_1\,\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Dabei wurde in (23) $m_2 + n\,m_3$ gegenüber der wesentlich größeren Masse m_1 gestrichen. γ bedeutet das spezifische Gewicht der Pendelkörper. Wie aus (23) und (24) zu ersehen ist, gilt bei Abminderung der ursprünglichen Amplitude Z auf ein Zehntel

$$\frac{1}{10}Z \approx Z_{11} = 2\,s\,|\tilde{\bar{A}}_{11}|. \tag{84}$$

Aus (83), (84) und (81) erhält man schließlich

$$l^{25} - \frac{f_\delta^{*2}}{9\,Z_{11}^2}\left(\frac{F}{E}\right)^2 l^{16}\left(l^3 - 2\,\frac{f_z^*\, f_\delta^*}{E}\right) - \frac{f_\delta^{*2}}{18\,Z_{11}^2}\left(\frac{F}{E}\right)^4 l^8\left(l^3 - 5\,\frac{f_z^*\, f_\delta^*}{E}\right) - \frac{(3\,b^* + a^*)^2 + 4\,f_\delta^{*2}}{576\,Z_{11}^2}\left(\frac{F}{E}\right)^6\left(l^3 - 8\,\frac{f_z^*\, f_\delta^*}{E}\right) = 0. \tag{85}$$

Nach Einsetzen der obigen Zahlenwerte und mit $Z_{11} = 10^{-4}$ m und $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ kp m^{-3} wird aus (85)

$$l^{25} - 1{,}380 \cdot 10^{-5}\,l^{16}\,(l^3 - 0{,}742 \cdot 10^{-3}) - 3{,}704 \cdot 10^{-13}\,l^8\,(l^3 - 1{,}855 \cdot 10^{-3}) - 7{,}328 \cdot 10^{-16}\,(l^3 - 2{,}968 \cdot 10^{-3}) = 0.$$

Daraus ergibt sich die Länge eines Pendelkörpers zu $l = 0{,}203$ m. Damit wird $m^* = 1{,}139 \cdot 10^{-3}$, $P_0^* = 1{,}554 \cdot 10^{-4}$, $g^* = 3{,}11 \cdot 10^{-3}$. Das Gewicht eines Tilgerkörpers ist dann $m_3 g = 5{,}70$ kp. Rechnet man mit diesen Werten den Restausschlag Z_{11} gemäß (84) und (74) zur Kontrolle nach, so erhält man $|\bar{\bar{A}}_{11}| = 0{,}764 \cdot 10^{-3}$ und daraus nach (84) $Z_{11} = 1{,}03 \cdot 10^{-4}$ m, was dem beabsichtigten Wert 10^{-4} m praktisch gleichkommt.

Würde man bei diesen Tilgerabmessungen den zufolge der Tilgerreibung verbleibenden Restausschlag $Z_{10} = 2\,s\,|\bar{\bar{A}}_{10}|$ nach der linearisierten Theorie berechnen, so bekäme man gemäß (70) den Wert $Z_{10} = 0{,}425 \cdot 10^{-4}$ m. Man ersieht daraus, daß eine Berücksichtigung der nichtlinearen Terme in den Ausgangsgleichungen zur Ermittlung des Restausschlages nötig ist.

Aus (76) bzw. (78) ergibt sich mit den angegebenen Zahlenwerten

$$|\bar{\bar{A}}_{21}| = 0{,}91 \cdot 10^{-8} \quad \text{bzw.} \quad |\bar{\bar{A}}_{31}| = 0{,}81 \cdot 10^{-7}\,.$$

Diese Amplituden sind demnach gegenüber $|\bar{\bar{A}}_{11}|$ nicht von Bedeutung. Zur Ermittlung der Tilgerausschläge benötigt man noch $|\bar{\bar{B}}_{01}|$, $|\bar{\bar{B}}_{11}|$, $|\bar{\bar{B}}_{21}|$ und $|\bar{\bar{B}}_{31}|$. Aus den Gleichungen (73), (75), (77) und (79) ergibt sich mit den angegebenen Zahlenwerten $|\bar{\bar{B}}_{01}| = 1{,}73 \cdot 10^{-3}$, $|\bar{\bar{B}}_{11}| = 0{,}658 \cdot 10^{-1}$, $|\bar{\bar{B}}_{21}| = 0{,}229 \cdot 10^{-7}$ und $|\bar{\bar{B}}_{31}| = 1{,}68 \cdot 10^{-5}$. Der Tilgerausschlag rührt also im wesentlichen von $|\bar{\bar{B}}_{11}|$ her. Die zugehörige Winkelamplitude ist $\Theta_{11} = 2\,|\bar{\bar{B}}_{11}| = 0{,}132$, somit $\Theta_{11} = 7{,}54°$. Die linearisierte Teorie liefert $|\bar{\bar{B}}_{10}| = 0{,}653 \cdot 10^{-1}$. Der Vergleich mit $|\bar{\bar{B}}_{11}|$ zeigt, daß für dieses Beispiel die nichtlinearen Terme für die Tilgerbewegung unwesentlich sind, obwohl sie für die Restamplitude der Fundamentschwingung von ausschlaggebender Bedeutung sind. Dies erklärt sich daraus, daß die Restamplitude der Fundamentschwingung bei Einhaltung der Abstimmbedingung (46) nur durch die nichtlinearen Terme zustande kommt, falls man die Tilgerreibung nicht berücksichtigt, während auch die linearisierte Theorie in diesem Fall bereits Tilgerausschläge liefert.

(Eingegangen am 13. Oktober 1958.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. *G. Heinrich* und Doz. Dr. *K. Desoyer*, Wien IV, Karlsplatz 13, Technische Hochschule.

The idealized column*

By N. J. Hoff

List of Symbols

a	non-dimensional deviation amplitude
a_1, a_2	distances along strain axis
b_1, b_2	distances along strain axis
B	constant in *Ramberg-Osgood* relationship
E	modulus
F	function
G	function
h	distance between flanges
k	exponent in *Ramberg-Osgood* relationship
L	length of column
m	positive number less than unity
n	exponent in creep law
P	compressive load
x	longitudinal coordinate
y	deviation of median line from line of action of force
ε	strain
$\varkappa$	curvature
λ	constant in creep law
σ	stress
ϱ	radius of gyration of section

Symbols used as subscripts mean:

c	concave side of column
cr	critical
$cr.r$	critical reduced
E	Euler
red	reduced
rev	reversal
t	tangent; convex side of column
0	average or nominal; condition after load application but before creep
00	condition before load application
1	point 1
2	point 2

1. Introduction. Professor *Grammel*'s considerable contributions[1,2] to stability theory have dealt mostly with problems of elastic stability. As is well known, this theory began with *Euler*'s solution of the buckling problem of the column. *Euler*'s investigations showed that the buckling load depended on the length of the column, the conditions prescribed for its ends, the elastic modulus of the material and the moment of inertia of the cross section, but it was independent of the shape of the cross section.

When the uniform compressive stress under which the perfectly straight and perfectly centered column buckles exceeds the elastic limit, the shape of the cross section does have an influence on the buckling load, and the influence becomes even more important when the column is not perfectly straight in its natural condition before load application. This was shown by *von Kármán*[3] who carried out a number of experiments with solid rectangular section columns to prove the validity of his theoretical deductions. Since the time of *von Kármán*'s experiments it has been customary to use solid rectangular section columns in experimental and theoretical work in both the elastic and inelastic ranges.

* The work here presented was supported in whole by the United States Air Force under Contract No. AF 49 (638) — 223 monitored by the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

[1] *C. B. Biezeno* and *R. Grammel*, Ing.-Arch. 8 (1937) p. 364.

[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 10 (1939) p. 35.

[3] *Th. von Kármán*, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurswesens, Verein Deutscher Ingenieure (1910) Heft 81.

There has been a departure from this practice only recently when considerable interest developed in the buckling of columns because of creep[1]. The highly non-linear creep laws render the analysis of a rectangular-section column a difficult task while the treatment of an idealized I section is considerably simpler. The ideal I section consists of two flanges each of an area $A/2$ held a distance h apart by a web which cannot resist normal stresses but is perfectly rigid in shear. As columns used in structural engineering are generally much closer in their properties to ideal I than to solid rectangular sections, it seemed worth while to treat the ordinary elastic-plastic buckling problem also on the basis of the assumption that the cross section was an ideal I.

The results of such an investigation are presented in this paper. It turns out that a number of interesting and very simple relationships can be discovered in the much discussed field of elastic-plastic buckling if the section of the column is assumed to be an idealized I.

2. The reduced-modulus buckling stress. In the classical theory of the stability of structures the buckling load is defined as the load under which the equilibrium of a system, consisting of a structure and of prescribed loads acting on it, is neutral. Formulas for the calculation of this buckling load of columns having various cross sections and diverse end conditions are given in many textbooks. When the column has an efficient built-up or extruded section, the idealized I section having two flanges each of area $A/2$ spaced a distance h apart by means of an infinitely rigid web of vanishingly small cross-sectional area provides a model which is easy to analyze. For two simply supported ends its buckling stress $\sigma_{cr.r}$ can be given as (see, for instance[2])

$$\sigma_{cr.r} = \pi^2 E_{red}/(L/\varrho)^2 = \pi^2 E_{red}/(2\,L/h)^2 \tag{1}$$

where L is the length of the column, $\varrho = h/2$ the radius of gyration of its cross section and the reduced modulus E_{red} is expressed by

$$E_{red} = 2\,E\,E_t/(E + E_t) \tag{2}$$

Here E is *Young*'s modulus of elasticity and $E_t = d\sigma/d\varepsilon$, the rate of change of the stress with strain, corresponding to $\sigma_{cr.r}$, is denoted the tangent modulus. When Eq. (1) predicts a critical stress less than the elastic limit of the material, $E_{red} = E_t = E$ and Eq. (1) reduces to the *Euler* formula.

Let us assume that the stress-strain relationship is given by the expression

$$\varepsilon = F(\sigma)\,. \tag{3}$$

Then the derivative

$$d\sigma/d\varepsilon = 1/F'(\sigma) = E_t\,, \tag{4}$$

where the prime denotes differentiation with respect to σ. From Eq. (2)

$$E_{red}/E = 2/[(E/E_t) + 1] \tag{5}$$

and thus

$$E_{red}/E = 2/[E\,F'(\sigma) + 1] \tag{6}$$

Substitution in Eq. (1) yields

$$\frac{\sigma_{cr.r}}{E} = \frac{2\,\varepsilon_E}{1 + E\,F'(\sigma_{cr.r})} \tag{7}$$

with $\sigma_{cr.r}$ replacing σ in the expression $F'(\sigma)$ to indicate that the value of F' must be calculated for $\sigma = \sigma_{cr.r}$. The symbol ε_E in this formula denotes the *Euler* strain defined as

$$\varepsilon_E = \pi^2/(L/\varrho)^2\,. \tag{8}$$

Multiplication by the denominator of the right-hand member of Eq. (7) yields the equation

$$(\sigma/E) + \sigma\,F'(\sigma) = 2\,\varepsilon_E\,, \tag{9}$$

if the subscript cr.r is omitted for the sake of simplicity. This equation lends itself to a simple graphic solution, as shown in Fig. 1.

If $OA = NP$ is the buckling stress, continuation of the initial straight-line portion of the stress-strain curve OPC yields the point of intersection B with the horizontal corresponding to σ. Then

[1] *N. J. Hoff*, A Survey of the Theories of Creep Buckling, *Sudaer* No. 80, Stanford University, Stanford, California, June 1958; also Proceedings of the Third U. S. National Congress of Applied Mechanics, p. 29, American Society of Mechanical Engineer, New York, 1958.

[2] *N. J. Hoff*, The Analysis of Structures, John Wiley and Sons, New York, N. Y., (1956) p. 324.

$AB = (\sigma/E)$. The tangent to the stress-strain curve at P intersects the ε axis in T. Hence $TN = \sigma F'(\sigma)$. In accordance with Eq. (9), one-half the sum of these two distances

$$(1/2)(AB + TN) = \varepsilon_E = \pi^2/(L/\varrho)^2 \quad (10)$$

This distance can be laid off as ON'. The point P' having ON' for abscissa and $\sigma = OA = NP$ as ordinate lies on the curve that represents σ_{cr} as a function of ε_E or as a function of (L/ϱ). The axis of abscissas can be provided with a linear scale for ε_E an with an inverse quadratic scale for (L/ϱ).

A slight modification of the procedure consists in marking point A' on the axis of ordinates at a distance $(1/2)\ OA$ from O. Parallels to the initial straight-line portion of the stress-strain curve and to the tangent to the curve at P intersect line APP' in two points; the sum of the distances of these points of intersection from A is ε_E.

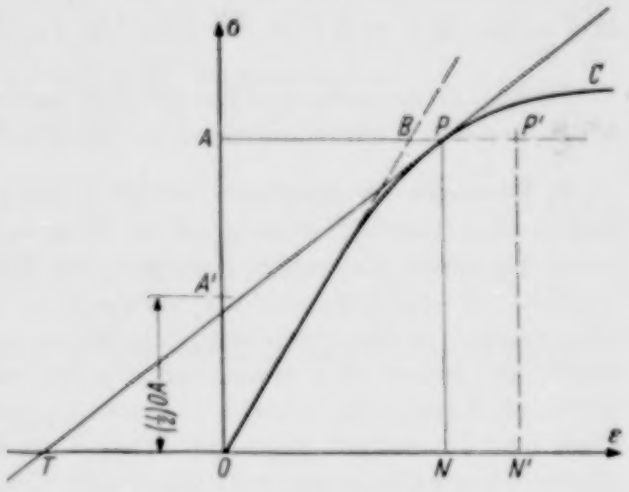


Fig. 1. Graphic determination of *Euler* strain.

If a good stress-strain curve of the material is available, and the construction described is carried out for several points of the curve, a critical stress vs. slenderness ratio curve becomes available without any calculation. This curve is strictly valid only for the idealized I section but it represents an excellent approximation for practical I sections. According to various authors[1,2,3] the values obtained for the idealized I section do not differ significantly from those calculated for other sections, such as the solid rectangular section.

3. The tangent modulus buckling stress. A similar graphical construction is possible also for the determination of the so-called „tangent-modulus buckling stress". This stress was proposed by *Shanley*[4,5]; it is the stress at which an initially perfectly straight column can first assume a deflected

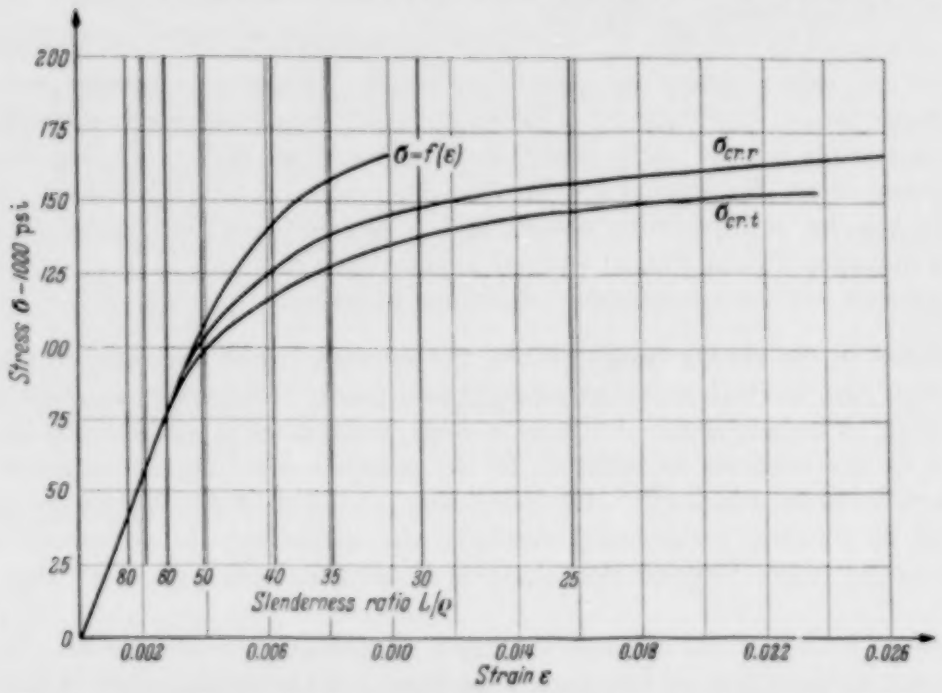


Fig. 2. Stress-strain and buckling stress curves for 17—7 PH stainless steel at 700° F.

shape in a loading process in which the load increases in such a manner that the stress is nowhere reversed in the cross section. The formula for this stress is

$$\sigma_{cr.t} = \pi^2 E_t/(L/\varrho)^2 = \pi^2 E_t/(2\ L/h)^2 . \quad (11)$$

[1] See footnote 2 on p. 90.

[2] *S. Timoshenko*, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y., (1936), p. 161.

[3] *Friedrich Bleich*, Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y., (1952), p. 13.

[4] *F. R. Shanley*, Journal of the Aeronautical Sciences, 13 (1946), No. 12, p. 678.

[5] *F. R. Shanley*, Journal of the Aeronautical Sciences, 14 (1947), No. 5, p. 261.

This equation is valid for all cross-sectional shapes if the slenderness ratio is taken as L/ϱ; in the case of the idealized I section ϱ can be replaced by $h/2$.

Because of Eqs. (4) and (8), Eq. (11) can be replaced by

$$\sigma F'(\sigma) = \varepsilon_E , \tag{12}$$

if the subscripts are again omitted for the sake of simplicity. A graphic interpretation of this formula is obvious on the basis of the preceding discussion: the *Euler* strain of a column whose buckling stress is $\sigma = NP$ is TN (see Fig. 1). The slenderness ratio of this column follows then from Eq. (8).

In Fig. 2 the results of the graphic analysis are given for 17—7 PH stainless steel together with the stress-strain curve obtained at the Battelle Memorial Institute.[1]

4. Remarks on Shanley's buckling stress and the corresponding strain. It is of importance to realize that *Shanley*'s concept of buckling is fundamentally different from the classical concept proposed by *Euler*, *Considère*, *Engesser*, *von Kármán* and *Southwell*[2]. In the classical formulation, the stability of equilibrium of a system, consisting of a body and the prescribed loads acting on it, is investigated in the presence of infinitesimal disturbances. In *Shanley*'s approach the system is under the action of a monotonically increasing load. If dynamic effects are disregarded and the material is perfectly elastic, the two approaches yield the same critical load, namely the *Euler* load, but the second approach leads to a lower critical load than the first one when elastic and plastic deformations can take place simultaneously. Of course, the speed of the lateral deformations is limited through the requirement that no stress reversal (unloading) should occur anywhere in the cross section. This, however, does not restrict the physical significance of the *Shanley* buckling load because the engineer considers a column unstable if any possibility exists for it to deviate from its initial equilibrium configuration.

Occasionally the critical stress calculated from the *Euler* formula with E_t substituted in place of E, Eq. (11), has been called the *Engesser* buckling stress. This nomenclature does not correspond to historic facts. It is true that Eq. (11) can be found among *Engesser*'s publications; but it is equally true that he admitted the formula to be wrong, when *Yasinski* attacked him, and proceeded to the derivation of the equivalent of Eq. (1).

Fig. 1 is also helpful in clearing up a misconception occasionally encountered in the engineering literature. According to it, the classical formulas of elastic stability retain their validity in the inelastic range also if they are interpreted as predicting the buckling strain rather than the buckling stress. In other words, one can divide both members of Eq. (11) by E_t; the quantity so obtained is supposed to be the critical strain. Multiplication of this critical strain by E_t gives the critical stress. In reality, the quantity obtained through division by E_t is the *Euler* strain ε_E represented by the distance TN in Fig. 1; the corresponding actual strain at buckling is given by the distance ON. The two can be considerably different in value.

5. Stress reversal in the elastic range. When the column is not perfectly straight in its natural state before loading, its deviations from straightness begin to increase as soon as a compressive load is applied to it. A consequence of the increasing deflections is an increase in the bending moments which act on the sections in addition to the compression. In the concave flange the compressive stress increases monotonically with increasing load, but in the convex flange the increments in tension caused by bending eventually overtake the increments in compression caused by the increasing compressive load. Beyond this stage of loading the compressive stress decreases in the convex flange.

The conditions of such a stress reversal during a monotonic process can also be calculated with great ease when the column has an idealized I section. Let the initial deviations of the centroidal line of the column from the straight line along which the compressive force is acting given by

$$y_{00} = (a_{00}\, h/2) \sin (\pi\, x/L) , \tag{13}$$

where a_{00} is the non-dimensional deviation amplitude and $h/2$ the radius of gyration of the cross section. The deviations y_0 at the time when the load reaches the value P are then known to be given by

$$y_0 = [1 - (P_E/P)]^{-1} (a_{00}\, h/2) \sin (\pi\, x/L) = (a_0\, h/2) \sin (\pi\, x/L) , \tag{14}$$

[1] *R. L. Carlson*, *E. G. Bodine*, and *G. K. Manning*, Investigation of Compressive Creep Properties of Aluminum Columns at Elevated Temperatures, Part 4, Additional Studies, WADC Report 52—251, Part 4, Wright Air Development Center, Wright Field, Ohio, April 1956, p. 45.

[2] For historic comments see, for instance, p. 463 of the book referenced in the footnote of p. 90.

if the elastic limit of the material is nowhere exceeded. But under the action of a compressive force P and a bending moment $M = P\,a_0\,(h/2)$ in the middle of the column, the stress in the convex flange is

$$\sigma = (P/A) - (P\,a_0/A) = (P/A)\,(1 - a_0)\,, \tag{15}$$

if the positive sign is used to indicate compression. The condition of stress reversal is then

$$d\sigma/dP = 0\,. \tag{16}$$

Substitutions, differentiation and simplifications lead to the very simple results

$$P_{rev}/P_E = 1 - \sqrt{a_{00}} \tag{17}$$

and

$$a_{rev} = \sqrt{a_{00}}\,, \tag{18}$$

where the subscript *rev* refers to the values of the quantities at the instant of stress reversal.

6. The Ramberg-Osgood relationship. In many cases the stress-strain relationship can be given in the form suggested by *Ramberg* and *Osgood*[1,2]

$$\varepsilon = F(\sigma) = (\sigma/E) + (\sigma/B)^k\,. \tag{19}$$

Under these conditions

$$\sigma\,F'(\sigma) = (\sigma/E) + k\,(\sigma/B)^k \tag{20}$$

and Eqs. (9) and (12) can be replaced by

$$(\sigma/E) + (1/2)\,k\,(\sigma/B)^k = \varepsilon_E\,, \tag{21}$$

in accordance with *Euler*'s concept of buckling and by

$$(\sigma/E) + k\,(\sigma/B)^k = \varepsilon_E\,, \tag{22}$$

in accordance with *Shanley*'s concept of buckling. When the stress σ is prescribed, Eqs. (21) and (22) give the slenderness ratio (implicit ind ε_E) of the column that buckles at σ.

The constants in the *Osgood-Ramberg* relationship can be determined with the aid of Fig. 3. The full straight lines passing through points P_1 and P_2 are tangents to the stress-strain curve while the dotted straight lines are parallel to the initial straightline portion of the stress-strain curve. It follows from Eqs. (19) and (20) that

$$a_1 = \sigma_1\,F'(\sigma_1) = (\sigma_1/E) + k\,(\sigma_1/B)^k, \tag{23a}$$

$$a_2 = \sigma_2\,F'(\sigma_2) = (\sigma_2/E) + k\,(\sigma_2/B)^k\,. \tag{23b}$$

Similarly

$$b_1 = k\,(\sigma_1/B)^k\,, \tag{24a}$$

$$b_2 = k\,(\sigma_2/B)^k\,. \tag{24b}$$

The last two equations yield

$$(b_1/b_2) = (\sigma_1/\sigma_2)^k \tag{25}$$

from which the value of k follows as

$$k = [\log\,(b_1/b_2)]/[\log\,(\sigma_1/\sigma_2)]\,. \tag{26}$$

With k known, the value of B becomes

$$B = \sigma_1\,(k/b_1)^{1/k} = \sigma_2\,(k/b_2)^{1/k}\,. \tag{27}$$

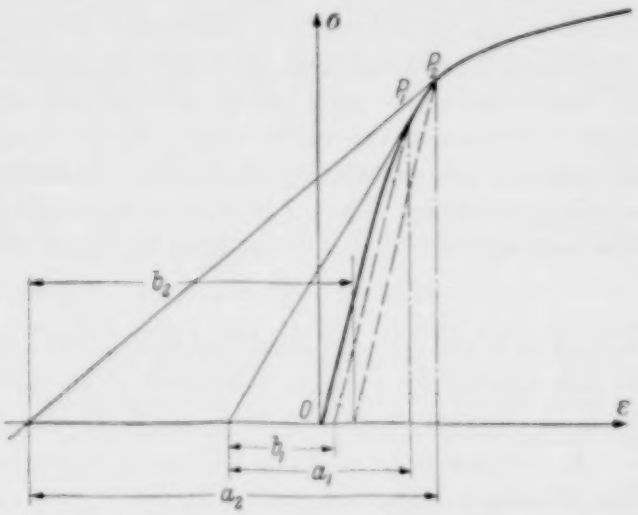


Fig. 3. Determination of values of constants in *Ramberg-Osgood* relationship.

When the relationship is exact, the values of k and B obtainable from Eqs. (26) and (27) are independent of the choice of points P_1 and P_2; when it is approximate, a suitable selection must be made of the values obtained for different pairs of points P_1 and P_2.

[1] *Walter Ramberg*, and *William R. Osgood*, Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, National Advisory Committee for Aeronautics Tech. Note 902, Washington, D. C., July 1943.

[2] *William R. Osgood*, Journal of the Aeronautical Sciences, 13 (1946), No. 1, p. 45.

Ramberg and *Osgood* proposed that P_1 and P_2 should be the points of intersection of the stress strain curve with straight lines passing through the origin with slopes of $m_1 E$ and $m_2 E$. The additional conditions to be enforced are then

$$\sigma_1 = m_1 E \varepsilon_1 , \tag{28a}$$

$$\sigma_2 = m_2 E \varepsilon_2 , \tag{28b}$$

$$0 < m_1 , \qquad m_2 < 1 . \tag{28c}$$

Substitution in Eq. (19), the taking of logarithms, and manipulations yield

$$k = 1 + \frac{\log [m_2 (1 - m_1)/m_1 (1 - m_2)]}{\log (\sigma_1/\sigma_2)} . \tag{29}$$

If the values of m_1 and m_2 are selected, the straight lines are drawn in the stress-strain diagram and the values of σ_1 and σ_2 are read off the curve, k can be computed from Eq. (29). The value of B follows then from a substitution of corresponding values of σ_1, ε_1 and k in Eq. (19). In particular, *Ramberg* and *Osgood* recommend

$$m_2 = 0.7 \qquad \text{and} \qquad m_1 = 0.85 . \tag{30}$$

With this choice the value of the numerator in Eq. (29) is $\log (17/7) = 0.3853$ if logarithms to base 10 are used.

Niles and *Newell*[1] suggest that P_2 should correspond to the 0.2 percent off-set yield stress defined as the stress at which the difference between the measured strain and the σ/E value is 0.002. Point P_1 is defined as the intersection point of the stress-strain curve with the straight line through O whose slope is one-half the slope of the straight line OP_2. The additional conditions are then

$$0.002 = (\sigma_2/B)^k , \tag{31a}$$

$$\varepsilon_1 - (\sigma_1/E) = (\sigma_1/B)^k . \tag{31b}$$

Simple manipulations yield

$$k = \frac{\log \{500 [\varepsilon_1 - (\sigma_1/E)]\}}{\log (\sigma_1/\sigma_2)} , \tag{32}$$

from which k can be computed as soon as σ_2 is determined on the basis of the 0.2 percent requirement and σ_1 and ε_1 are read off the stress-strain curve in accordance with the requirement given above. Again, B follows from Eq. (19).

7. Creep buckling. When a load P smaller than the load $P_{cr,\tau} = A \sigma_{cr,\tau}$ determined on the basis of the principles just discussed is applied to a column whose material exhibits creep deformations, the column does not collapse instantaneously. However, it cannot carry the constant load for an indefinitely long period of time because the initial deviations of its centroidal axis from the line of action of the compressive force P increase with time in consequence of creep. The initial deviations are caused by inaccurate workmanship and failure to align the column perfectly in the testing machine. They can never be avoided completely. It was shown in an earlier paper[2] that the assumption of the deviations in the form

$$y_0 = (a_0 h/2) \sin (\pi x/L) \tag{33}$$

where a_0 is the non-dimensional deviation amplitude, and the approximation of the deflected shape of the column by a single harmonic at all times t, lead to a satisfactory representation of the phenomenon of creep buckling with most columns.

It follows from the conditions of equilibrium that at the center of the column the stresses in the idealized I section are

$$\sigma_c = (P/A) + (P a/A) = \sigma_0 (1 + a) \tag{34}$$

on the concave side of the column, and

$$\sigma_t = (P/A) - (P a/A) = \sigma_0 (1 - a) \tag{35}$$

on the convex side of the column, if

$$\sigma_0 = P/A \tag{36}$$

[1] *Alfred S. Niles* and *Joseph S. Newell*, Airplane Structures, Vol. 1, Fourth Edition, John Wiley and Sons, New York, 1954, p. 149.

[2] *N. J. Hoff*, Journal of the Royal Aeronautical Society, 53 (1954), No. 517, p. 1.

the positive sign denotes compression, and a is the non-dimensional amplitude of the deviations at time t.

As the intensity of the compressive stress on the concave side is greater than that on the convex side, the compressive strain increases more rapidly on the concave side with the effect that the curvature of the column increases with time. Simple geometric considerations given in earlier[1,2] publications led to the result that the rate of change of the curvature $\dot{\varkappa}$ is given by

$$\dot{\varkappa} = (1/h)\,(\dot{\varepsilon}_c - \dot{\varepsilon}_t) \tag{37}$$

where $\dot{\varepsilon}_c$ and $\dot{\varepsilon}_t$ represent the rates of change of the compressive strain caused by the stresses σ_c and σ_t. If the deflected shape is sinusoidal at time t, the curvature is given by the small deflection theory as

$$\varkappa = (\pi/L)^2\,(a\,h/2)\,\sin\,(\pi\,x/L). \tag{38}$$

At the midpoint of the column, $x = (L/2)$, this becomes

$$\varkappa = (\pi/L)^2\,(a\,h/2). \tag{39}$$

At the midpoint the rate of change of the curvature is then

$$\dot{\varkappa} = (\pi/L)^2\,(\dot{a}\,h/2)\,, \tag{40}$$

which yields, in conjunction with Eq. (37), the result

$$\dot{a} = (1/2\,\varepsilon_E)\,(\dot{\varepsilon}_c - \dot{\varepsilon}_t)\,. \tag{41}$$

From this equation the velocity of the lateral displacement of the midpoint of the column can be computed when the strain rates in the two flanges are known; the latter, of course, depend on the creep law governing the creep deformations.

During these deformations the compressive stress in the concave flange increases exactly as much as it decreases in the convex flange as the total load P remains constant. This increase in compressive stress on the concave side diminishes the value of E_t and thus also the value of E_{red} which in turn is proportional to the instantaneous resistance of the column to bending when the stress is beyond the elastic limit of the material. When $P/A = \sigma_0$ is given, to each value of the non-dimensional deviation a corresponds a compressive stress $\sigma_0\,(1 + a)$ which defines a tangent modulus value $E_t = 1/F'$. When this stress and the corresponding value of F' satisfy Eq. (9), the column has reached its limit of stability and any further creep deformation causes it to collapse.

The condition of creep buckling is, therefore, that for a given ε_E (that is for a given column geometry) and for a given stress $\sigma_0 = P/A$ the non-dimensional deviation a must assume that value a_{cr} which leads to a satisfaction of Eq. (9). The stress $\sigma_0\,(1 + a_{cr})$ must be the critical stress $\sigma_{cr,r}$ obtainable from the graphic construction explained in conjunction with Figs. 1 and 2. One may write, therefore,

$$\sigma_{cr,r} = \sigma_0\,(1 + a_{cr}) \tag{42}$$

and solve this equation for a_{cr}:

$$a_{cr} = (\sigma_{cr,r}/\sigma_0) - 1\,. \tag{43}$$

The physical concept underlying this theory of creep buckling was presented in earlier papers[3,4,5,6]. Its shortcoming is that it satisfies the conditions of equilibrium and compatibility only at the center of the column. A more accurate analysis can be carried out with the aid of *Fourier* series and *Galerkin*'s method, but it is naturally much more complex and thus not adaptable to the simple graphic construction presented. Such more complete treatments of the problem were given in earlier publications[7].

[1] *N. J. Hoff*, Effets thermiques dans le calcul de la résistance des structures d'avions et d'engins, Advisory Group for Aeronautical Research and Development (AGARD) Report 52, January 1956.

[2] *N. J. Hoff*, The Aeronautical Quarterly, 7 (1956), No. 1, p. 1.

[3] See footnote 1 above.

[4] *N. J. Hoff*, Journal of the Royal Aeronautical Society, 61, (1957),No. 563, p. 756.

[5] *B. Fraeijs de Veubeke*, Creep Buckling, Chapter 11 of High Temperature Effects in Aircraft Structures, edited by N. J. Hoff, Pergamon Press, London, 1958.

[6] *J. C. Chapman*, *Burton Erickson* and *N. J. Hoff*, Theoretical and Experimental Investigation of Creep Buckling, PIBAL Report No. 406, Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn, N. Y., October, 1957, presented at the 26th Annual Meeting of the Institute of the Aeronautical Sciences, New York, N. Y., January 1958.

[7] See footnote 2 on p. 94 as well as footnotes 1 and 2 above.

Good agreement between the theoretical critical time and that observed in an experiment can be expected only if the value of the critical deflection is determined from a stress-strain curve representing the behavior of the material at the time of collapse. This stress-strain curve may

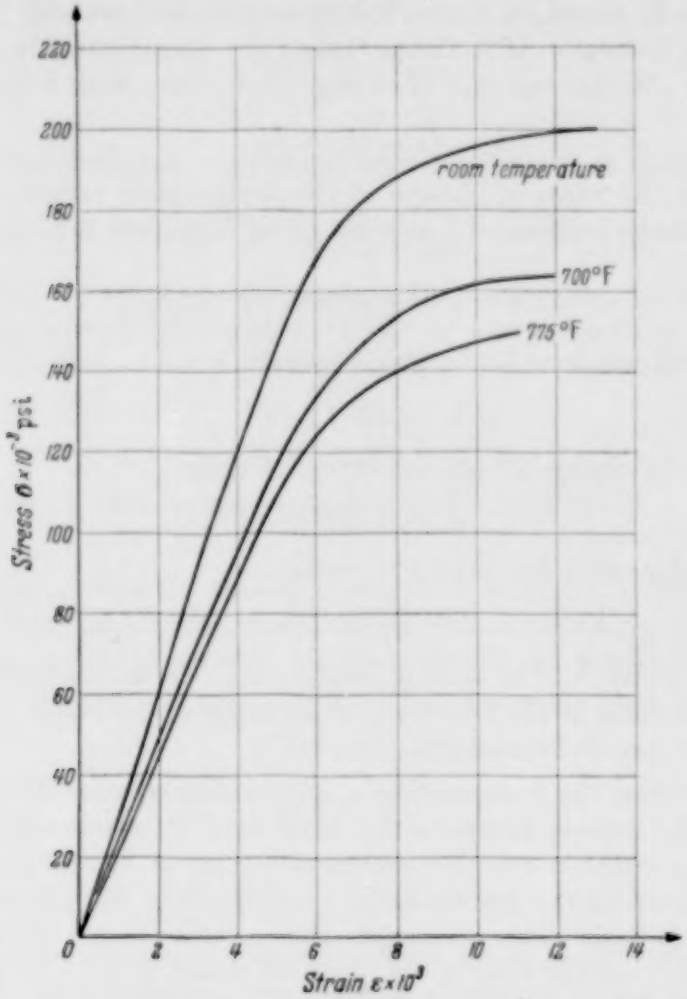


Fig. 4. Compressive stress-strain curves for 17—7 PH stainless steel at three temperatures.

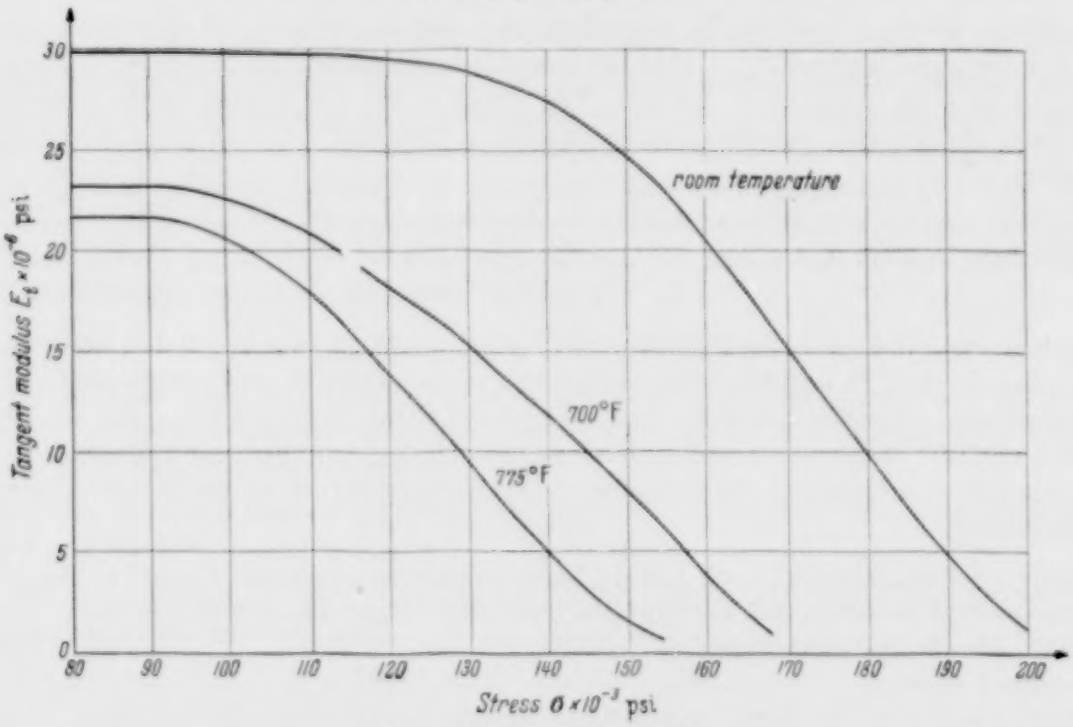


Fig. 5. Tangent modulus curves.

differ considerably from the one corresponding to the state of the column at the beginning of the test if the exposure of the material to high temperatures causes metallurgical changes to occur. Similarly, the data on creep behavior must correspond to those actually occurring during the column test.

In the particularly simple case when the secondary phase of creep alone is of significance, the creep law can be given as

$$\dot{\varepsilon} = G(\sigma) . \tag{44}$$

Under these conditions Eq. (41) becomes

$$\dot{a} = (1/2\,\varepsilon_E)\,\{G\,[\sigma_0\,(1+a)] - G\,[\sigma_0\,(1-a)]\} . \tag{45}$$

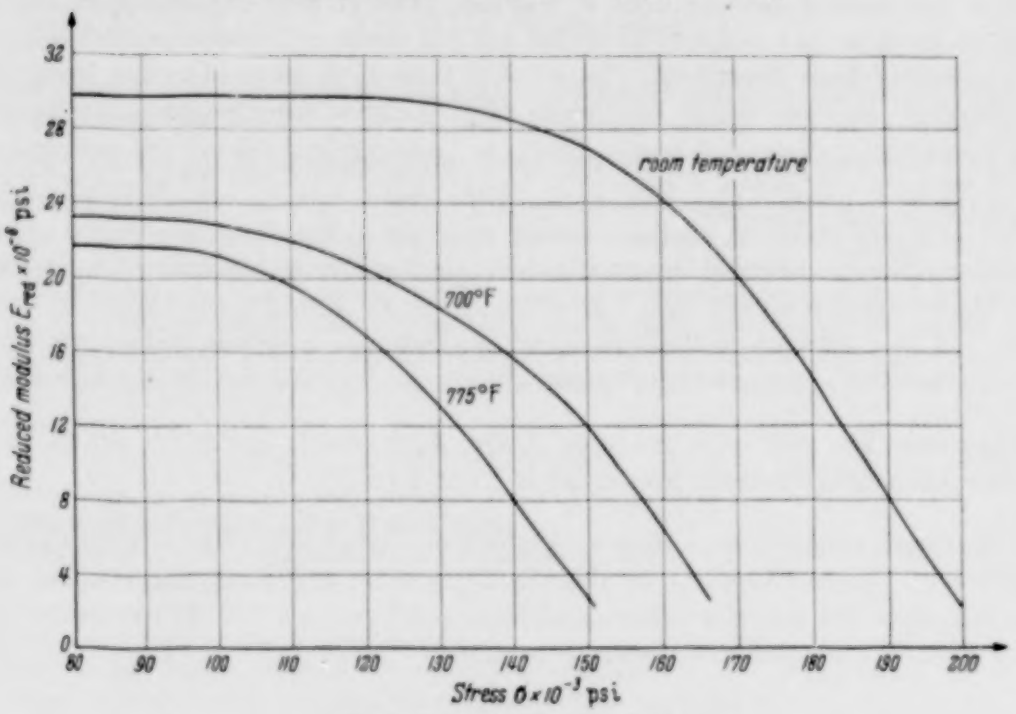


Fig. 6. Reduced modulus curves.

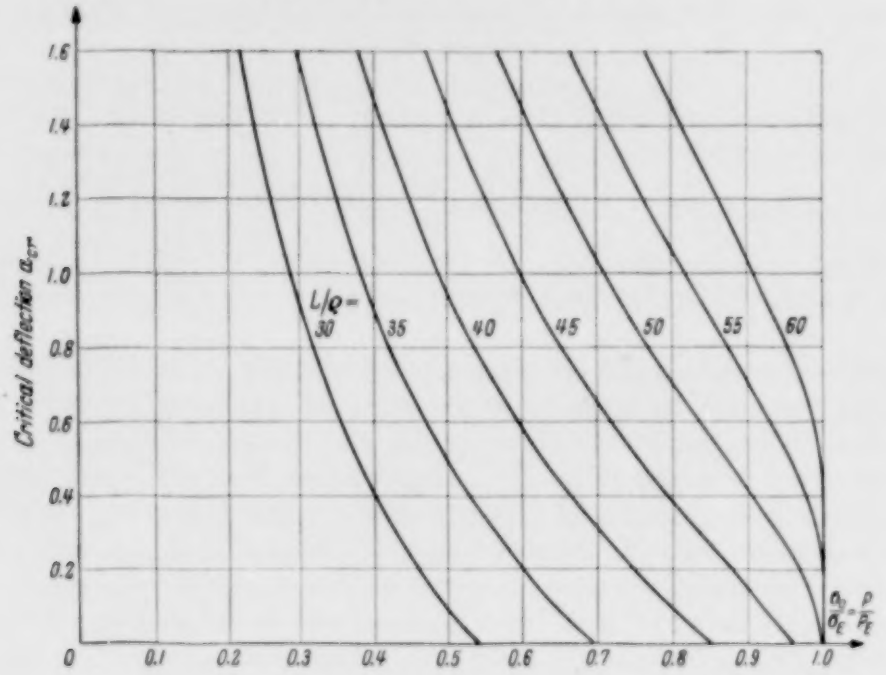


Fig. 7. Critical deflection curves.

Often the empirical relationship

$$G(\sigma) = (\sigma/\lambda)^n \tag{46}$$

is applicable. Then

$$\dot{a} = (\dot{\varepsilon}_0/2\,\varepsilon_E)\,[(1+a)^n - (1-a)^n] \tag{47}$$

with

$$\dot{\varepsilon}_0 = (\sigma_0/\lambda)^n . \tag{48}$$

The critical time t_{cr}, defined as the time elapsed from load application to collapse, is the integral of the quantity $da/\dot{a}$ from a_0 to $a_{cr.r}$. When the power law is valid, one has

$$t_{cr} = \frac{2\,\varepsilon_E}{\dot{\varepsilon}_0} \int_{a_0}^{a_{cr.r}} \frac{da}{(1+a)^n - (1-a)^n} . \tag{49}$$

In creep buckling, therefore, the concept of a critical load loses its significance because a column collapses under any compressive load however small if the load acts on it for a sufficiently long time. The finite time elapsing between load application and collapse is the significant quantity; it is called the critical time. In the present formulation of the creep buckling problem the collapse occurs when the lateral velocity of the column increases beyond all limits. This happens when a critical value of the lateral displacement is reached. The critical diaplacement can be computed from Eq. (43) as soon as the reduced-modulus critical stress $\sigma_{cr,r}$ is determined with the aid of the graphical construction here described. The critical time t_{cr} is then obtained from an integration which can be carried out numerically or graphically if a closed form solution is not possible.

In Figs. 4 to 7 an example is given of a graphic determination of the critical values of the non-dimensional deflection amplitude. The basic stress-strain curves are presented in Fig. 4; they refer to 17—7 PH (THD 1050) stainless steel and are taken from a paper cited earlier[1]. The tangent modulus and reduced modulus curves of Figs. 5 and 6 are derived from the three curves of Fig. 4 pertaining to room temperature, 700° F and 775° F. Finally, the family of curves of Fig. 7 is a cross plot of the critical non-dimensional deflection amplitude values computed for fixed values of the parameter L/ϱ at room temperature.

Acknowledgment. The author is grateful to Mr. *A. E. Saaf*, one of his graduate students, for working out the numerical example presented in Figs. 4 to 7.

Summary. Graphic methods and simple amalytic formulas are presented for the determination of the quantities of greatest interest in the elastic, plastic and creep buckling of columns. The results are rigorously valid only for columns of idealized *I* section and they represent good approximations in the case of extruded and built up sections.

(Eingegangen am 20. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *N. J. Hoff*, Head, Department of Aeronautical Engineering, Stanford University, Stanford, California.

[1] See footnote 1 on p. 92.

Neuere Ergebnisse aus dem Gebiet der Dynamik der Drehflügel

Von **K. H. Hohenemser**

Es gibt vier Arten der Selbsterregung von Drehflügelschwingungen: Selbsterregung durch nichtlineare Luftkräfte infolge Strömungsablösung, Selbsterregung nach Art des klassischen Flügelflatterns, Selbsterregung von Drehflügelschwingungen in der Umlaufebene, und Selbsterregung durch Periodizität der Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen für hohen Fortschrittsgrad. Die vier Arten der Selbsterregung können durch die Frequenzen der Schwingungen voneinander unterschieden werden. Nichtlineare Selbsterregung erfolgt nahezu mit der Drilleigenschwingungsfrequenz. Klassisches Flattern erfolgt mit einer Frequenz, die zwischen der Drilleigenschwingungsfrequenz und der Schlag- oder Schlagbiegeeigenfrequenz liegt. Für selbsterregte Schwingungen in der Umlaufebene ist die Frequenz nahezu gleich der Grundbiegefrequenz der horizontalen Flügeleigenschwingung. Für Selbsterregung durch Periodizität der Koeffizienten ist die Grundfrequenz der Schwingung gleich der ganzen oder halben Rotorumlauffrequenz. Für alle vier Fälle werden numerische Ergebnisse von neueren rechnerischen und Modelluntersuchungen wiedergegeben und besprochen.

Bezeichnungen

β	Blattschlagwinkel, positiv nach oben.
Θ	Blatteinstellwinkel gegenüber Umlaufebene.
ω_Θ	Blattdrilleigenschwingungszahl ohne Fliehkrafteinfluß.
Ω	Rotorumlaufzahl.
ω_F	Flatterschwingungszahl.
Ω_F	Rotorumlaufzahl an der Flattergrenze.
ε	Rücklage der Schweraxe gegenüber aerodynamischer Axe in % Flügeltiefe.
δ_3	In der Umlaufebene gemessener Winkel der Schlagaxe gegenüber der Normalen zur Blattaxe.
ζ	Blattschwenkwinkel, positiv entgegen der Drehrichtung.
$\partial\Theta/\partial\beta$	Blattwinkel-Schlagwinkelkopplungszahl.
$\partial\Theta/\partial\zeta$	Blattwinkel-Schwenkwinkelkopplungszahl.
Θ_s	Einstellwinkel der Geraden durch die Anschlußpunkte der Zugbänder an die Nabe gegenüber der Nabenebene, positiv, wenn der vordere Anschlußpunkt erhöht ist.
g	Baustoffdämpfungszahl, die zur Verhinderung der Selbsterregung notwendig ist.
$\overline{\Omega}$	Rotorumlaufzahl, in Abb. 9 und 10 bezogen auf tangentiale Eigenschwingungszahl, in Abb. 14 bezogen auf Rotorumlaufzahl im Hubschrauberflug.
μ	Fortschrittsgrad (Verhältnis der Vorwärtsgeschwindigkeit zur Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitzen).
S	Schwingungsamplitude bezogen auf die Amplitude der vorhergehenden Schwingungsperiode.
ψ	Azimuthwinkel des Blattes, von der rückwärtigen Lage aus im Umlaufsinne gerechnet.

1. Einleitung. Eine der wesentlichen Schwierigkeiten in der Entwicklung der Drehflügler ist die Unzulänglichkeit der Vorausbestimmung dynamischer Eigenschaften. Häufig ergeben sich bei neuen Mustern kritische dynamische Zustände, die erst nach Fertigstellung des Musters entdeckt werden und deren Behebung langwierig und kostspielig ist. Aussicht auf eine Verbesserung dieses unbefriedigenden Zustandes ist in den letzten Jahren durch Einführung von zwei neuen Hilfsmitteln entstanden. Diese sind das dynamische Rotormodell und die elektronische Rechenanlage. Die beiden Hilfsmittel machen es zum ersten Male möglich einen umfassenden Überblick der verschiedenen dynamischen Erscheinungen zu gewinnen, die bei dem Entwurf eines Drehflüglers berücksichtigt werden müssen. Insbesondere bieten die beiden Hilfsmittel die Möglichkeit die kritischen Bereiche der selbsterregten Schwingungen vorauszubestimmen und während der Erprobung eines neuen Drehflüglermusters zu vermeiden. Der Verfasser hatte Gelegenheit einige verwickelte dynamische Drehflügelprobleme sowohl mit Hilfe von dynamischen Rotormodellen wie auch mit Hilfe einer umfangreichen elektronischen Rechenanlage untersuchen zu lassen. In dem vorliegenden Bericht werden die Ergebnisse dieser Untersuchungen und anderer hierher gehörender Arbeiten zusammengefaßt.

Über die Methode der dynamischen Modelluntersuchung sei hier nur soviel gesagt, daß große Sorgfalt in der Konstruktion und im Bau der Modelle notwendig ist um erfolgreich zu sein. Auch erfordert die Deutung der Ergebnisse und ihre Korrektur in bezug auf die unvermeidbaren Abweichungen von der Großausführung eine gründliche Vertrautheit mit der Theorie der zu untersuchenden dynamischen Erscheinungen. Wenn diese Vorbedingungen erfüllt sind, können sorgfältig ausgeführte Modelluntersuchungen die Erprobungszeit eines Drehflüglermusters um Jahre verkürzen und das Risiko der Erprobung auf einen Bruchteil herabsetzen.

Bei Anwendung einer elektronischen Rechenanlage hängt die Brauchbarkeit der Rechnung von der Gültigkeit der getroffenen Rechenannahmen ab. Die Methode der elektronischen Berechnung ist zwar schmiegsamer als die Methode des dynamischen Modellversuches, sie ist dagegen wegen der notwendigen Idealisierung des dynamischen Systems weniger zuverlässig. Eine Kontrolle der Rechnung durch den Modellversuch — wenigstens in Form von Stichproben — ist ratsam. Unter den verschiedenen Bauarten von elektronischen Rechenanlagen, die in Betracht kommen, haben sich in unserem Falle besonders diejenigen bewährt, welche auf dem Prinzip der direkten Analogie zwischen mechanischem und elektrischem System beruhen. Der Aufbau des äquivalenten elektrischen Systems aus Induktoren, Kapazitäten und Transformatoren ist ohne Kenntnis der Differential- oder Integralgleichungen für das mechanische System möglich. Die den Verschiebungen oder Verschiebegeschwindigkeiten proportionalen Luftkräfte werden elektrisch durch Ströme dargestellt, die ihren Ursprung in Verstärkernetzwerken haben. Unter Verwendung von elektronischen Multiplikationsgeräten können die Proportionalitätsfaktoren auch zeitlich veränderlich gemacht werden, so daß der Drehflügel im Vorwärtsflug behandelt werden kann[1]. Diese kurzen Andeutungen über die Methoden des dynamischen Modellversuches und der elektronischen Berechnung dynamischer Eigenschaften müssen hier genügen. In den folgenden Abschnitten wird lediglich von den Ergebnissen der Untersuchungen die Rede sein.

2. Allgemeines über Selbsterregung von Drehflügelschwingungen. Der Drehflügel kann als ein umlaufender elastischer Stab angesehen werden, bei welchem die Masse je Längeneinheit, die Biegesteifigkeit in den beiden Richtungen und die Drillsteifigkeit über die Länge veränderlich sind. Drehflügel sind meist mit einem sogenannten Schlaggelenk an die Nabe angeschlossen, so daß sie senkrecht zur Umlaufrichtung frei auf und ab schlagen können. Abb. 1 zeigt eine schematische Seitenansicht

Abb. 1. Schematische Seitenansicht des Drehflügels.

Abb. 2. Querschnitt des Drehflügels.

eines Drehflügels. A ist die Rotoraxe. Das Schlaggelenk ist in einem gewissen Abstand von der Rotoraxe angeordnet. Der Drehflügel ist um den Winkel β nach oben ausgelenkt gezeichnet. Oft ist neben dem Schlaggelenk auch ein Schwenkgelenk vorgesehen, welches Bewegungen des Drehflügels in der Umlaufebene erlaubt.

Abb. 2 zeigt den Querschnitt eines Drehflügels, der gegen die Bewegungsrichtung um den Winkel Θ eingestellt ist. In den Querschnitt sind die Durchstoßpunkte von vier Axen eingezeichnet: Die aerodynamische Axe *1* geht durch denjenigen Punkt des Querschnittes, um den das Luftmoment infolge statischer Anstellwinkeländerungen verschwindet. Bei üblichen Flügelprofilen liegt die aerodynamische Axe 23 bis 25% der Flügeltiefe von der Vorderkante des Flügels entfernt. Die Schweraxe *2* geht durch den Massenschwerpunkt des Querschnittes. Die Torsionsaxe *3* verbindet diejenigen Punkte, durch welche Querkräfte gelegt werden können ohne Verdrillung zu erzeugen, und die Biegeaxe *4* verbindet diejenigen Punkte, durch welche Längskräfte gelegt werden können ohne Verbiegung zu erzeugen. Wenn Schweraxe und Biegeaxe zusammenfallen, was meistens angenähert der Fall ist, haben die Fliehkräfte kein Biegemoment. Die relative Lage dieser vier Axen spielt für die Selbsterregung von Drehflügelschwingungen eine entscheidende Rolle.

Ohne Luftkräfte und Luftmomente klingen die Eigenschwingungen der Drehflügel infolge der Baustoffdämpfung mehr oder weniger rasch ab. Durch die am schwingenden Drehflügel geweckten Luftkräfte und Luftmomente werden erstens die Eigenschwingungsformen beeinflußt, und zweitens werden die Dämpfungsbeizahlen der Eigenschwingungen verändert, wobei die ursprünglich vorhandene Dämpfung vergrößert oder verringert werden kann. Die dynamische Stabilitätsgrenze ist diejenige Drehzahl, bei welcher die Dämpfung einer Eigenschwingung zu Null geworden ist. Jenseits der Stabilitätsgrenze setzt Selbsterregung ein. Ist die Schwingungsform mit erheblichen vertikalen Amplituden verbunden so nennt man den Zustand der Selbsterregung Flattern. Für andere Formen der Selbsterregung wird die Bezeichnung Flattern manchmal im übertragenen Sinne gebraucht.

[1] Die Methode der direkten Analogie ist für den Standlauf beschrieben in *R. H. MacNeal.* Direct Analog Method of Analysis of the Vertical Flight Characteristics of the Lifting Roter with Floating Hub, J. Am. Hel. Soc. 3 (1958) H. 4. Seitdem wurde die Methode auf Zustände des Vorwärtsfluges erweitert.

Die meisten theoretischen Untersuchungen über die Selbsterregung von Drehflügelschwingungen beschränken sich auf lineare Systeme[1]. Die Nichtlinearität kann einerseits die Zerstörung eines Systems nach Überschreiten der linearen Stabilitätsgrenze verhindern, indem an Stelle des unbegrenzten Anwachsens einer Schwingung sich ein stabiler Grenzschwingungszustand einstellt; die Nichtlinearität kann andererseits aber auch neue selbsterregte Zustände herbeiführen, die im linearisierten System nicht auftreten können. Derartige Zustände sind sowohl bei Flugzeugflügeln wie bei Drehflügeln bekannt geworden. Sie treten bei großen Anstellwinkeln auf, bei denen Strömungsablösung eine Rolle spielt. Ein solcher Fall soll hier kurz besprochen werden.

Abb. 3 zeigt die durch einen Modellversuch im Standlauf ermittelte Rotorumlaufzahl an der Flattergrenze Ω_F und die Flatterschwingungszahl ω_F eines Drehflügels[2]. Die Drilleigenschwingungszahl ω_Θ des Drehflügels ohne Einfluß der Fliehkraft ist ein Maß der Drillsteifigkeit. In Abb. 3 ist wie üblich das Verhältnis ω_Θ/Ω_F und das Verhältnis ω_F/ω_Θ über dem Blatteinstellwinkel Θ aufgetragen. Man erkennt, daß unterhalb des Einstellwinkels von 12° die Flattergrenze und die Flatterschwingungszahl nahezu unabhängig vom Blatteinstellwinkel sind. In diesem Bereich haben wir klassisches Flügelflattern, auf das wir im nächsten Abschnitt etwas näher eingehen werden. Oberhalb 12° Blatteinstellwinkel sinkt die Flatterdrehzahl rasch ab, und die Flatterschwingungszahl nähert sich der Drilleigenschwingungszahl. Dieser zweite Ast der Flatterkurven ist durch die nichtlineare Beziehung zwischen Auftrieb und Anstellwinkel infolge Abreißens der Strömung am Profil bedingt. Um bei einer bestimmten Rotordrehzahl Flattern zu vermeiden, muß im nichtlinearen Bereich die Drilleigenschwingungszahl und damit die Drillsteifigkeit gegenüber dem linearen Bereich wesentlich erhöht werden. Das nichtlineare Gebiet liegt im allgemeinen außerhalb des normalen Flugbereichs. Bei extremen Abfangszuständen kann jedoch sehr wohl kurzzeitig durch Nichtlinearität bedingtes Flattern auftreten, und diese Frage erfordert weiteres Studium.

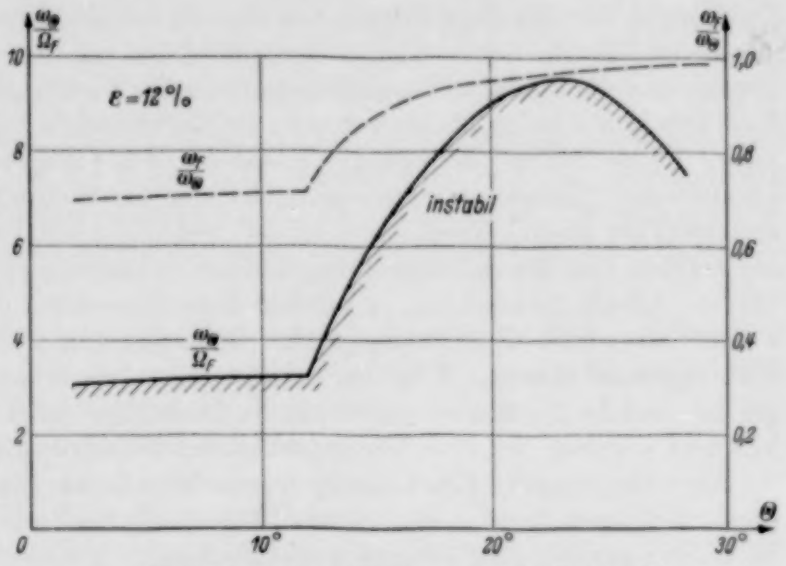


Abb. 3. Ergebnis von Flatterversuchen im Standlauf.

Die selbsterregten Drehflügelschwingungen im linearen Gebiet lassen sich in drei Gruppen einordnen. In der ersten Gruppe ist der Mechanismus der Selbsterregung der gleiche wie im Falle des klassischen Flügelflatterns. Eine Eigenschwingungsform mit im wesentlichen vertikalen Schwingungsamplituden und eine zweite Eigenschwingungsform mit im wesentlichen Drillschwingungsamplituden werden durch Hinzunahme der Luftkräfte und Luftmomente in solcher Weise gekoppelt, daß die eine der beiden Kopplungsschwingungsformen bei Erreichen der Flatterdrehzahl ihre Dämpfung verliert. Die Flatterschwingungszahl liegt zwischen der ursprünglichen Schlag- oder Schlagbiegeschwingungszahl und der ursprünglichen Drillschwingungszahl.

In der zweiten Gruppe linearer Selbsterregung ist es die tangentiale Blatteigenschwingung, welche durch Kopplung mit anderen Eigenschwingungen ihre Dämpfung verliert. Starrflügel sind in tangentialer Richtung zu steif als daß diese Art der Selbsterregung auftreten könnte, sie wurde daher nur bei Drehflügeln mit ihren großen Verhältnissen von Länge zu Tiefe beobachtet. Die Frequenz der selbsterregten Schwingung ist angenähert gleich der Frequenz der tangentialen Flügeleigenschwingung.

In der dritten Gruppe linearer Selbsterregung ist die Ursache für die Instabilität die Periodizität der Proportionalitätsfaktoren, welche mit den Verschiebungen oder mit den Verschiebegeschwindigkeiten multipliziert die Luftkräfte ergeben. Der einfachste Fall einer durch Koeffizientenperiodizität verursachten Instabilität ist der lineare Schwinger mit harmonisch veränderlicher Elastizität, und es ist bekannt, daß ein solches System der Selbsterregung fähig ist.

---

[1] Eine Ausnahme hierzu ist: *A. Gessow* und *A. D. Crim*. A Method for Studying the Transient Blade-Flapping Behaviour of Lifting Rotors at Extreme Operating Conditions, NACA T.N. 3366, Nov. 1954.

[2] *G. W. Brooks* und *J. E. Baker*, An Experimental Investigation of the Effects of Various Parameters Including Tip Mach Number on the Flutter of Some Helicopter Rotor Blades. NACA T.N. 4005, Sept. 1958.

Von den drei erwähnten Möglichkeiten der Selbsterregung können die beiden ersten sowohl im Standlauf wie auch im Vorwärtsflug des Drehflüglers auftreten. Der Vorwärtsflug verändert die Drehzahlgrenzen für dynamische Stabilität, wobei diese Grenzen sowohl verbessert wie auch verschlechtert werden können. Die dritte Möglichkeit der Selbsterregung ist auf den Vorwärtsflug beschränkt und erfordert im allgemeinen hohe Fortschrittsgrade mit großen Gebieten der Rückwärtsanblasung der Drehflügel. Die drei Fälle sollen nunmehr etwas mehr ins einzelne gehend besprochen werden.

3. Drehflügelflattern im Standlauf. Die erste Anwendung der klassischen Flattertheorie auf den Drehflügel im Standlauf ergab, daß für die im Verhältnis zum Starrflügel relativ hohen Massenzahlen und für die im Verhältnis zum Starrflügel relativ geringen vertikalen Steifigkeiten die Flattergrenze und die statische Torsionskippgrenze für Kippen um die Schweraxe nahezu zusammenfallen[1]. Erst kürzlich wurden Flatterversuche an Modelldrehflügeln vorgenommen, welche eine Nachprüfung dieser theoretischen Überlegungen erlauben. Abb. 4 zeigt einen Vergleich zwischen der versuchsmäßig bestimmten Flattergrenze (ausgezogen) und der theoretischen statischen Torsionskippgrenze (gestrichelt) für einen starren angelenkten Drehflügel mit Torsionsfeder an der Flügelwurzel. Die Versuchsdaten sind Modellversuchsergebnissen entnommen[2]. Die statische Kippgrenze ist einer theoretischen Arbeit entnommen, in welcher diese Grenze mit den Flattergrenzen verschiedener Theorien verglichen wird[3]. Für Schwerpunktsrücklagen von 2% an stimmt die Kippgrenze gut mit der Flattergrenze überein. Für sehr geringe Schwerpunktsrücklagen machen sich gewisse Kopplungsglieder, welche die Massenverteilung des Drehflügels senkrecht zur Umlaufebene enthalten, bemerkbar und verursachen eine Verringerung der Flatterumlaufzahl.

Eine interessante Erscheinung wurde bei kleinen Blatteinstellwinkeln und bei großen Schwerpunktrücklagen (größer als 5% der Flügeltiefe) beobachtet. Es gibt dann, wie Abb. 4 zeigt, oberhalb der eigentlichen Flattergrenze ein schmales Gebiet, innerhalb dessen relativ schwache Flatterschwingungen auftreten. Dieses Flattergebiet läßt sich theoretisch vorhersagen, wenn man gewisse Annahmen über die Wirbelstruktur des Schraubenabwindes macht[4,5]. Bei den erwähnten Flatterversuchen war es möglich, die Drehzahlen für dieses Abwindflattern zu durchschreiten und bei erhöhten Drehzahlen einen neuen stabilen Zustand zu erreichen. Die Erscheinung des Abwindflattern ist zwar theoretisch sehr interessant, sie scheint jedoch praktisch keine große Bedeutung zu haben, da sie auf geringe Blatteinstellwinkel, größere Schwerpunktrücklagen und verschwindende relative horizontale Anströmung des Rotors beschränkt ist.

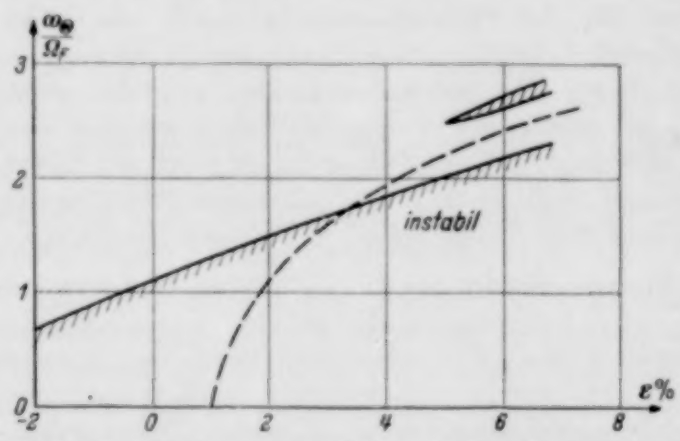


Abb. 4. Vergleich der versuchsmäßig ermittelten Flattergrenze im Standlauf (ausgezogen) mit der statischen Torsionskippgrenze (gestrichelt).

Der in Abb. 4 dargestellte Fall des starren angelenkten Drehflügels mit Torsionsfeder an der Flügelwurzel ist nur eine mehr oder weniger gute Annäherung an den wirklichen Drehflügel, bei welchem außer dem Abstand zwischen aerodynamischer Axe und Schweraxe und außer der Drilleigenfrequenz noch eine Reihe weiterer Parameter einen gewissen Einfluß auf die Flattergrenze haben. Auf einige dieser Einflüsse soll im folgenden kurz hingewiesen werden.

Blattmassenzahl. Das Verhältnis der Blattmasse zur Masse eines bestimmten Luftvolumens hat nur einen geringen Einfluß auf die Flattergrenze[6]. (Wenn die Massenzahl ein wesentlicher Flatterparameter wäre, könnte die statische Torsionskippgrenze, welche von der Massenzahl unabhängig ist, keine brauchbare Näherung der Flattergrenze darstellen.)

Torsionsaxe. Für das Modell der Abb. 4 fielen Torsionsaxe und aerodynamische Axe zusammen. Während bei Flugzeugflügeln die Lage der Torsionsaxe wesentlich für die Flattergrenze ist,

[1] *K. Hohenemser*, Ing.-Arch. 10 (1939) S. 133. Die näherungsweise Gleichheit von Flattergrenze und statischer Torsionskippgrenze für Kippen um die Schweraxe wurde für den schweren biegeweichen Flügel auch von *Theodorsen* und *Garrick* gefunden (Mechanism of Flutter usw. NACA Rept. No. 685, 1940).

[2] *H. Daughaday, F. Duwaldt* und *C. Gates*, J. Am. Hel. Soc. 2 (1957) H. 3.

[3] *R. H. Miller* und *C. W. Ellis*, J. Am. Hel. Soc. 1 (1956) H. 3.

[4] *R. G. Loewy*, J. Aeron. Sc. 24 (1957) S. 81.

[5] *R. Timman* und *A. I. van der Vooren*, J. Aeron. Sc. 24 (1957) S. 694.

[6] s. Fußnote 2 von S. 102.

kann man bei Drehflügeln die Torsionsaxe innerhalb der für die Konstruktion praktischen Grenzen verschieben, ohne allzu große Änderungen in der Flattergrenze zu erhalten[1].

Statische Ausbiegung in der Umlaufebene. Statische Verbiegungen des Drehflügels in der Umlaufebene, wie sie durch statische tangentiale Luftkräfte hervorgerufen werden, oder wie sie durch einen größeren Abstand der Biegeaxe von der Schweraxe entstehen, haben ebenfalls keinen großen Einfluß auf den dynamischen Vorgang der Selbsterregung[2].

Vertikale Biegefederung. Die Einführung von vertikaler Biegefederung bringt zunächst nur geringfügige Änderungen in der Flatterdrehzahl. Mit wachsender Biegeweichheit tritt jedoch der Fall ein, daß die Flatterschwingungsform nicht mehr aus einer Kopplung der Schlagschwingung mit der Drillschwingung besteht, sondern daß die erste Biegeschwingung mit der Drillschwingung gekoppelt ist[3]. Abb. 4 ist dann als Näherung nicht mehr zu gebrauchen.

Torsionsfederung des Drehflügels. Der Einfluß der über die Flügellänge verteilten Torsionselastizität ist im allgemeinen gering, da die Hauptdrillweichheit von der Steuerung herrührt, die als Drillfeder an der Flügelwurzel angenähert werden kann. Es genügt meist, die verteilte Torsionselastizität lediglich in der Ermittlung der Drilleigenfrequenz zu berücksichtigen, nicht aber in der Ermittlung der Drillschwingungsform[4].

Schlagwinkel-Blattwinkelkopplung. Vielfach wird eine kinematische Schlagwinkel-Einstellwinkelkopplung verwendet, wobei ein Aufwärtsschlagen eine Verringerung des Einstellwinkels bewirkt. Die Schlagaxe ist unter dem Winkel δ_3 gegen die Normale zur Flügelaxe angeordnet, siehe Abb. 5. Das Verhältnis der Einstellwinkeländerung zur Schlagwinkeländerung ist $\partial\Theta/\partial\beta = -\tan\delta_3$. Eine solche Kopplung hat einen erheblichen Einfluß auf die Flatterdrehzahl und ist gleichbedeutend mit einer Rückverschiebung des Schwerpunktes. Für ein typisches Hubschrauberblatt erhält man für $\delta_3 = 45°$ eine äquivalente Schwerpunktsrücklage von 2,5% der Flügeltiefe. Wenn die Flattergrenze durch die Torsionskippgrenze angenähert werden soll, muß Auskippen um die äquivalente Schweraxe angenommen werden, die um diesen Betrag hinter der wirklichen Schweraxe liegt.

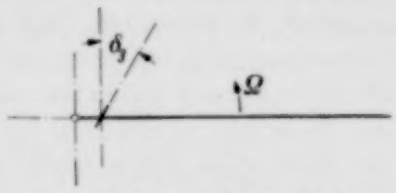


Abb. 5. Schematische Draufsicht des Drehflügels.

Vorwärtsflug. Abb. 4 gilt für den Standlauf. Modellversuche im Vorwärtsflug ergaben, daß für mäßige Fortschrittsgrade im Bereich der für Hubschrauber üblichen Werte die Flatterdrehzahl etwas erniedrigt wird[5]. Für größere Fortschrittsgrade kann die Periodizität der Koeffizienten eine neue Art von dynamischer Instabilität hervorrufen, die im letzten Abschnitt besprochen werden wird.

4. Selbsterregte Standlaufschwingungen in der Umlaufebene. Bei den kollektiven Schwingungen sind die Schwingungsphasen für die verschiedenen Drehflügel die gleichen. Der Rotor verhält sich dann wie ein Schwungrad, das am oberen Ende der Rotorwelle angebracht ist. Das Trägheitsmoment dieses äquivalenten Schwungrades ist für jede der Eigenschwingungsformen der Blätter verschieden. Die kollektiven Blattschwingungen müssen bei der Torsionsschwingungsberechnung der Welle berücksichtigt werden. Abgesehen von Fällen mit instabilen Drehzahlregelungsanlagen haben kollektive Blattschwingungsformen, soweit Schwingungen in der Umlaufebene eines einzigen Rotors in Frage kommen, zu keiner dynamischen Instabilität geführt.

Außer der kollektiven Form gibt es bei drei- oder mehrflügeligen Rotoren zwei weitere Schwingungsformen, bei denen die Schwingungsamplituden der verschiedenen Drehflügel eines Rotors die gleichen, die Schwingungsphasen jedoch verschieden sind. Addiert man die Verschiebungen der Flügelschwerpunkte geometrisch, so findet man, daß jetzt der Gesamtschwerpunkt des Rotors eine Kreisbewegung um die Rotoraxe ausführt. Erfolgt die Kreisbewegung im Umlaufsinne, so redet man von einer zyklischen Gleichlaufschwingung, erfolgt die Kreisbewegung entgegen dem Umlaufsinne, so redet man von einer zyklischen Gegenlaufschwingung. Die Winkelgeschwindigkeit der

---

[1] *L. Goland* und *A. A. Perlmutter*, J. Aeron. Sc. 24 (1957) S. 281.
[2] s. Fußnote 3 von S. 102.
[3] s. Fußnote 2 von S. 102.
[4] s. Fußnote 2 von S. 102.
[5] *F. W. Brooks* und *M. A. Sylvester*, The Effect of Control Stiffness and Forward Speed on the Flutter of a 1/10-Scale Dynamic Model of a Two-Blade Jet-Driven Helicopter Rotor. NCAA T.N. 3376, Apr. 1955.

Schwerpunktskreisbewegung ist, bezogen auf das umlaufende Koordinatensystem, gleich der Kreisfrequenz der Blatteigenschwingung.

Unter den selbsterregten Blattschwingungen in der Umlaufebene befindet sich eine Art, die auch ohne Luftkräfte auftreten kann. Solche Selbsterregungen wurden bereits an den ersten Drehflüglern beobachtet und später auch theoretisch untersucht[1,2]. Die selbsterregte Schwingungsform ist eine zyklische Gegenlaufschwingung, und die Selbsterregung wird durch Kopplung dieser Schwingung mit Schwingungen der Zelle verursacht, die mit horizontalen Bewegungen der Nabe verbunden sind. Das Zentrum des Drehzahlbereiches für Selbsterregung liegt bei derjenigen Rotordrehzahl, für welche die Differenz Drehzahl und ungekoppelter Blatteigenfrequenz (im rotierenden System) gleich der ungekoppelten Zelleneigenfrequenz ist. Bei der zyklischen Gegenlaufschwingung rotiert der Schwerpunkt des Rotors, bezogen auf das raumfeste Koordinatensystem, mit der Frequenz von Drehzahl minus Blatteigenfrequenz, so daß ohne Kopplung ein kritischer Zustand vorliegen müßte, wenn diese Umlauffrequenz mit der Eigenfrequenz der Zelle zusammenfällt. Wie die Theorie der gekoppelten Schwingungen zeigt, handelt es sich dabei jedoch nicht um einen diskreten kritischen Schleuderzustand, wie er bei umlaufenden Wellen mit starren Scheiben vorkommt, sondern die Selbsterregung erstreckt sich über einen endlichen Drehzahlbereich in der Nachbarschaft der kritischen Drehzahl. Die Theorie der Kopplung zeigt weiter, daß der entsprechende „kritische" Zustand für die Gleichlaufschwingung infolge der Kopplung nicht zur Selbsterregung führen kann.

Für verschwindende Dämpfung der Blattschwingungen wie auch der Zellenschwingungen sind die Konstruktionsbedingungen zur Vermeidung mechanischer Selbsterregung einfach. Man muß lediglich dafür sorgen, daß die maximale Drehzahl um einen gewisses Maß unter der Summe von Blatteigenfrequenz und Zelleigenfrequenz bleibt. Weniger einfache Verhältnisse erhält man, wenn Dämpfung vorhanden ist. Während genügend große Dämpfung sowohl der Blattbewegung wie auch der Zellenbewegung den instabilen Drehzahlbereich unterdrückt, kann eine zu geringe Dämpfung den instabilen Bereich des ungedämpften Systems erweitern und neue instabile Bereiche herbeiführen[3].

Zyklische Gleichlauf- und Gegenlaufschwingungen können auch aerodynamisch selbsterregt werden. Abb. 6 zeigt die theoretische Stabilitätsgrenze der Schwingungen in der Umlaufebene eines starren Drehflügels mit Schlag- und Schwenkgelenk[4]. Der Drehflügel hat eine Blattwinkel-Schwenkwinkelkopplung, wobei einer Vergrößerung des Schwenkwinkels entgegen der Drehrichtung eine Verringerung des Blattwinkels ergibt. Die Schwenkschwingung wird selbsterregt, wenn der Kopplungsfaktor $\partial\Theta/\partial\zeta$ einen gewissen negativen Wert überschreitet, der mit zunehmender Blatteinstellung kleiner wird. Die Frequenz der selbsterregten Schwingung ist nahezu gleich der Eigenfrequenz

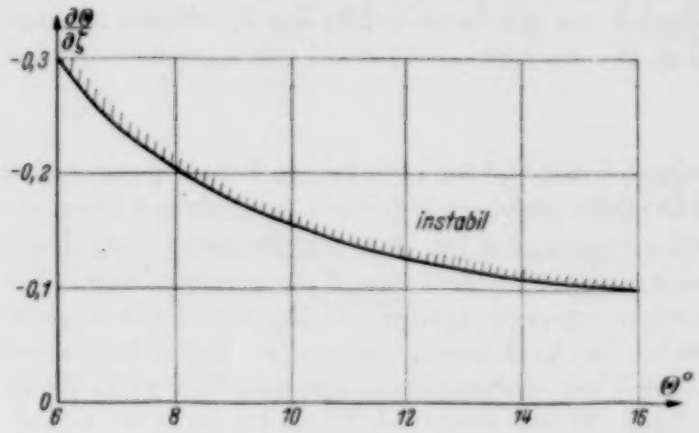


Abb. 6. Grenze der Selbsterregung des starren angelenkten Drehflügels mit Blattwinkel-Schwenkwinkelkopplung.

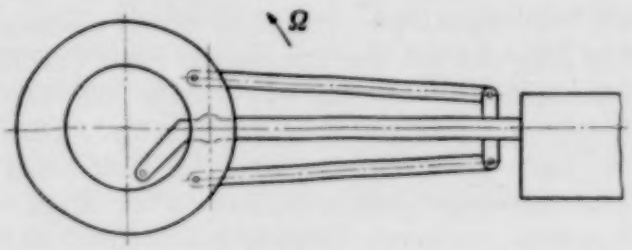


Abb. 7. Schematische Draufsicht des Taumelnabenrotors.

der Blattschwenkschwingung. Die Schwingungsphasen entsprechen denjenigen des zyklischen Gegenlaufs. Die Theorie der Selbsterregung von Schwenkschwingungen infolge Blattwinkel-Schwenkwinkelkopplung ist durch Beobachtung an Rotormodellen[5] und durch Standlaufversuche

[1] *K. Hohenemser*, Ing.-Arch. 14 (1943) S. 83.

[2] *R. P. Coleman* und *A. M. Feingold*, Theory of Self-Excited Mechanical Oscillations of Helicopter Rotors with Hinged Blades. NACA T.N. 3844, Febr. 1957. (Neudruck eines 1943 erschienenen vertraulichen Berichts).

[3] *T. Warming*, J. Am. Hel. Soc. 1 (1956) H. 3.

[4] *Pei Chi Chou*, J. Am. Hel. Soc. 3 (1958) H. 3.

[5] *J. W. McKee*, Pitch-Lag Instability as Encountered During Tests of a Model Rotor. Vorgetragen auf dem 26ten Meeting des Inst. Aeron. Soc. New York, Jan. 1958 (IAS Preprint 807).

mit Originalrotoren veranlaßt worden, und sie liefert eine befriedigende Deutung der Versuchsergebnisse.

Ein wesentlich komplizierterer Fall von selbsterregten Blattschwingungen in der Umlaufebene wurde an einem Modell eines Taumelnabenrotors beobachtet und einer rechnerischen Untersuchung auf einer elektronischen Rechenanlage unterworfen[1]. Abb. 7 zeigt eine schematische Draufsicht des Rotors. Die Nabe kann um ein nicht gezeichnetes zentrales Gelenk frei taumeln. Die Drehflügel können in bezug auf die Nabe Schlagbewegungen ausführen, wobei infolge der Blattwinkel-Schlagwinkelkopplung Änderungen der Blatteinstellwinkel entstehen. Die Drehflügel sind durch je zwei Zugbänder an die Taumelnabe angeschlossen, die angenähert in der Umlaufebene liegen und den Blättern eine hohe Biegesteifigkeit in der Umlaufebene geben. Abb. 8 zeigt eine schematische Seitenansicht der Taumelnabe in Richtung einer Blattaxe. Die Anschlußpunkte der Zugbänder an die Nabe liegen auf einer Geraden, die gegen die Nabenebene um den Winkel Θ_s verdreht ist.

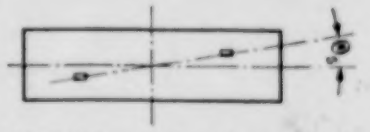


Abb. 8. Schematische Seitenansicht der Taumelnabe mit Anschlußpunkten der Zugbänder.

Ein solcher Rotor ist dynamisch ein sehr verwickeltes System, da die Bewegungen der verschiedenen Drehflügel eines Rotors auf mehrfache Weise miteinander verkoppelt sind. Standläufe mit dem Modell eines solchen Rotors zeigten selbsterregte Schwingungen der Blätter in der Umlaufebene, wobei die Frequenz der selbsterregten Schwingungen gleich der Eigenfrequenz der horizontalen Blattschwingung war. Die Stabilitätsgrenzen erwiesen sich abhängig vom Blatteinstellwinkel. Selbsterregung trat in einem gewissen Drehzahlbereich auf und verschwand wieder bei höheren Drehzahlen. Die Schwingungsform war diejenige des zyklischen Gleichlaufs, die nach dem früher gesagten mechanisch nicht selbsterregt werden kann.

Das Rotorsystem wurde auf einer elektronischen Rechenanlage, welche auf dem Prinzip der direkten Analogie beruht, untersucht[2]. Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 9 in der üblichen Weise wiedergegeben. Die zur Vermeidung von Selbsterregung gerade erforderliche Baustoffdämpfung g (doppeltes Verhältnis von Dämpfung zu kritischer Dämpfung) der Blattschwingung in der Umlaufebene wurde über der Umlaufzahl aufgetragen, die hier durch Bezug auf die tangentiale Blatteigenschwingungszahl dimensionslos gemacht wurde. Die zwei ausgezogenen Kurven gelten für die zyklische Gleichlaufschwingung bei 8 und 16 Grad Blatteinstellung, die beiden gestrichelten Kurven gelten für die zyklische Gegenlaufschwingung bei den gleichen Blattwinkeln. Die größte Baustoffdämpfung ist bei einer Drehzahl von etwa 0,5 erforderlich, darunter und darüber sind kleinere Werte ausreichend. Die erforderliche Baustoffdämpfung steigt mit wachsendem Blattwinkel. Praktisch vorhandene Baustoffdämpfungszahlen sind in der Größenordnung von $g = .02$[3], so daß es oberhalb 8 Grad Blattwinkel einen Drehzahlbereich gibt, in welchem Selbsterregung auftritt. Dies stimmt mit der Beobachtung am Modellrotor überein. Die Modellversuche erstreckten sich auf Drehzahlen bis zu $\bar{\Omega} = .8$ und zeigten keine Bereiche, in denen die zyklische Gegenlaufschwingung selbsterregt wurde. Nach dem Ergebnis der Rechnung in Abb. 9 ist bei darüber hinaus gehenden Drehzahlen bei hohen Blattwinkeln Selbsterregung der Gegenlaufschwingung zu erwarten.

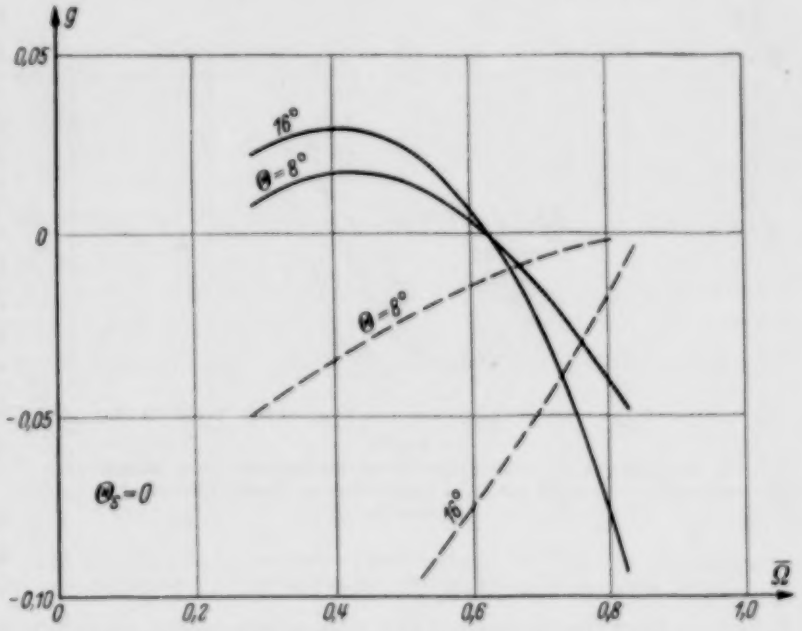


Abb. 9. $\bar{\Omega} - g$ Schaubild des Taumelnabenrotors für $\Theta_s = 0$.

[1] *K. H. Hohenemser* und *C. H. Perisho*, J. Am. Hel. Soc. 3 (1958) H. 4.

[2] s. Fußnote 1 von S. 100.

[3] *F. W. Gibson*, Determination of the Structural Damping Coefficient of 6 Full-Scale Helicopter Blades. NACA T.N. 3862, Dez. 1956.

Die Untersuchungen mit Hilfe der elektronischen Rechenanlage ergaben, daß die erforderlichen Baustoffdämpfungen stark herabgesetzt werden konnten, wenn die Ansatzpunkte der Zugbänder an der Nabe um geringe Winkel Θ_s verdreht wurden. Abb. 10 zeigt die Ergebnisse für $\Theta_s = 2°$. In allen vier Fällen ist die erforderliche Baustoffdämpfung so weit herabgesetzt, daß nunmehr Selbsterregung im ganzen Drehzahlbereich ausgeschlossen ist. Modellversuche bestätigten die Wirksamkeit dieser praktisch geringfügigen Änderung, welche jedoch die Kopplung zwischen den Blättern wesentlich verändert.

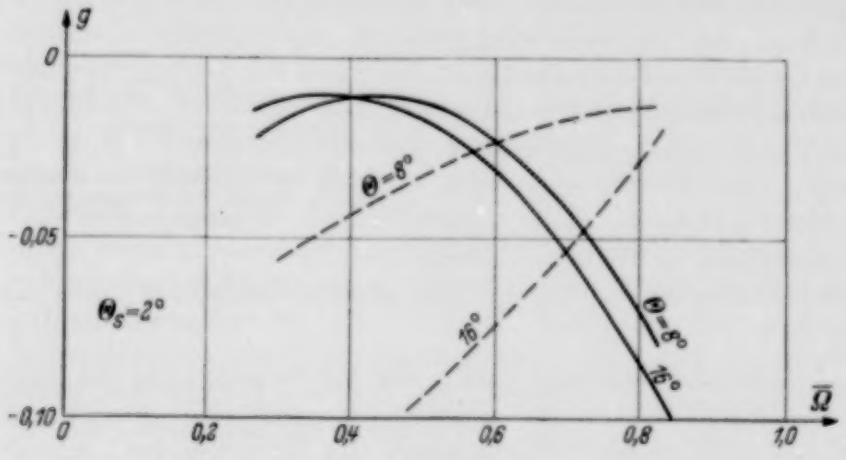


Abb. 10. $\bar{\Omega} - g$ Schaubild des Taumelnabenrotors für $\Theta_s = 2°$.

Die tatsächliche Ermittlung der vorhandenen Baustoffdämpfung ist wegen ihres geringen Wertes schwierig. Sie wurde für das Modell als zwischen .015 und .030 liegend geschätzt. Abb. 11 zeigt die durch Versuche am ursprünglichen Modell gewonnene Grenze der Selbsterregung verglichen mit den rechnerischen Grenzen für jede dieser beiden Baustoffdämpfungen. Die Versuchskurve liegt zwischen den beiden rechnerischen Grenzkurven, ein Zeichen dafür, daß die elektronische Berechnung der Selbsterregungsbereiche gut gelungen war.

Einfluß des Fortschrittsgrades. Der Einfluß des Fortschrittsgrades auf die Stabilität der Schlagbewegung von Rotoren mit angelenkten Drehflügeln ist mehrfach theoretisch untersucht worden[1,2] mit dem Ergebnis, daß unter den getroffenen Rechenannahmen Selbsterregung nicht vorkommen kann.

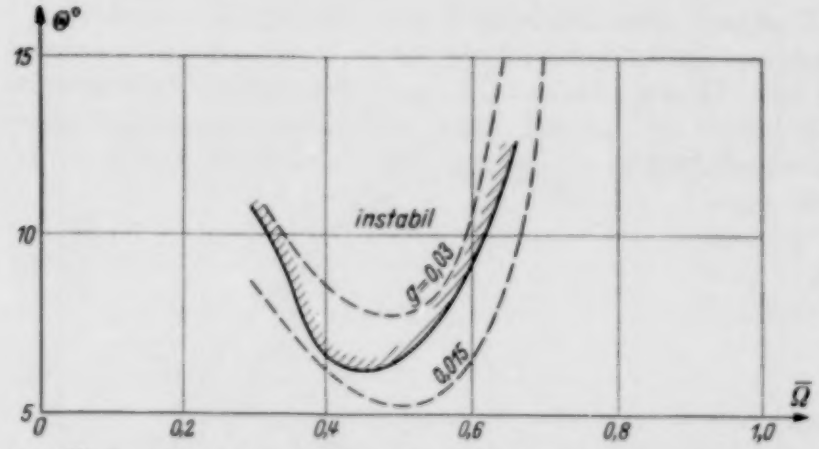


Abb. 11. Vergleich von versuchsmäßiger Grenze der Selbsterregung (ausgezogen) mit rechnerischen Grenzen für zwei angenommene Baustoffdämpfungen (gestrichelt).

Im Laufe von Windkanalmodellversuchen traten bei Fortschrittsgraden in der Größenordnung von 1,5 selbsterregte Schlagschwingungen auf[3]. Abb. 12 zeigt den Schlagwinkel β als Funktion des Azimuthwinkels ψ für den Zustand an der Grenze der Stabilität, wie er während eines Modellversuches gemessen wurde. Die Grundperiode der selbsterregten Schwingung ist gleich der doppelten Umlaufzeit des Rotors. Selbsterregte Schwingungen nach Art der Abb. 12 können theoretisch nachgewiesen werden, selbst wenn man nur einen einzigen Freiheitsgrad, den der Schlagbewegung, berücksichtigt. Im Ansatz der Luftkräfte dürfen allerdings keine Näherungen verwendet werden, die nur für kleine Fortschrittsgrade gültig sind, wie das in den früheren Arbeiten über die Stabilität der Schlagbewegung üblich war[4].

Während die Theorie für einen einzigen Freiheitsgrad zwar die grundsätzliche Erscheinung der Selbsterregung durch zeitliche Veränderlichkeit der Koeffizienten der Differentialgleichung der Schlagbewegung richtig wiedergibt, ist die numerische Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen nicht sehr gut. Der Grund hierfür ist der Einfluß der Elastizität der Drehflügel. Eine auch numerisch einwandfreie Behandlung des Problems erfordert ein Eingehen auf die Drill- und Biegefederungen der Drehflügel einschließlich all der elastischen, Massen- und Luftkraftkopplungen der verschiedenen Drill- und Biegeschwingungen. Die Differentialgleichungen dieses Problems sind aufgestellt worden[5], allerdings ohne die hier benötigten Luftkraftansätze, die auch bei hohen Fort-

[1] *G. Sissingh*, Techn. Ber. Z.W.B. 11 (1944) S. 359.
[2] *G. Horvay*, Rotor Blade Flapping Motion, Quart. Appl. Math. Juli 1947.
[3] *K. H. Hohenemser*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) H. 6—7.
[4] s. Fußnote 3 von S. 106.
[5] *J. C. Houbolt* und *G. W. Brooks*, Differential Equations of Motion for Combined Flapwise Bending, Chordwise Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. NACA T.N. 3905, Febr. 1957.

schrittsgraden ihre Gültigkeit behalten, doch ist die Lösung ohne ausgiebige Verwendung moderner elektronischer Rechenanlagen kaum möglich. Eine vereinfachte Lösung, in welcher lediglich ein Biegefreiheitsgrad hinzugenommen wurde, zeigt keine wesentliche Verbesserung gegenüber der Rechnung mit nur einem Freiheitsgrad[1]. Eine andere Lösung, in welcher lediglich ein Torsionsfreiheitsgrad hinzugenommen wurde, ist in Abb. 13 dargestellt[2]. Hier ist das Verhältnis S der Amplituden zweier aufeinander folgender Schwingungen als Funktion des Fortschrittsgrades aufgetragen. Die verschiedenen Punkte wurden durch numerische Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage gewonnen. Es wurde über eine Zeitspanne von etwa 10 Grundperioden integriert, welche im allgemeinen ausreichend war, um Konvergenz für den Amplitudenfaktor S zu erhalten. Die Grenze der Selbsterregung ist für $S = 1{,}0$ erreicht.

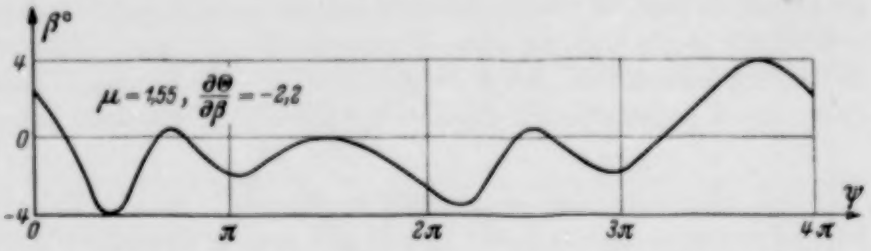


Abb. 12. Modellmessung einer Schlagschwingung an der Grenze der Selbsterregung.

Die ausgezogene Kurve in Abb. 13 gilt für verschwindende Schlagwinkel-Blattwinkelkopplung. In diesem Falle ist die Grundperiode der selbsterregten Schwingung gleich der Umlaufzeit. Die gestrichelte Kurve gilt für einen Kopplungsfaktor von $\partial\Theta/\partial\beta = -2{,}0$, wobei ein Aufwärtsschlagen eines Blattes eine Verringerung des Blattwinkels bewirkt. Die Grundperiode der selbsterregten Schwingung ist jetzt gleich der doppelten Umlaufzeit des Rotors ähnlich wie in Abb. 12. Die Rechnung mit den zwei Freiheitsgraden Schlagen und Blattverdrillung stimmt numerisch weit besser mit den Versuchsergebnissen überein als die Rechnung mit nur einem Freiheitsgrad.

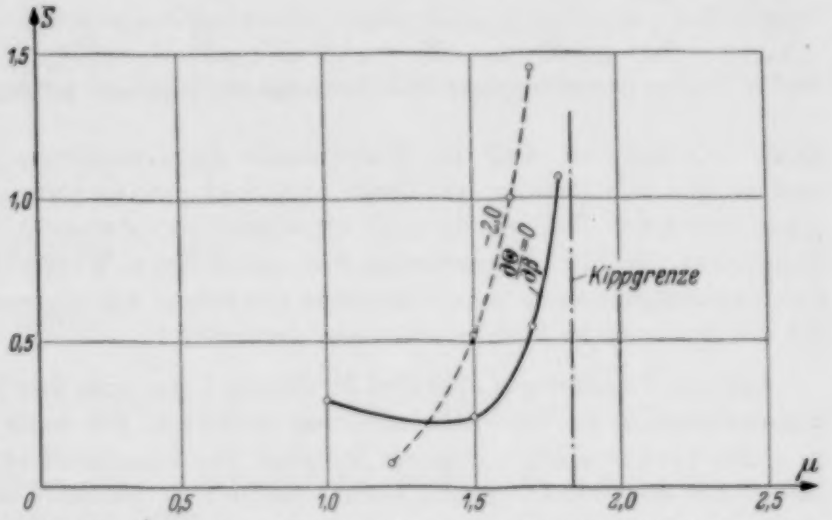


Abb. 13. Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Schwingungen, Rechnungsergebnis für die zwei Freiheitsgrade Schlagen und Torsion.

Von besonderem Interesse ist der Vergleich der dynamischen Stabilitätsgrenze mit der statischen Torsionskippgrenze für Kippen um die Schweraxe. Wie in dem Vorhergehenden ausgeführt ist diese Kippgrenze oft eine gute Näherung für die Flattergrenze von Drehflügeln im Standlauf. Es stellt sich nun heraus, daß die Torsionskippgrenze für die Strömungsverhältnisse am rückgehenden Blatt bei 270° Azimuthwinkel auch als eine brauchbare Näherung für die so viel kompliziertere Selbsterregung bei hohen Fortschrittsgraden verwendet werden kann. Bei üblichen Drehflügelkonstruktionen liegt die Schweraxe bei etwa 25% der Flügeltiefe, die aerodynamische Axe für Rückwärtsanblasung liegt bei etwa 75% der Flügeltiefe, so daß bei Verdrillung ein großes instabiles Drillmoment entsteht. Die statische Torsionskippgrenze für 270° Azimuthwinkel ist in Abb. 13 eingetragen. Sie stimmt gut mit der dynamischen Stabilitätsgrenze für $\partial\Theta/\partial\beta = 0$ überein. Eine Schlagwinkel-Blattwinkelkopplung hat keinen Einfluß auf die Kippgrenze, die dynamische Grenze der Selbsterregung wird jedoch durch eine solche Kopplung etwas herabgesetzt. Die numerische Integration über mehrere Grundperioden wurde auch für ein System mit drei Freiheitsgraden durchgeführt[3]. Der dritte Freiheitsgrad, Biegung, brachte eine Erniedrigung der dynamischen Grenze für den Fall $\partial\Theta/\partial\beta = -2{,}0$ und eine geringe Erhöhung dieser Grenze für den Fall $\partial\Theta/\partial\beta = 0$.

Schließlich soll noch an Hand der Abb. 14 der Fall eines Taumelnabenrotors nach Art der Abb. 7 besprochen werden. Für den Flug mit hohen Fortschrittsgraden ist die Nabe an die Steuertaumelscheibe angeschlossen und daher federnd gehalten. Im übrigen ist das dynamische System das gleiche wie zuvor besprochen, insbesondere sind wieder die verschiedenen Kopplungen der Blätter

[1] *Y. Shulman*, J. Aeron. Sc. 23 (1956) S. 663.
[2] *C. H. Perisho*, J. Am. Hel. Soc. 4 (1959) H 2.
[3] s. Fußnote 2 von S. 107.

untereinander vorhanden. Die Grenzkurven der Selbsterregung sind in Abb. 14 als $\mu\,\bar{\Omega}$ über $\bar{\Omega}$ aufgetragen. Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors ist hier durch Bezug auf die Drehzahl im Hubschrauberflug dimensionslos gemacht worden. Die unterste Kurve in Abb. 14 ist das Ergebnis von Windkanalversuchen. Die zweitunterste Kurve wurde mit Hilfe einer auf direkter Analogie beruhenden elektronischen Rechenanlage gewonnen. Der strich-punktierte Ast der obersten Kurve stellt die mit üblichen Methoden berechnete Flattergrenze für den Zustand des Drehflügels im Augenblick des Durchgangs durch die 90° Azimuthlage dar. Die drei Kurven sind nicht direkt miteinander vergleichbar, da sie sich auf etwas voneinander verschiedene Rotoren beziehen. Allen drei Grenzkurven ist jedoch gemeinsam, daß sie einen mehr oder weniger horizontalen Ast und einen steil abfallenden Ast besitzen. Für Zustände am horizontalen Ast ergaben sich Grundperioden der selbsterregten Schwingungen gleich der doppelten Umlaufzeit des Rotors, ähnlich wie in Abb. 12 gezeigt. Für Zustände am steil abfallenden Ast ergaben sich Grundperioden, die kleiner waren als die Umlaufzeit des Rotors.

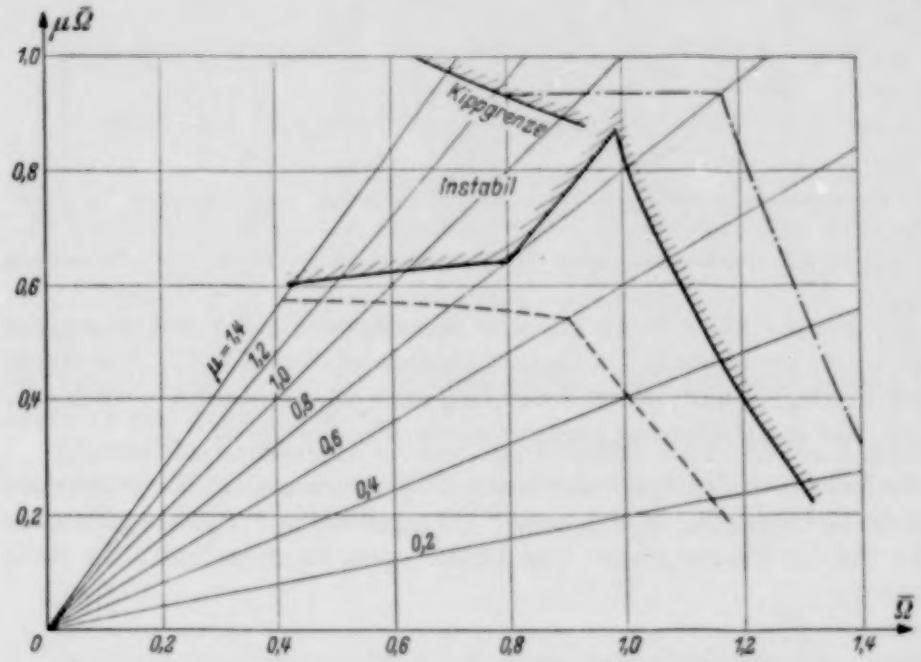


Abb. 14. Grenzen der Selbsterregung für Taumelnabenrotor mit federnd gehaltener Nabe.

Die durch elektrische Analogie ermittelte Grenzkurve (in Abb. 14 ausgezogen gezeichnet) hat in großen Zügen einen ähnlichen Verlauf wie die durch Modellversuche ermittelte Grenzkurve. Von besonderem Interesse ist die Tatsache, daß selbst die durch eine übliche Flatterrechnung für 90° Azimuthwinkel ermittelte Grenzkurve einen nahezu horizontalen und einen steil abfallenden Ast besitzt. Es scheint, daß im Knickpunkt der Grenzkurve sich der Typus der Flatterschwingung ändert und von gekoppelter Drill- und Schlagschwingung zu gekoppelter Drill- und Biegeschwingung übergeht. Wie in Abb. 13 ist wieder die statische Torsionskippgrenze für Kippen um die Schweraxe für 270° Azimuthwinkel eingezeichnet. Wegen der dynamischen Kopplungen zwischen den Drehflügeln kann man hier nicht erwarten, daß die statische Kippgrenze eine gute Näherung für die dynamische Stabilitätsgrenze darstellt.

Aus den Ergebnissen aller drei Methoden kann man den Schluß ziehen, daß im Vorwärtsflug zwei verschiedene Arten der Selbsterregung auftreten. Die erste Art ist dem Standlaufflattern ähnlich, und der Vorwärtsflug verringert lediglich die Standlaufflatterdrehzahl um ein gewisses Maß. Die zweite Art der Selbsterregung beruht auf der Periodizität der Koeffizienten in den Bewegungsgleichungen. Diese Art kommt nur bei hohen Fortschrittsgraden vor. Die Grundperiode dieser selbsterregten Schwingung ist entweder gleich der Umlaufzeit oder gleich der doppelten Umlaufzeit des Rotors.

Der Einfluß des Fortschrittsgrades wurde in Einzelfällen auch für die selbsterregten Schwingungen in der Umlaufebene untersucht. Auf mäßige Fortschrittsgrade beschränkte Modelluntersuchungen ergaben einen nur geringen Einfluß des Vorwärtsfluges. Untersuchungen mit der Methode der elektrischen Analogie hatten das gleiche Ergebnis und zeigten weiter, daß bei hohen Fortschrittsgraden in der Größenordnung von eins die Selbsterregung der Schwingungen in der Umlaufebene verschwand. Dieses Ergebnis könnte jedoch auf den speziellen Fall, der untersucht wurde, beschränkt sein und sollte ohne weitere systematische Nachprüfungen nicht verallgemeinert werden.

(Eingegangen am 28. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Kurt H. Hohenemser*, 2421, Remington Lane, St. Louis 17, Mo. USA.

Wärmespannungen bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz

Von **F. Jindra**

1. Einleitung. Die klassische Elastizitätstheorie geht vom *Hooke*schen Gesetz aus, das einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen annimmt. Die Verzerrungen werden als unendlich klein angesehen, indem höhere Potenzen der Verzerrungsgrößen gegenüber Gliedern von erster Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Viele Werkstoffe befolgen auch schon bei kleinen Verzerrungen nicht mehr das *Hooke*sche Gesetz, so daß ein nichtlineares Gesetz zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften erforderlich wird. Ein nichtlineares Elastizitätsgesetz, dessen Gültigkeit wie in der klassischen Theorie auf kleine Verzerrungen beschränkt bleibt, hat *H. Kauderer* angegeben.[1]

Im folgenden werden Spannungen, die durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden, unter der Annahme des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes für kleine Verzerrungen untersucht. In Ziff. 2 werden die thermisch-elastischen Grundgleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie zusammengestellt. Als Anwendung behandeln wir zuerst (Ziff. 3) die von einem stationären Wärmestrom herrührenden Spannungen in einer dickwandigen Hohlkugel. Als zweites Beispiel folgt (Ziff. 4) der ebene Spannungszustand, der sich in einer dünnen Kreisringscheibe infolge eines stationären Temperaturfeldes ausbildet. Um die dabei auftretenden nichtlinearen Differentialgleichungen integrieren zu können, müssen wir uns allerdings auf eine einfache, bestimmte Form des Gesetzes beschränken. Die Zahlenbeispiele lassen wieder die bei anderen schon behandelten Problemen[2] beobachtete, für das nichtlineare Gesetz charakteristische Tendenz erkennen, daß die Spannungsspitzen gegenüber ihren Werten beim linearen Elastizitätsgesetz abgebaut werden.

2. Die elastischen Grundgleichungen. Mit den auf ein rechtwinkliges (x, y, z)-System bezogenen Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ und den zugehörigen Verzerrungskomponenten $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \psi_{xy}, \psi_{yz}, \psi_{zx}$ lauten die Grundgleichungen des nichtlinearen Elastizitätsgesetzes

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\,(\sigma_x - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\,(\sigma_y - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\,(\sigma_z - \sigma_0)\,, \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2)\,\tau_{xy}\,, \qquad \psi_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2)\,\tau_{yz}\,, \qquad \psi_{zx} = \frac{1}{G} g(t_0^2)\,\tau_{zx}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dabei bedeuten K und G den Kompressions- und den Schubmodul der linearen Theorie und s_0 und t_0 die invarianten, dimensionslosen Spannungsgrößen

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{\sigma_0}{3K}\,, \qquad t_0 = \frac{\tau_0}{G}\,, \\ \sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,, \\ \tau_0^2 &= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Von der Kompressionsfunktion $k(s_0)$ und der Schubfunktion $g(t_0^2)$ wird angenommen, daß sie sich in Potenzreihen entwickeln lassen:

$$k(s_0) = 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 + k_3 s_0^3 + \ldots, \qquad g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + g_6 t_0^6 + \ldots, \tag{3}$$

wobei die Koeffizienten dieser Reihen Stoffzahlen sind.

[1] *H. Kauderer*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 450; *H. Kauderer*, Nichtlineare Mechanik, S. 14, Berlin 1958; *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 1, S. 35, Berlin 1953.

[2] *F. Jindra*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 411; 23 (1955) S. 122; 23 (1955) S. 373.

Tritt in einem isotropen, homogenen Körper eine Temperaturänderung $T = T(x, y, z)$ auf, so ergeben sich bei freier Ausdehnung der einzelnen Volumelemente die Dehnungen und die Schiebungen:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\, T\,, \qquad \psi_{xy} = \psi_{yz} = \psi_{zx} = 0\,, \tag{4}$$

wenn α den Wärmeausdehnungskoeffizienten bezeichnet.

Im allgemeinen ist eine unbehinderte Volumänderung an einzelnen Elementen bei Temperaturänderungen nicht möglich. Es treten also Wärmespannungen auf. Die gesamten Dehnungen setzen sich dann aus den durch die Spannungen nach (1) und den durch die Temperatur nach (4) hervorgerufenen Anteilen zusammen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K}\, k(s_0)\, \sigma_0 + \frac{1}{2G}\, g(t_0^2)\, (\sigma_x - \sigma_0) + \alpha\, T\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K}\, k(s_0)\, \sigma_0 + \frac{1}{2G}\, g(t_0^2)\, (\sigma_y - \sigma_0) + \alpha\, T\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K}\, k(s_0)\, \sigma_0 + \frac{1}{2G}\, g(t_0^2)\, (\sigma_z - \sigma_0) + \alpha\, T\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Ausdrücke (1) für die Winkeländerungen werden von den Temperaturänderungen nicht betroffen. Die Unabhängigkeit der elastischen und thermischen Materialkonstanten von der Temperatur wird vorausgesetzt.

Die Ermittlung des Spannungsverlaufs wird bei willkürlich vorgegebenen Kompressions- und Schubfunktionen (3) ziemlich große Schwierigkeiten bereiten. Bei den Anwendungen wollen wir deshalb die Rechnung vereinfachen und uns auf die einfache, physikalisch sinnvolle Annahme beschränken, daß die Funktionen (3) in der Form

$$k(s_0) \equiv 1\,, \qquad g(t_0^2) \equiv 1 + g_2\, t_0^2 \tag{6}$$

gegeben sind und $g(t_0^2)$ nur wenig vom Wert Eins abweicht. Diese Annahme ist aber allgemein genug, um eine Anpassung von Versuchsergebnissen zu ermöglichen.

3. Die Hohlkugel. Findet durch die Wände einer dickwandigen Hohlkugel eine stationäre Wärmeströmung statt, so wird der hierdurch hervorgerufene Spannungs- und Formänderungszustand um den Kugelmittelpunkt symmetrisch sein.

Wie das Kräftegleichgewicht an irgendeinem Element der Kugel im Abstand r vom Mittelpunkt zeigt, gilt zwischen Radialspannung σ_r und Tangentialspannung σ_φ die folgende Beziehung

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + \frac{r}{2}\,\frac{d\sigma_r}{dr}\,. \tag{7}$$

Bezeichnet u die radiale Verschiebung, so ist die Formänderung vollständig durch die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}\,, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \tag{8}$$

beschrieben. Der Zusammenhang der Dehnungen mit den Spannungen und dem Temperaturverlauf $T(r)$ ist durch die Grundgleichungen (5) festgelegt:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} &= \frac{1}{9K}\, k(s_0)\, (\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi) + \frac{1}{3G}\, g(t_0^2)\, (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \alpha\, T\,, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} &= \frac{1}{9K}\, k(s_0)\, (\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi) + \frac{1}{6G}\, g(t_0^2)\, (\sigma_\varphi - \sigma_r) + \alpha\, T \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}\, (\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi)\,, \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}\, (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2\,.$$

Indem man u aus den beiden Gleichungen (9) eliminiert und (7) einführt, findet man für die radiale Spannung die Differentialgleichung

$$\frac{1}{9K}\,\frac{d}{dr}\,[k(s_0)\, (r\,\sigma_r' + 3\,\sigma_r)] + \frac{1}{12G}\,\frac{d}{dr}\,[g(t_0^2)\, r\,\sigma_r'] + \frac{1}{4G}\, g(t_0^2)\, \sigma_r' + \alpha\,\frac{dT}{dr} = 0 \tag{10}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}\, (r\,\sigma_r' + 3\,\sigma_r)\,, \qquad t_0^2 = \frac{1}{18G^2}\, r^2\, \sigma_r'^2\,.$$

Striche bedeuten Ableitungen nach r. Hierzu treten die Randbedingungen:

$$\sigma_r(r_0) = \sigma_r(r_a) = 0\,, \tag{11}$$

wenn r_0 den inneren und r_a den äußeren Halbmesser bezeichnet.

Für die Temperaturverteilung T in der Hohlkugel beim stationären Zustand gilt bekanntlich

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_a}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_a}}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \tag{12}$$

mit den Randwerten $T = T_0$ für $r = r_0$ und $T = T_a$ für $r = r_a$.[1]

Die Lösung des Problems hängt also von der Integration der Gleichung (10) mit den Randbedingungen (11) ab. Wegen der komplizierten Form dieser nichtlinearen Differentialgleichung soll weiter nur der praktisch häufige Sonderfall (6) betrachtet werden. Mit der Annahme (6) und wegen (12) vereinfacht sich die Differentialgleichung (10) für die Radialspannung zu

$$(\omega\, r^2\, \sigma_r'^2 + 1)\, r\, \sigma_r'' + 2\,(\omega\, r^2\, \sigma_r'^2 + 2)\, \sigma_r' - \vartheta\,(T_0 - T_a)\frac{r_a\, r_0}{r_a - r_0}\frac{1}{r^2} = 0\,, \tag{13}$$

wenn folgende Abkürzungen für die Stoffzahlen

$$\omega = \frac{g_2\, K}{2\, G^2\,(3\, K + 4\, G)}\,, \qquad \vartheta = \frac{36\, \alpha\, K\, G}{3\, K + 4\, G} \tag{14}$$

eingeführt werden.

Die nichtlineare Differentialgleichung (13) zweiter Ordnung läßt sich einmal integrieren. Man findet

$$\omega\, r^6\, \sigma_r'^3 + 3\, r^4\, \sigma_r' - \frac{3}{2}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\frac{r_a\, r_0}{r_a - r_0}\, r^2 + 9\, B = 0 \tag{15}$$

mit einer willkürlichen Integrationskonstanten $9\,B$, wie man leicht durch Einsetzen nachprüfen kann.

Da ω der einzige Parameter von (15) ist, der die Abweichung vom linearen Elastizitätsgesetz enthält, so wird man eine Lösung dieser Differentialgleichung in der Form einer Potenzreihenentwicklung nach positiven Potenzen von ω ansetzen. Wir machen also den Ansatz

$$\sigma_r = \sigma_r^{(0)} + \omega\, \sigma_r^{(1)} + \omega^2\, \sigma_r^{(2)} + \cdots \tag{16}$$

und entsprechend

$$B = B_0 + \omega\, B_1 + \omega^2\, B_2 + \cdots\,. \tag{16a}$$

Geht man mit diesen Ausdrücken in (15) ein und ordnet, so erhält man durch Nullsetzen der Koeffizienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von ω die folgenden Gleichungen:

$$r^4\, \sigma_r^{(0)\prime} - \frac{1}{2}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\frac{r_a\, r_0}{r_a - r_0}\, r^2 + 3\, B_0 = 0\,, \tag{17}$$

$$3\, r^4\, \sigma_r^{(1)\prime} + r^6\, \sigma_r^{(0)\prime 3} + 9\, B_1 = 0\,, \tag{18}$$

$$r^4\, \sigma_r^{(2)\prime} + r^6\, \sigma_r^{(0)\prime 2}\, \sigma_r^{(1)\prime} + 3\, B_2 = 0\,, \tag{19}$$

usw. Die Integration dieser linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ist mit elementaren Mitteln der Reihe nach ausführbar.

Die Funktion $\sigma_r^{(0)}$ genügt der Differentialgleichung (17), die sich für die lineare Theorie mit $\omega = 0$ ergibt. Die Lösung lautet

$$\sigma_r^{(0)} = A_0 + B_0\frac{1}{r^3} - \frac{C}{r} \tag{20}$$

mit der Abkürzung

$$C = \frac{1}{2}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\frac{r_a\, r_0}{r_a - r_0}\,. \tag{21}$$

Aus den Randbedingungen (11) bestimmen sich die Integrationskonstanten

$$A_0 = \frac{1}{2}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\frac{r_a\, r_0}{r_a^3 - r_0^3}(r_a + r_0)\,,$$

$$B_0 = \frac{1}{2}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\frac{r_a^3\, r_0^3}{r_a^3 - r_0^3}\,.$$

[1] Vgl. z. B. *H. Gröber, S. Erk, U. Grigull*, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Aufl., S. 106, Berlin 1955.

Die Tangentialspannung $\sigma_\varphi^{(0)}$ folgt gemäß (7)

$$\sigma_\varphi^{(0)} = A_0 - \frac{B_0}{2\,r^3} - \frac{C}{2\,r}\,. \tag{22}$$

Die Randwerte der Tangentialspannung $\sigma_\varphi^{(0)}$ an den Stellen $r = r_0$ und $r = r_a$ ergeben sich dann zu

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\varphi^{(0)}(r_0) &= -\frac{1}{4}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\,\frac{r_a\,(r_a - r_0)\,(2\,r_a + r_0)}{r_a^3 - r_0^3}\,,\\ \sigma_\varphi^{(0)}(r_a) &= \frac{1}{4}\,\vartheta\,(T_0 - T_a)\,\frac{r_0\,(r_a - r_0)\,(r_a + 2\,r_0)}{r_a^3 - r_0^3}\,.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Führt man (20) in (18) ein, so findet man für die Funktion $\sigma_r^{(1)}$ die Differentialgleichung

$$\sigma_r^{(1)\prime} = -3\left(B_1 + \frac{C^3}{9}\right)\frac{1}{r^4} + 3\,\frac{B_0\,C^2}{r^6} - 9\,\frac{B_0^2\,C}{r^8} + 9\,\frac{B_0^3}{r^{10}}\,.$$

Damit erhält man die Verbesserung erster Ordnung der Radialspannung in der Form

$$\sigma_r^{(1)} = A_1 + \frac{\bar{B}_1}{r^3} - \frac{3}{5}\,\frac{B_0\,C^2}{r^5} + \frac{9}{7}\,\frac{B_0^2\,C}{r^7} - \frac{B_0^3}{r^9}\,. \tag{24}$$

mit den Integrationskonstanten A_1 und $\bar{B}_1 = B_1 + \frac{1}{9}\,C^3$. Die Randbedingungen (11) liefern dann

$$A_1 = -\frac{1}{280}\,\vartheta^3\,(T_0 - T_a)^3\,\frac{r_a^3\,r_0^3}{(r_a^3 - r_0^3)^3}\,(r_a + r_0)\,(11\,r_a^2 - 14\,r_a\,r_0 + 11\,r_0^2)\,,$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{280}\,\vartheta^3\,(T_0 - T_a)^3\,\frac{r_a^3\,r_0^3}{(r_a^3 - r_0^3)^3}\,(11\,r_a^6 - 3\,r_a^5\,r_0 + 18\,r_a^4\,r_0^2 + 53\,r_a^3\,r_0^3 + 18\,r_a^2\,r_0^4 - 3\,r_a\,r_0^5 + 11\,r_0^6)\,.$$

Die Verbesserung $\sigma_\varphi^{(1)}$ erster Ordnung der Tangentialspannung errechnet sich nach (7)

$$\sigma_\varphi^{(1)} = A_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\bar{B}_1}{r^3} + \frac{9}{10}\,\frac{B_0\,C^2}{r^5} - \frac{45}{14}\,\frac{B_0^2\,C}{r^7} + \frac{7}{2}\,\frac{B_0^3}{r^9}\,. \tag{25}$$

Die zugehörigen Verbesserungen der Randwerte nehmen hiermit folgende Werte an:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\varphi^{(1)}(r_0) &= \frac{3}{560}\,\vartheta^3\,(T_0 - T_a)^3\,\frac{r_a^3\,(r_a - r_0)^3}{(r_a^3 - r_0^3)^3}\,(24\,r_a^3 + 40\,r_a^2\,r_0 + 30\,r_a\,r_0^2 + 11\,r_0^3)\,,\\ \sigma_\varphi^{(1)}(r_a) &= -\frac{3}{560}\,\vartheta^3\,(T_0 - T_a)^3\,\frac{r_0^3\,(r_a - r_0)^3}{(r_a^3 - r_0^3)^3}\,(11\,r_a^3 + 30\,r_a^2\,r_0 + 40\,r_a\,r_0^2 + 24\,r_0^3)\,.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Wir gehen nun zur Bestimmung der Funktion $\sigma_r^{(2)}$ zweiter Ordnung über. Mit (20) und (24) erhält man aus (19) die Differentialgleichung für $\sigma_r^{(2)}$. Man findet als allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(2)} = A_2 &+ \frac{B_2}{r^3} - \frac{3}{5}\,\frac{\bar{B}_1\,C^2}{r^5} + \frac{3}{7}\,\frac{B_0\,C}{r^7}\,(6\,\bar{B}_1 + C^3)\\ &- 3\,\frac{B_0^2}{r^9}\,(\bar{B}_1 + C^3) + \frac{90}{11}\,\frac{B_0^3\,C^2}{r^{11}} - \frac{135}{13}\,\frac{B_0^4\,C}{r^{13}} + \frac{27}{5}\,\frac{B_0^5}{r^{15}}\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Nach einiger Zwischenrechnung errechnet man unter Beachtung von (11) die Integrationskonstanten

$$\begin{aligned}A_2 = \frac{3}{5\,605\,600}\,\vartheta^5\,(T_0 - T_a)^5\,\frac{r_a^3\,r_0^3\,(r_a + r_0)}{(r_a^3 - r_0^3)^5}\,&(17\,664\,r_a^8 - 63\,648\,r_a^7\,r_0 + 77\,139\,r_a^6\,r_0^2 + 13\,572\,r_a^5\,r_0^3\\ &- 76\,014\,r_a^4\,r_0^4 + 13\,572\,r_a^3\,r_0^5 + 77\,139\,r_a^2\,r_0^6 - 63\,648\,r_a\,r_0^7 + 17\,664\,r_0^8)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2 = -\frac{3}{1\,401\,400}\,\vartheta^5\,(T_0 - T_a)^5\,\frac{r_a^3\,r_0^3}{(r_a^3 - r_0^3)^5}\,&(4\,416\,r_a^{12} - 11\,496\,r_a^{11}\,r_0 + 620\,r_a^{10}\,r_0^2 + 17\,923\,r_a^9\,r_0^3\\ &- 8\,818\,r_a^8\,r_0^4 - 7531\,r_a^7\,r_0^5 + 9\,772\,r_a^6\,r_0^6 - 7\,531\,r_a^5\,r_0^7 - 8\,818\,r_a^4\,r_0^8 + 17\,923\,r_a^3\,r_0^9\\ &+ 620\,r_a^2\,r_0^{10} - 11\,496\,r_a\,r_0^{11} + 4\,416\,r_0^{12})\,.\end{aligned}$$

Gemäß (7) ist die Verbesserung zweiter Ordnung der Tangentialspannung

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi^{(2)} = A_2 &- \frac{1}{2}\,\frac{B_2}{r^3} + \frac{9}{10}\,\frac{\bar{B}_1\,C^2}{r^5} - \frac{15}{14}\,\frac{B_0\,C}{r^7}\,(6\,\bar{B}_1 + C^3)\\ &+ \frac{21}{2}\,\frac{B_0^2}{r^9}\,(\bar{B}_1 + C^3) - \frac{405}{11}\,\frac{B_0^3\,C^2}{r^{11}} + \frac{1485}{26}\,\frac{B_0^4\,C}{r^{13}} - \frac{351}{10}\,\frac{B_0^5}{r^{15}}\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Mit den gefundenen Werten der Konstanten bestimmen sich die Verbesserungsglieder zweiter Ordnung der Randwerte

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\varphi^{(2)}(r_0) &= -\frac{3}{11\,211\,200}\,\vartheta^5\,(T_0-T_a)^5\,\frac{r_a^3\,(r_a-r_0)^5}{(r_a^3-r_0^3)^5}\,(427\,488\,r_a^7+1\,154\,272\,r_a^6\,r_0+1\,408\,960\,r_a^5\,r_0^2\\
&\quad+983\,304\,r_a^4\,r_0^3+408\,086\,r_a^3\,r_0^4+167\,615\,r_a^2\,r_0^5+127\,008\,r_a\,r_0^6+52\,992\,r_0^7)\,,\\
\sigma_\varphi^{(2)}(r_a) &= \frac{3}{11\,211\,200}\,\vartheta^5\,(T_0-T_a)^5\,\frac{r_0^3\,(r_a-r_0)^5}{(r_a^3-r_0^3)^5}\,(52\,992\,r_a^7+127\,008\,r_a^6\,r_0+167\,615\,r_a^5\,r_0^2\\
&\quad+408\,086\,r_a^4\,r_0^3+983\,304\,r_a^3\,r_0^4+1\,408\,960\,r_a^2\,r_0^5+1\,154\,272\,r_a\,r_0^6+427\,488\,r_0^7)\,.
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

Als Beispiel eines Werkstoffes, das ein nichtlineares Verhalten zeigt, betrachten wir hier Kupfer, für welches

$$K = 1{,}37\cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}, \qquad G = 0{,}46\cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}, \qquad g_2 = 0{,}18\cdot 10^6$$

errechnet wurde.[1] Es handelt sich also um kleine Abweichungen vom *Hooke*schen Gesetz. Abb. 1 zeigt den mit Hilfe der Näherungslösung berechneten Verlauf der Radialspannung σ_r und der

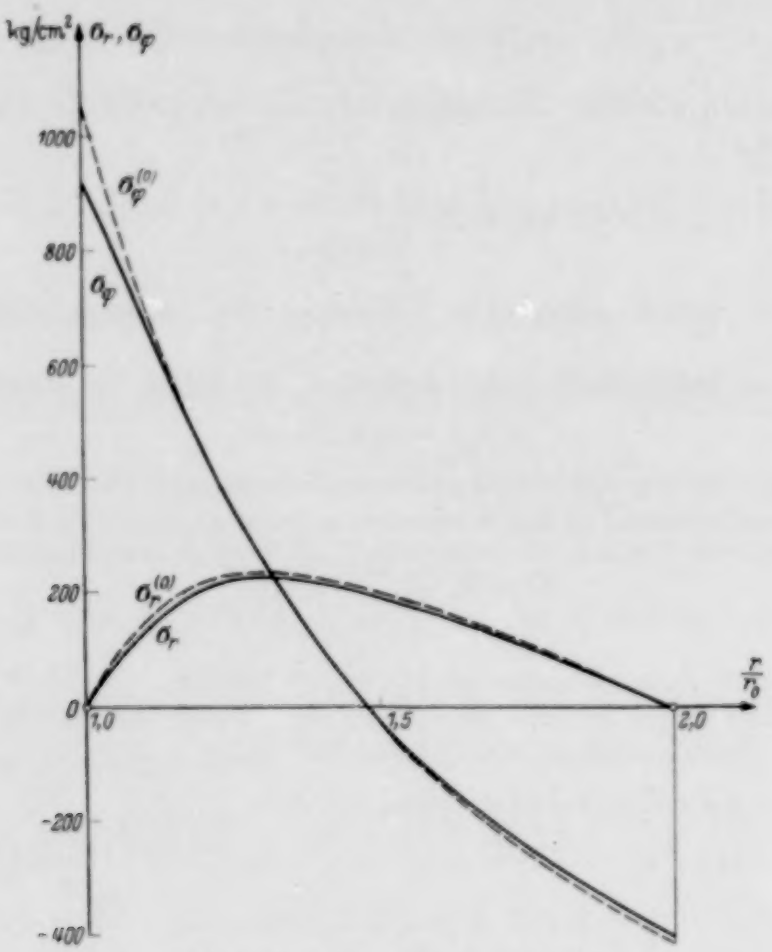


Abb. 1. Spannungen bei der Hohlkugel.

Tangentialspannung σ_φ längs eines Halbmessers (und zwar für $r_a/r_0 = 2$, $T_a - T_0 = 45°$ C und $\alpha = 17\cdot 10^{-6}/°$ C). Zum Vergleich ist der Verlauf der Spannungen $\sigma_r^{(0)}$ und $\sigma_\varphi^{(0)}$ beim *Hooke*schen Gesetz gestrichelt eingetragen. Bemerkenswert ist die Abnahme von σ_φ am Innenrand infolge der Nichtlinearität.

4. Die Kreisringscheibe. Als zweites Beispiel behandeln wir den ebenen Spannungszustand, der in einer dünnen Kreisringscheibe infolge eines ebenen, stationären Temperaturfeldes entsteht. Die z-Achse falle in die Richtung der Scheibendicke, die Spannung σ_z in dieser Richtung setzen wir somit gleich Null. Da die Temperaturverteilung symmetrisch um den Mittelpunkt der Kreisscheibe ist, also nur vom Radius r abhängt, so gilt das gleiche auch vom zugehörigen Spannungs- und Formänderungszustand.

[1] Nach Versuchsergebnissen von *K. Claus*, Bestimmung der Poissonschen Zahl reiner Metalle und ihr Gang im Periodischen System, S. 39, Diss. Stuttgart 1953.

Das Kräftegleichgewicht am Scheibenelement liefert die Beziehung zwischen Radialspannung σ_r und Tangentialspannung σ_φ

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr}. \tag{30}$$

Mittels der radialen Verschiebung u lassen sich die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung durch

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \tag{31}$$

darstellen. Mit Hilfe der Grundgleichung (5) kann man die Dehnungen durch die Spannungen und den Temperaturverlauf $T(r)$ ausdrücken. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} &= \frac{1}{9K}k(s_0)\,(\sigma_r+\sigma_\varphi) + \frac{1}{6G}g(t_0^2)\,(2\sigma_r-\sigma_\varphi) + \alpha T, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} &= \frac{1}{9K}k(s_0)\,(\sigma_r+\sigma_\varphi) + \frac{1}{6G}g(t_0^2)\,(2\sigma_\varphi-\sigma_r) + \alpha T \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}(\sigma_r+\sigma_\varphi), \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}(\sigma_r^2+\sigma_\varphi^2-\sigma_r\sigma_\varphi).$$

Durch Entfernen von u aus den Gleichungen (32) und mit (30) folgt die Differentialgleichung für die radiale Spannung

$$\frac{1}{9K}\frac{d}{dr}[k(s_0)\,(r\sigma_r'+2\sigma_r)] + \frac{1}{6G}\frac{d}{dr}[g(t_0^2)\,(2r\sigma_r'+\sigma_r)] + \frac{1}{2G}g(t_0^2)\,\sigma_r' + \alpha\frac{dT}{dr} = 0 \tag{33}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}(r\sigma_r'+2\sigma_r), \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}(r^2\sigma_r'^2 + r\sigma_r'\sigma_r + \sigma_r^2),$$

wobei Striche wiederum Ableitungen nach r bedeuten. Es gelten die Randbedingungen:

$$\sigma_r(r_0) = \sigma_r(r_a) = 0, \tag{34}$$

wenn r_0 den inneren und r_a den äußeren Halbmesser bezeichnet. Die Theorie der Wärmeleitung[1] liefert für den Temperaturverlauf in der Kreisscheibe beim stationären Zustand die Beziehung

$$T = T_0 - \frac{T_0 - T_a}{\ln\frac{r_a}{r_0}}\ln\frac{r}{r_0} \tag{35}$$

mit den Randwerten $T = T_0$ für $r = r_0$ und $T = T_a$ für $r = r_a$.

Wir beschränken uns weiter auf den Sonderfall (6). Dann vereinfacht sich die Differentialgleichung (33) für die Radialspannung mit (6) und (35) zu

$$\begin{aligned} &(2\lambda r^2\sigma_r'^2 + 2\lambda r\sigma_r'\sigma_r + \lambda\sigma_r^2 + 1)\,r\sigma_r'' \\ &\quad + (4\lambda r^2\sigma_r'^2 + 5\lambda r\sigma_r'\sigma_r + 3\lambda\sigma_r^2 + 3)\,\sigma_r' - \delta\frac{T_0-T_a}{\ln\frac{r_a}{r_0}}\frac{1}{r} = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

mit den Stoffzahlen

$$\lambda = \frac{g_2 K}{(3K+G)G^2}, \qquad \delta = \frac{9\alpha KG}{3K+G}. \tag{37}$$

Diese Gleichung wird nach demselben Näherungsverfahren wie die Gleichung (15) integriert. Wir setzen die Lösung von (36) als Potenzreihe in λ an

$$\sigma_r = \sigma_r^{(0)} + \lambda\sigma_r^{(1)} + \lambda^2\sigma_r^{(2)} + \cdots \tag{38}$$

und berechnen rekursiv die Koeffizientenfunktionen dieser Potenzreihe. Wegen der Kleinheit des Parameters λ genügen bereits zwei Funktionen $\sigma_r^{(0)}$ und $\sigma_r^{(1)}$, um die gesuchte angenäherte Lösung zu erhalten. Zu ihrer Bestimmung ergeben sich mit (38) aus (36) die Gleichungen:

$$r\sigma_r^{(0)\prime\prime} + 3\sigma_r^{(0)\prime} - \delta\frac{T_0-T_a}{\ln\frac{r_a}{r_0}}\frac{1}{r} = 0, \tag{39}$$

$$r\sigma_r^{(1)\prime\prime} + 3\sigma_r^{(1)\prime} + (2r^2\sigma_r^{(0)\prime 2} + 2r\sigma_r^{(0)\prime}\sigma_r^{(0)} + \sigma_r^{(0)2})\,r\sigma_r^{(0)\prime\prime} + (4r^2\sigma_r^{(0)\prime 2} + 5r\sigma_r^{(0)\prime}\sigma_r^{(0)} + 3\sigma_r^{(0)2})\,\sigma_r^{(0)\prime} = 0. \tag{40}$$

[1] Vgl. z. B. *H. Gröber, S. Erk, U. Grigull*, a. a. O., S. 106.

Die Lösung $\sigma_r^{(0)}$ der Differentialgleichung (39) für die lineare Theorie ($\lambda = 0$) kann ohne weiteres in der Form

$$\sigma_r^{(0)} = A_0 + \frac{B_0}{r^2} + C \ln r \tag{41}$$

mit der Abkürzung

$$C = \frac{\delta}{2} \frac{T_0 - T_a}{\ln \frac{r_a}{r_0}} \tag{42}$$

angegeben werden. Die in (41) auftretenden Integrationskonstanten berechnet man aus den vorgegebenen Randbedingungen (34)

$$A_0 = -\frac{\delta}{2}(T_0 - T_a) \frac{r_a^2 \ln r_a - r_0^2 \ln r_0}{(r_a^2 - r_0^2) \ln \frac{r_a}{r_0}}, \qquad B_0 = \frac{\delta}{2}(T_0 - T_a) \frac{r_a^2 r_0^2}{r_a^2 - r_0^2}.$$

Die Tangentialspannung $\sigma_\varphi^{(0)}$ berechnet sich gemäß (30)

$$\sigma_\varphi^{(0)} = A_0 - \frac{B_0}{r^2} + C(1 + \ln r) \tag{43}$$

und hat insbesondere am Innen- und Außenrand die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi^{(0)}(r_0) &= \frac{\delta}{2} \frac{T_0 - T_a}{(r_a^2 - r_0^2) \ln \frac{r_a}{r_0}} \left(r_a^2 - r_0^2 - 2 r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_0}\right), \\ \sigma_\varphi^{(0)}(r_a) &= \frac{\delta}{2} \frac{T_0 - T_a}{(r_a^2 - r_0^2) \ln \frac{r_a}{r_0}} \left(r_a^2 - r_0^2 - 2 r_0^2 \ln \frac{r_a}{r_0}\right). \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Setzt man den Ausdruck (41) für $\sigma_r^{(0)}$ in (40) ein, so folgt nach kurzer Umformung die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} r\,\sigma_r^{(1)\prime\prime} + 3\,\sigma_r^{(1)\prime} = &-(2A_0^2 + 3A_0 C + 2C^2)\frac{C}{r} + \frac{B_0 C^2}{r^3} + 2(2A_0 + 5C)\frac{B_0^2}{r^5} \\ &- 12\frac{B_0^3}{r^7} - (4A_0 + 3C)\frac{C^2}{r}\ln r + 4\frac{B_0^2 C}{r^5}\ln r - 2\frac{C^3}{r}(\ln r)^2. \end{aligned} \tag{45}$$

Mit den Integrationskonstanten A_1 und B_1 findet man die Lösung von (45) in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} = A_1 + \frac{B_1}{r^2} + (4A_0 + 13C)\frac{B_0^2}{8r^4} - \frac{B_0^3}{2r^6} - \frac{1}{4}(4A_0^2 + 2A_0 C + 3C^2) C \ln r \\ - \frac{B_0 C^2}{2r^2}\ln r + \frac{B_0^2 C}{2r^4}\ln r - \frac{1}{4}(4A_0 + C) C^2 (\ln r)^2 - \frac{1}{3} C^3 (\ln r)^3. \end{aligned} \tag{46}$$

Die Randbedingungen (34) liefern dann

$$\begin{aligned} A_1 = &\frac{\delta^3}{192} \frac{(T_0 - T_a)^3}{(r_a^2 - r_0^2)^3 \left(\ln \frac{r_a}{r_0}\right)^3} [8 r_a^2 (r_a^4 - 2 r_a^2 r_0^2 - 2 r_0^4)(\ln r_a)^3 + 24 r_a^2 r_0^2 (r_a^2 + 2 r_0^2)(\ln r_a)^2 \ln r_0 \\ &- 24 r_a^2 r_0^2 (2 r_a^2 + r_0^2) \ln r_a (\ln r_0)^2 + 8 r_0^2 (2 r_a^4 + 2 r_a^2 r_0^2 - r_0^4)(\ln r_0)^3 \\ &- 3 r_a^2 (2 r_a^4 - 17 r_a^2 r_0^2 + 15 r_0^4)(\ln r_a)^2 - 78 r_a^2 r_0^2 (r_a^2 - r_0^2) \ln r_a \ln r_0 \\ &+ 3 r_0^2 (15 r_a^4 - 17 r_a^2 r_0^2 + 2 r_0^4)(\ln r_0)^2 + 18 r_a^2 (r_a^2 - r_0^2)^2 \ln r_a - 18 r_0^2 (r_a^2 - r_0^2)^2 \ln r_0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 = &\frac{\delta^3}{192} \frac{(T_0 - T_a)^3}{(r_a^2 - r_0^2)^3 \left(\ln \frac{r_a}{r_0}\right)^2} r_a^2 r_0^2 \Big[16 (r_a^4 + r_a^2 r_0^2 + r_0^4) \left(\ln \frac{r_a}{r_0}\right)^2 - 3 (11 r_a^4 + 4 r_a^2 r_0^2 - 15 r_0^4) \ln r_a \\ &+ 3 (15 r_a^4 - 4 r_a^2 r_0^2 - 11 r_0^4) \ln r_0 - 18 (r_a^2 - r_0^2)^2\Big]. \end{aligned}$$

Die Verbesserung der Tangentialspannung wird nach (30)

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^{(1)} = A_1 - \frac{1}{4}(4A_0^2 + 2A_0 C + 3C^2) C - \frac{1}{2}(2B_1 + B_0 C^2)\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8}(12A_0 + 35C)\frac{B_0^2}{r^4} \\ + \frac{5}{2}\frac{B_0^3}{r^6} - \frac{1}{4}(4A_0^2 + 10A_0 C + 5C^2) C \ln r + \frac{B_0 C^2}{2r^2}\ln r - \frac{3}{2}\frac{B_0^2 C}{r^4}\ln r \\ - \frac{1}{4}(4A_0 + 5C) C^2 (\ln r)^2 - \frac{1}{3} C^3 (\ln r)^3. \end{aligned} \tag{47}$$

Die Verbesserungen der Randwerte nehmen hiermit folgende Werte an:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\varphi^{(1)}(r_0) &= -\frac{\delta^3}{96}\frac{(T_0-T_a)^3}{(r_a^2-r_0^2)^3\left(\ln\frac{r_a}{r_0}\right)^3}\left[9\,(r_a^2-r_0^2)^3-18\,(r_a^2-r_0^2)^2\,r_a^2\ln\frac{r_a}{r_0}\right.\\
&\quad\left.+3\,(17\,r_a^4-32\,r_a^2\,r_0^2+15\,r_0^4)\,r_a^2\left(\ln\frac{r_a}{r_0}\right)^2-4\,(11\,r_a^4-4\,r_a^2\,r_0^2-4\,r_0^4)\,r_a^2\left(\ln\frac{r_a}{r_0}\right)^3\right],\\
\sigma_\varphi^{(1)}(r_a) &= -\frac{\delta^3}{96}\frac{(T_0-T_a)^3}{(r_a^2-r_0^2)^3\left(\ln\frac{r_a}{r_0}\right)^3}\left[9\,(r_a^2-r_0^2)^3-18\,(r_a^2-r_0^2)^2\,r_0^2\ln\frac{r_a}{r_0}\right.\\
&\quad\left.-3\,(15\,r_a^4-32\,r_a^2\,r_0^2+17\,r_0^4)\,r_0^2\left(\ln\frac{r_a}{r_0}\right)^2+4\,(4\,r_a^4+4\,r_a^2\,r_0^2-11\,r_0^4)\,r_0^2\left(\ln\frac{r_a}{r_0}\right)^3\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(48)$$

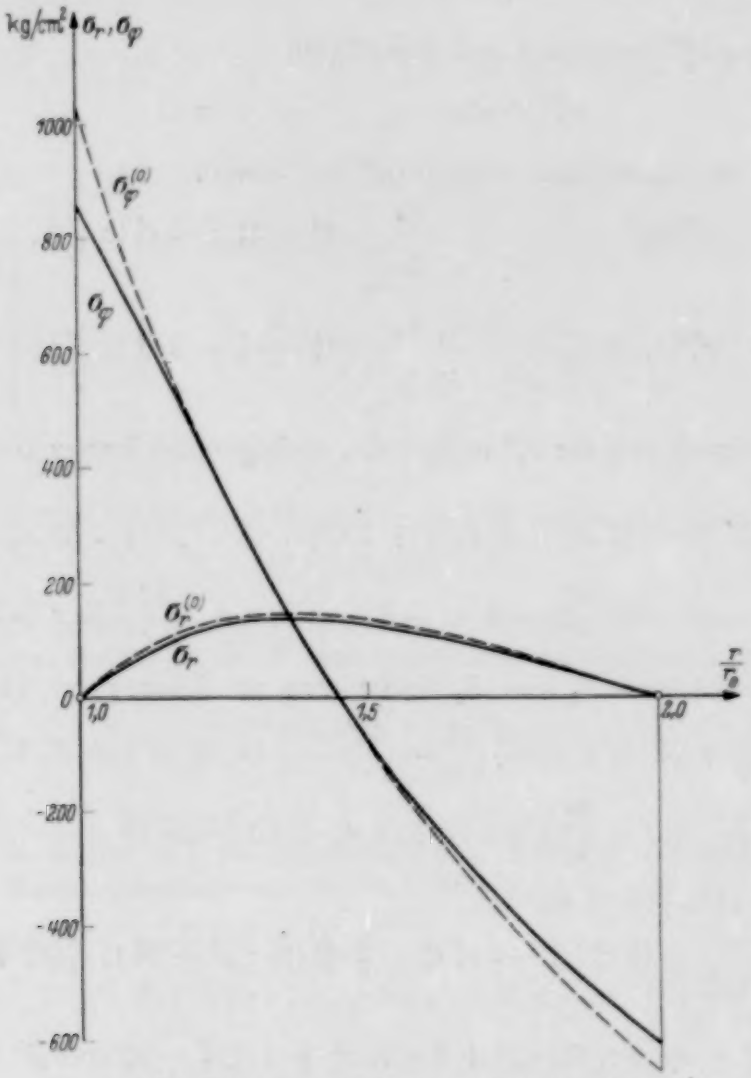


Abb. 2. Spannungen bei der dünnen Kreisringscheibe.

Als Zahlenbeispiel wählen wir wieder reines Kupfer. Abb. 2 zeigt den Verlauf der Radialspannungen σ_r und $\sigma_r^{(0)}$ sowie der Tangentialspannungen σ_φ und $\sigma_\varphi^{(0)}$ längs eines Halbmessers (und zwar für $r_a/r_0 = 2$, $T_a - T_0 = 80°$ C und $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}/°$ C). Die Nichtlinearität bewirkt hier, daß das Gefälle der Tangentialspannung σ_φ vom Innenrand zum Außenrand wesentlich verringert wird.

(Eingegangen am 3. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *F. Jindra*, 3, Elmcrest Ter., Norwalk, Conn., USA.

Stationäre Laminarströmungen durch Kanäle von elliptischem Querschnitt bei konstantem Druck oder statischer Druckverteilung

Von **Karl Karas**

1. Einleitung. Alle für die genannten Strömungen kennzeichnenden Eigenschaften kann man sehr anschaulich aus dem Wölbhügel einer gleichmäßig über den elliptischen Querschnitt gespannten Membran ableiten, die denselben Überdrucken wie die strömende Flüssigkeit ausgesetzt ist und von denen hier die statischen Druckverteilungen behandelt werden sollen. Das Geschwindigkeitsrelief der stationären Laminarströmung wird dann durch die Gestalt des Wölbhügels und die sekundliche Flüssigkeitsmenge, die durch den elliptischen Querschnitt strömt, durch dessen Volumen dargestellt. Außerdem kann man die Schubspannungen innerhalb der Strömung in allen geschwindigkeitsparallelen Ebenen aus den ihnen proportionalen Neigungen jener Schnittlinien erkennen, die die zu diesen Ebenen senkrechten geschwindigkeitsparallelen Ebenen aus dem Wölbhügel der Membran ausschneiden. Wegen dieses Sachverhaltes wird eine Lösung, die sich in analoger Weise auch für andere Querschnittsformen angeben läßt, stets zwei gänzlich voneinander verschiedene physikalische Probleme durch denselben Formalismus zur Darstellung bringen. Im vorliegenden Falle eines elliptischen Querschnittes bietet sich dieselbe in geschlossener Form dar, so daß auch allgemeinere Fragestellungen wie die nach den Linien gleicher Schubspannungen im Strömungsgebiete allgemein beantwortet werden können. Im folgenden sind die Höhenlinien der Wölbhügel außer für eine Kreismembran auch für eine elliptische Membran mit horizontaler großer Achse und einer solchen, deren große Achse unter dem Winkel α gegen den Spiegel geneigt ist (allgemeinster Fall) berechnet und konstruiert worden, so daß die Gestalt des Wölbhügels und damit die des Geschwindigkeitsreliefs der zugeordneten Laminarströmung plastisch in Erscheinung tritt.

Für die Kreismembran und die elliptische Membran mit horizontaler Achse ist auch das Schubspannungsrelief nach demselben analytisch-graphischen Verfahren gezeichnet worden, während für die Ellipse mit schiefer großer Halbachse nur der Verlauf der Wandschubspannung angegeben worden ist.

Außerdem wurde sowohl bei der Kreismembran als auch bei der elliptischen Membran noch der einfache Unterfall konstanten Druckes mit seinen sehr einfachen Wölb- und Schubspannungshügeln untersucht und gezeigt, wie man die bezüglichen Gleichungen durch Spezialisierung aus den allgemeinen Fällen gewinnen kann. Während im Falle konstanten Druckes Geschwindigkeits- und Schubspannungsrelief für ein kartesisches achsenparalleles Achsenkreuz durch den Membranmittelpunkt 0 noch doppelte Symmetrie aufweisen, ergibt sich bei statischer Druckverteilung für den Kreisquerschnitt und elliptischen Querschnitt mit horizontaler Achse nur mehr eine einfache Symmetrie, während für die Ellipse mit geneigten Achsen, also den allgemeinsten Fall, jede Symmetrie in Fortfall kommt.

Da neben der Lage des Scheitels bzw. der Senke m dieser Hügel noch die Lage des Druckmittelpunktes M der Querschnitts- bzw Membranfläche von Interesse sein kann, wurde auch die bzgl. einfache Berechnung beigefügt und M neben m in den Abbildungen angegeben.

Die Anwendbarkeit der mitgeteilten Lösungen setzt natürlich voraus, daß die Membran einseitig ganz von Flüssigkeit benetzt bzw. der laminar durchströmte Kanal ganz von Flüssigkeit erfüllt ist, wozu ein Kriterium angegeben wird.

2. Laminarströmung und Membrangleichnis. Wirken auf ein Flächenelement der linken Stirnfläche des in Abb. 1 dargestellten Flüssigkeitsprismas der Länge l die Druckkraft $p(x, y)\, dx\, dy$ und auf die vier Mantelflächen bzgl. die Schubspannungen τ, so erfordert bei horizontaler Strömung das Gleichgewicht des Prismas in Richtung der Geschwindigkeit v:

$$p\, dx\, dy + \frac{\partial \tau_x}{\partial x}\, dx \cdot l \cdot dy + \frac{\partial \tau_y}{\partial y}\, dy \cdot l \cdot dx = 0\,,$$

oder

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{p}{l} = 0\,. \tag{1}$$

Dabei sind die Schubspannungen jener Flächen, die durch den Punkt $P(x, y)$ (Abb. 1) hindurchgehen, wie üblich der Strömungsrichtung v entgegengesetzt, ihre Richtungen und Zuwüchse auf den um dx bzw. dy entfernten Gegenflächen im Sinne von v eingezeichnet worden. Die Zeiger x bzw. y bei den angegebenen Schubspannungen τ geben zugleich jene Achsen an, zu denen die Normalen der bzgln. Flächen, in denen τ wirkt, parallel sind.

In Abb. 1 ist rechts oben der Rohrquerschnitt bzw. die Membranfläche in der Bildebene gezeichnet, so daß das Flächenelement $dx\,dy$ und die Koordinaten x, y des einen Eckpunkts P desselben ebenso wie der Rohrquerschnitt und seine Lage gegen die Oberflächenverschneidungs-

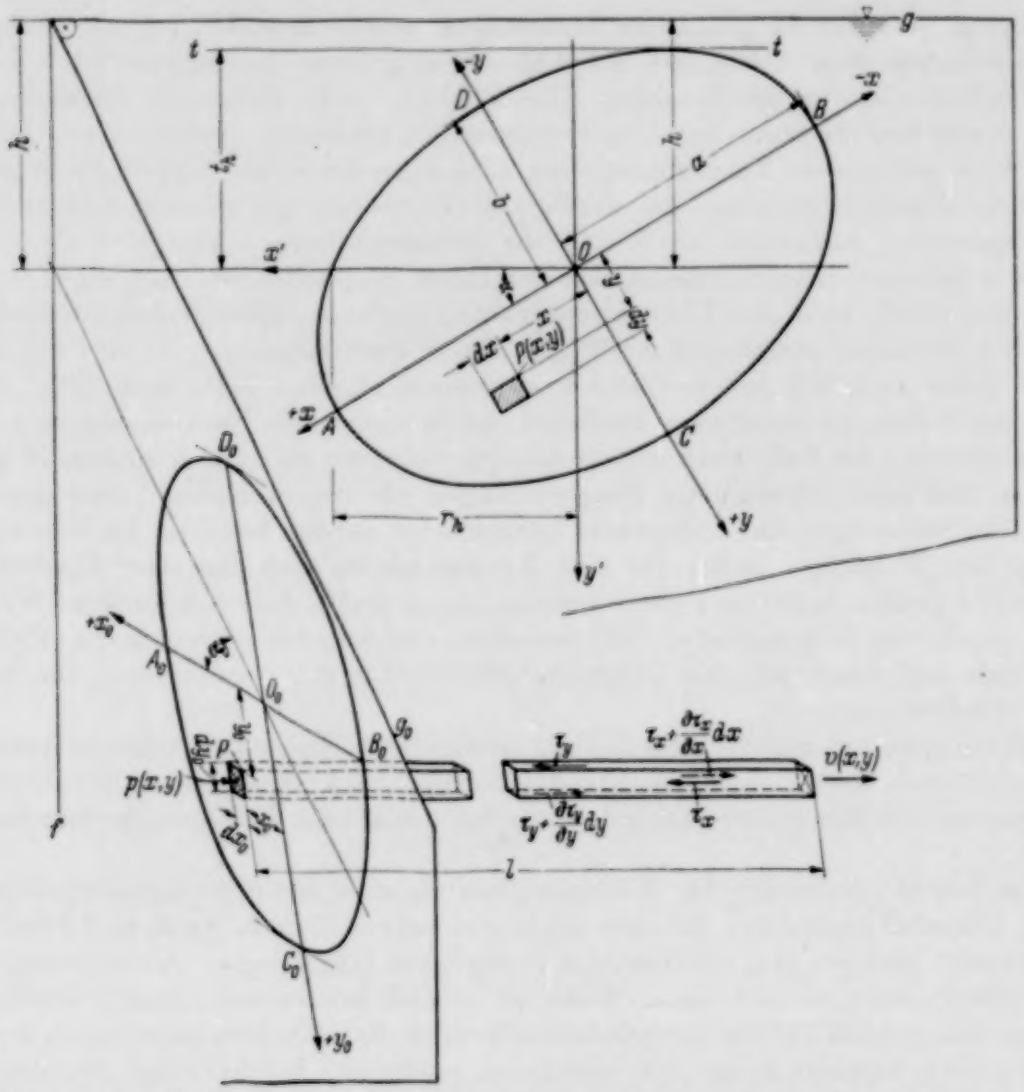


Abb. 1. Der elliptische Rohrquerschnitt mit einem Flüssigkeitsprisma der Länge l parallel zur Strömung v, das auf seiner linken Stirnfläche $dx\,dy$ den Einheitsdruck $p(x, y)$ empfängt und an dessen vier Mantelflächen die eingezeichneten Schubspannungen τ wirksam sind. (Im Aufriß und in schiefer Parallelperspektive.)

gerade g in wahrer Größe in Erscheinung tritt, während die Rohrlänge l senkrecht zur Zeichenebene zu denken ist. Um sie sichtbar zu machen, ist die Ellipsenebene um 90° um die vertikale Gerade f herausgeschwenkt und dann nach Wahl des Membran-Mittelpunktes O_0 in schiefer Axonometrie dargestellt worden, wobei nunmehr die Rohrlänge l in wahrer Größe abgebildet, die Ausgangsellipse $OABCD$ aber in ihr affines Bild $O_0A_0B_0C_0D_0$ übergeführt wird. f ist Affinitätsachse, OO_0 die Richtung der Affinitätsstrahlen.

Mit $\varkappa$ als dynamischer Zähigkeit sind ferner die Schubspannungen τ mit dem zugeordneten Geschwindigkeitsgefälle nach *Newton* folgendermaßen verbunden:

$$\tau_x = \varkappa \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\,; \qquad \tau_y = \varkappa \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{2a, b}$$

Die Einführung von (2a, b) in (1) ergibt für die Geschwindigkeitsverteilung die *Poisson*sche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{p}{\varkappa \cdot l} = 0\,. \tag{3}$$

Demgegenüber gilt für die kleine Auslenkung w einer homogen mit S kp/cm gespannten und dem gleichen Druck p einseitig ausgesetzten Membran die zu (3) völlig analoge *Poisson*sche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{p}{S} = 0 . \tag{4}$$

Den Gleichungen (3) bzw. (4) stehen auch die völlig analogen Randbedingungen $v = 0$ (Haftbedingung) bzw. $w = 0$ (Randbedingung) längs der Kontur des Kanalprofils bzw. des Randes der Membran gegenüber. Seien a, b die Halbachsen der Ellipse und wird durch den Mittelpunkt O derselben ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit $x \| a, y \| b$ gelegt, so kann man die Randbedingungen so formulieren:

$$\text{Für:} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ist} \quad v = 0 , \quad \text{bzw.} \quad w = 0 . \tag{5a, b}$$

Der Vergleich von (3) mit (4), bzw. (5a) mit (5b) erweist die Gültigkeit des folgenden Gleichnisses:

Membran-Gleichnis. Das Geschwindigkeitsrelief $v(x, y)$ bzw. die sekundliche Flüssigkeitsmenge Q einer Laminarströmung werden anschaulich durch die Auswölbung $w(x, y)$ bzw. das Volumen V des Wölbhügels einer über die Kontur des Kanalquerschnittes homogen mittels der Spannung S kp/cm gespannten Membran dargestellt, die der gleichen Druckverteilung $p(x, y)$ unterliegt wie die zugehörige Laminarströmung. Man erhält $v(x, y)$ aus $w(x, y)$ bzw. Q aus V durch Multiplikation mit dem Faktor $S/\varkappa \cdot l$, die Schubspannungen τ hingegen aus den zugeordneten Membranneigungen durch Multiplikation mit dem Faktor S/l:

$$v(x, y) = w(x, y) \frac{S}{\varkappa l} ; \qquad Q = V \cdot \frac{S}{\varkappa \cdot l} ; \tag{6a, b}$$

$$\tau_x = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{S}{l} ; \qquad \tau_y = \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{S}{l} . \tag{7a, b}$$

Da der Faktor $S/\varkappa \cdot l$ in (6a, b) die Dimension einer Winkelgeschwindigkeit ($\sec^{-1}$), hingegen der Faktor S/l in (7a, b) jene einer bezogenen Spannung (kpcm^{-2}) besitzt, so erkennt man sofort die dimensionelle Richtigkeit dieser Gleichungen. (Man vgl. hierzu die in Fußnote 3 Seite 121 angegebene Arbeit des Verf.)

Da das anschauliche Bild der ausgelenkten Membran die vorgegebene Laminarströmung somit in allen Einzelheiten richtig wiedergibt, so soll es zunächst den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt werden.[1]

3. Das Geschwindigkeitsrelief (der Wölbhügel) bei statischer Druckverteilung. Sei diese etwa durch eine Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewichte γ kp/cm³ bewirkt, so ist der Einheitsdruck $p(x, y)$ in einem Punkte $P(x, y)$ durch

$$p = \gamma \cdot (h + y \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha) = p' + p'' + p''' \tag{8}$$

gegeben, wenn der Membranmittelpunkt O sich um h cm unter der Spiegelverschneidungsgeraden g (Abb. 1) befindet und die x-Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes um den $\sphericalangle \alpha$ gegen die Oberflächenverschneidungsgerade g geneigt ist. Nach (8) kann man diesen Druck p sofort in drei Summanden p', p'', p''' zerlegen, denen jeweils die durch die folgenden *Poisson*-Gleichungen mit der Randbedingung (5b) bestimmten Membran-Auslenkungen w', w'', w''' entsprechen werden (die Striche bedeuten also hier keine Ableitungen):

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = - \frac{\gamma \cdot h}{S} ; \tag{9a}$$

$$\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} = - \frac{\gamma \cdot \cos \alpha}{S} \cdot y ; \tag{9b}$$

$$\frac{\partial^2 w'''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'''}{\partial y^2} = - \frac{\gamma \cdot \sin \alpha}{S} \cdot x . \tag{9c}$$

[1] Das hier ausgesprochene und im weiteren benutzte Membrangleichnis, das in sehr anschaulicher Weise die Strömungsgeschwindigkeiten v direkt den Verschiebungen w der Membran zuordnet, ist verwandt mit der Tatsache, daß man das *Stokes*sche Reibungsgesetz aus dem *Hooke*schen Elastizitätsgesetz durch Ersatz der Formänderungen durch die Formänderungsgeschwindigkeiten erhält. Man vgl. hierzu: *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, S. 44, 1951. Auch beim Seifenhautgleichnis von *L. Prandtl* werden die Schubspannungen im Querschnitt eines tordierten Stabes durch Gleichungen ähnlich (7a, b), wobei jedoch an die Stelle von $w(x, y)$ eine Spannungsfunktion $U(x, y)$ tritt, dargestellt. Man vgl. hierzu besonders auch die wertvolle Darstellung des — sofern hier der Unterfall konstanten Druckes vorliegt — ähnlichen Problems der Torsion von Stäben mit elliptischem Querschnitt in *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 1939, Kapitel II, 18, S. 112—117. Aus Gleichung (24), S. 115 ersieht man, daß das Torsionsmoment und aus Gleichung (26), S. 116, daß die Torsionssteifigkeit dem Volumen des Wölbhügels in Gleichung (14) dieser Arbeit proportional sind. Ferner ebendort Kapitel III, § 6, S. 192—203: Die Seifenhautmethode.

Wegen der Linearität dieser Gleichungen erhält man die Gesamtauslenkung w der Membran dann durch Summierung der Einzelauslenkungen

$$w = w' + w'' + w'''. \tag{10}$$

Durch die Gleichungen (9a, b, c) ist zugleich die allgemeinste Lage des Achsenkreuzes (x, y) und damit der Ellipse (a, b) berücksichtigt. Die Annahme, daß die letztere sich in einer Vertikalebene befindet, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit dieser Untersuchung.
Man erkennt nun, daß die Gleichungen (9a, b, c) durch die folgenden Ansätze:

$$w' = c'\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right); \quad w'' = c''\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\cdot y; \quad w''' = c'''\cdot\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\cdot x \tag{11a, b, c}$$

befriedigt werden, die wegen des in allen drei Ansätzen vorkommenden Klammerausdruckes zugleich die Randbedingung (5b) erfüllen. Die Konstanten c bestimmt man durch Einsetzen von (11) in (9) und erhält für w', w'', w''' die Lösungen:

$$w' = -\frac{\gamma\cdot h}{2\,S}\,\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right); \tag{12a}$$

$$w'' = -\frac{\gamma\cdot y\cdot\cos\alpha}{2\,S}\cdot\frac{a^2 b^2}{3\,a^2 + b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right); \tag{12b}$$

$$w''' = -\frac{\gamma\cdot x\cdot\sin\alpha}{2\,S}\cdot\frac{a^2 b^2}{a^2 + 3\,b^2}\cdot\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{12c}$$

Führt man schließlich (12a, b, c) in (10) ein, so erhält man für die Membranauslenkung w:

$$w(x, y) = -\frac{\gamma\cdot a^2\cdot b^2}{2\,S}\cdot\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y\cdot\cos\alpha}{3\,a^2 + b^2} + \frac{x\cdot\sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\right). \tag{13}$$

Für eine Vollkreismembran mit dem Radius r_a des Begrenzungskreises erhält man aus (13) zunächst mit $a = b = r_a$

$$w = -\frac{\gamma\cdot r_a^4}{2\,S}\left(\frac{x^2 + y^2}{r_a^2} - 1\right)\left(\frac{h}{2\,r_a^2} + \frac{y\cdot\cos\alpha + x\cdot\sin\alpha}{4\,r_a^2}\right).$$

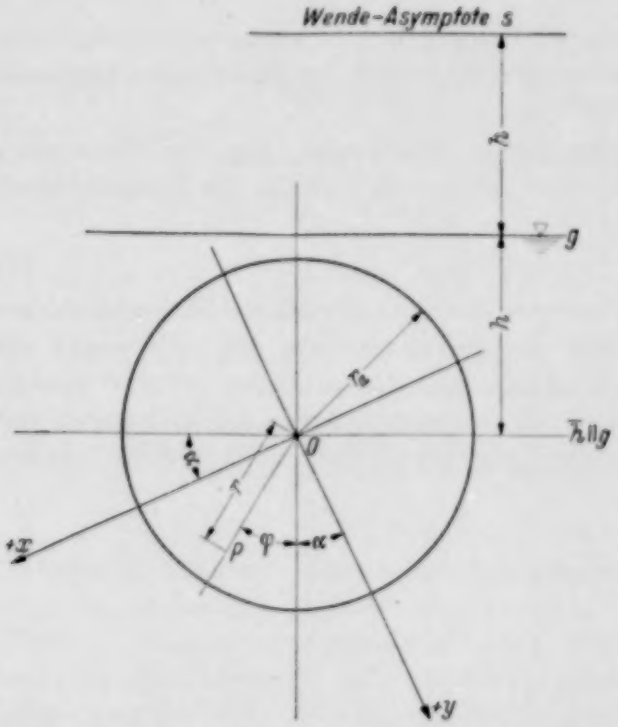


Abb. 2. Der kreisförmige Rohrquerschnitt als Sonderfall. (Im Aufriß.)

Da nun aber für irgend einen Punkt P der Vollkreismembran mit dem Abstand r vom Membranmittelpunkt O und dem Winkel φ von r gegen die nach unten hin positiv gerechnete Vertikale, wobei φ in jenem Sinne positiv gezählt werden soll, der die $+y$-Achse in die $+x$-Achse überführt, gemäß Abb. 2 die Gleichungen

$$x = r\cdot\sin(\varphi + \alpha); \quad y = r\cdot\cos(\varphi + \alpha);$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

gelten, so erhält man mit $y\cdot\cos\alpha + x\cdot\sin\alpha = r\cdot\cos\varphi$:

$$w = -\frac{\gamma}{8\,S}\cdot(r^2 - r_a^2)\cdot(2\,h + r\cdot\cos\varphi)$$

$$= \frac{\gamma}{8\,S}(r_a^2 - r^2)\,(2\,h + r\cdot\cos\varphi).^1$$

Zur Bestimmung des Volumens des Wölbhügels benötigt man nur w' in (12a), da die antimetrischen

[1] Dieses Ergebnis wurde bereits als Gleichung (14) S. 361 gewonnen in der Arbeit des Verf.: „Die Auswölbungen der Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck, Erste Mitteilung: Homogener Spannungszustand". Ing.-Arch. 25 (1957) S. 359—380. Diese Arbeit soll im folgenden kurz als I zitiert werden. Eine Weiterführung dieser Arbeit: „Die Auswölbungen der Kreisringmembran unter hydrostatischem Druck, Zweite Mitteilung: Inhomogener Spannungszustand", Ing.-Arch. 26 (1958) S. 157—180 läßt allerdings eine hydromechanische Deutung schwer zu. Die Lösung (12 a) ist bereits angegeben in dem Werke von Josef Kozeny, Hydraulik, Wien, 1953, S. 463. Man vgl. auch die dort zitierte Literatur: G. di Ricco, L'Ingegnere (1949) und A. Ghetti, L'Energia Elettrica (1950). Bei Kozeny ist auch die Gesamtschubkraft T ermittelt, die auch bei statischer Druckverteilung gültig bleibt. Man vgl. ferner die Fußnote [2] S. 129. dieser Arbeit.

Funktionen w'' und w''' in (12b, c) hierzu keinen Beitrag liefern. Wegen der doppelten Symmetrie erhält man:

$$V = 4 \int_0^a \int_0^y w' \, dx \, dy = -4 \frac{\gamma \cdot h}{2 S} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \int_0^a dx \cdot \left[\frac{x^2 y}{a^2} + \frac{y^3}{3 b^2} - y \right]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Hieraus findet man[1] leicht:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\gamma \cdot h}{S} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} . \tag{14}$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung $v(x, y)$ und die sekundliche, den Querschnitt durchströmende Flüssigkeitsmenge findet man gemäß (6a, b) aus (13) bzw. (14):[2]

$$v(x, y) = -\frac{\gamma \cdot a^2 b^2}{2 \varkappa \cdot l} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y \cdot \cos \alpha}{3 a^2 + b^2} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{a^2 + 3 b^2} \right); \tag{13a}$$

$$Q = \frac{\pi}{4} \frac{\gamma \cdot h}{\varkappa l} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} . \tag{14a}$$

Für kreisförmigen Querschnitt erhält man aus (14) mit $a = b = r_a$:

$$V = \frac{\pi}{8} \frac{\gamma \cdot h \, r_a^4}{S} ,$$

somit wieder das Ergebnis I (22a), S. 364.[3]
Erteilt man w bzw. v in (13) bzw. (13a) einen konstanten Wert w_c bzw. v_c, so werden durch diese Gleichungen die Höhenlinien des Membranwölbhügels bzw. Geschwindigkeitsreliefs dargestellt, die den Entwurf eines Schichtenplanes auf mehrfache Art gestatten.[3] Im Abschnitt 7 werden hierzu mehrere Beispiele berechnet.[4]

[1] Für das bestimmte hierbei auftretende Integral erhält man:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} \cdot dx = \frac{3 \pi}{16} a^4 .$$

[2] Es ist bemerkenswert, daß durch (13) bzw. (13a) mit w bzw. v = konst. ein Unterfall jener Grundform der Kurven 3. Ordnung dargestellt wird, die *Isaak Newton* dazu diente, eine Klassifikation der ebenen Kurven 3. Ordnung zu begründen und die er Parabola divergens benannt hat. (Man vgl. seine Arbeit: Enumeratio linearum tertii ordinis, Londoni 1706 und W. W. Rousi Ball: On Newton classification of cubic curves, Proc. London. Math. Soc. XXII [1891].) Die hier auftretende Unterform, die aus einem unbegrenzten Zweig, dem hier keinerlei physikalische Bedeutung zukommt, und aus einem Oval besteht, das ganz innerhalb der Ellipsenfläche verläuft und hier allein physikalische Bedeutung besitzt, nennt Newton Parabola campaniformis cum ovali. Cayley nennt sie Complex. Die Parabola divergens scheint historisch trotz der ihr von Newton zugewiesenen zentralen Stellung kaum beachtet worden zu sein; wenigstens wird sie von G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Erster Bd., zweite Aufl., 1910, in seinem sehr ausführlichen II. Abschnitt, S. 14—107, der über Theorie und Geschichte der Kurven 3. Ordnung handelt, nicht mehr eigens erwähnt. Nur der in I(14) erwähnte Spezialfall bei Kreismembranen gehört der viel weitergehend durchforschten Gruppe der zirkularen Kurven 3. Ordnung an. Man vgl. die Folgerungen in I, S. 363.

[3] Man vgl. hierzu auch die Arbeit des Verf.: „Stationäre Laminarströmung durch Kreis- und Kreisringrohre mit fester bzw. beweglicher Innenwandung und bei statischer Druckverteilung." Österr. Ing.-Arch. 11 (1957) S. 306—318, insbes. Gleichung (16b) ebendort. Dort ist im Anschluß an die techn. Literatur auch das (geodätische) Gefälle $J = h/l = p/\gamma \, l$ in den Ergebnissen benutzt worden. Man vgl. ebendort Gleichung (3), S. 308.

[4] Es möge bemerkt werden, daß die erwähnten Höhenlinien die Gerade s:

$$\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y \cdot \cos \alpha}{3 a^2 + b^2} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{a^2 + 3 b^2} = 0$$

als Wende-Asymtote ihres unbegrenzten Zweiges besitzen, die den unendlich fernen Punkt zum Wendepunkt hat. Im 0-x-y-System (Abb. 11) erzeugt sie die Achsenabschnitte:

$$x_1 = -\frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{a^2 + 3 b^2}{a^2 + b^2} ; \qquad y_1 = -\frac{h}{\cos \alpha} \cdot \frac{3 a^2 + b^2}{a^2 + b^2} .$$

Da die Brüche zwischen 1 und 3 schwanken, so schneidet die Asymtote s die negativen Halbstrahlen der Koordinatenachsen über der Spiegelverschneidungsgeraden g. Liegt statt der elliptischen eine Kreismembran vor, so erhält man mit $a = b = r_a$:

$$x_1 = -\frac{2 h}{\sin \alpha} ; \qquad y_1 = -\frac{2 h}{\cos \alpha} ;$$

und bestätigt damit, daß die Wendeasymtote der hier gültigen zirkularen Kurve 3. Ordnung parallel zu g und um h über derselben verläuft. (Man vgl. Abb. 2.) Die Asymtote s trifft die Gerade g mit der Gleichung

$$x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + h = 0$$

in einem Punkte G mit den Koordinaten:

$$x_G = -\frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{a^2 (a^2 + 3 b^2)}{a^4 - b^4} ; \qquad y_G = +\frac{h}{\cos \alpha} \cdot \frac{b^2 (3 a^2 + b^2)}{a^4 - b^4} .$$

Dieser Schnittpunkt G liegt somit rechts vom Schnittpunkte X_1 von s mit der x-Achse, da mit $a > b$ $y_G > 0$; $|x_G| > |x_1|$ ist, wie man leicht erweist. (Man vgl. Abb. 11.)

Die Gleichung (14) läßt eine willkommene Kontrolle zu: (12a) stellt die Gleichung für die Oberfläche eines elliptischen Paraboloides dar, die auf das in Abb. 1 angegebene Koordinatensystem bezogen ist. Seine Grundfläche ist die Querschnittsellipse, während seine Höhe w'_{max} sich aus (12a) mit $x = y = 0$ zu:

$$w'_{max} = \frac{\gamma \cdot h}{2\,S} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \tag{15}$$

ergibt. Mit dem Flächeninhalt $F = a\,b\,\pi$ der Querschnittsellipse und der bekannten Volumsformel für das elliptische Paraboloid: $V = 1/2\,F\,w'_{max}$[1] erhält man sofort wieder Gleichung (14) bzw. nach Multiplikation derselben mit $S/\varkappa \cdot l$ wieder das Ergebnis (14a).

Das Kriterium für volle einseitige Benetzung. Ist $t \| g$ die obere zur Flüssigkeitsverschneidungsgeraden g parallele Ellipsentangente und t_h ihre vertikale Höhenlage über dem Membranmittelpunkt O, so liegt volle Benetzung der Ellipsenfläche offenbar dann vor, wenn

$$h \geq t_h \tag{a}$$

ist. (Man vgl. Abb. 1.) Bedeutet ferner $r_h \| t$ die Länge des Fahrstrahles, den eine horizontale Gerade durch O aus der Ellipse ausschneidet, so gilt die bekannte appollonische Beziehung:

$$r_h \cdot t_h = a \cdot b\,. \tag{b}$$

Man findet aus der Gleichung $y = -x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ dieses Fahrstrahles und der Ellipsengleichung (5a) leicht

$$r_h = a \cdot b \sqrt{\frac{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}}\,,$$

und damit folgt aus (b)

$$t_h = \sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}\,. \tag{c}$$

Aus (a) und (c) ergibt sich somit als Kriterium für volle Benetzung:

$$h \geq \sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2 a}\,. \tag{16}$$

Für $\alpha = 0^0$ ist $t_h = b$ und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ folgt $t_h = a$.

Bestimmung der Koordinaten x_m, y_m des Wölbscheitels m. x_m und y_m befriedigen die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0\,; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,. \tag{17a, b}$$

Wendet man (17a, b) auf (13) an, so erhält man:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\gamma \cdot a^2 b^2}{2\,S}\left[\frac{2\,x}{a^2}\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{3\,a^2 + b^2} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \frac{\sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\right] = 0\,, \tag{18a}$$

woraus man nach einer kleinen Umformung auch die Darstellung gewinnt:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\gamma \cdot a^2 b^2}{2\,S} \cdot \left[\frac{2\,x}{a^2}\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{3\,a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{3\,x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \frac{\sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\right] = 0\,. \tag{18b}$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\gamma \cdot a^2 b^2}{2\,S}\left[\frac{2\,y}{b^2}\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{3\,a^2 + b^2} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \frac{\cos\alpha}{3\,a^2 + b^2}\right] = 0\,, \tag{19a}$$

oder analog (18b):

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\gamma \cdot a^2 b^2}{2\,S} \cdot \left[\frac{2\,y}{b^2}\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3\,y^2}{b^2} - 1\right)\frac{\cos\alpha}{3\,a^2 + b^2}\right] = 0\,. \tag{19b}$$

Man erkennt aus (18) und (19), daß man es mit Kegelschnitten der allgemeinen Gleichung

$$A\,x^2 + 2\,B\,x \cdot y + C\,y^2 + 2\,Dx + 2\,E\,y + F = 0 \tag{20}$$

zu tun hat.

[1] Man vgl. etwa *R. Rothe*, Höhere Mathematik, Teil IV, Heft 5/6, 3. Aufl. 1949, S. 38, Aufg. 11. Störend wirkt dort allerdings, daß z in $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\,z$ offenbar dimensionslos ist, während ihm später die Höhe h als Einzelwert zukommt, weshalb das Ergebnis $V = \pi\,a\,b\,h^2$ dimensionell nicht befriedigt. Mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2\,z}{z_0}$ erhält man das korrekte Ergebnis $V = \pi\,a\,b\,\frac{h^2}{z_0}$. Hierbei bedeutet also $z_0/2$ die Höhe jener Querschnittsellipse, die die Halbachsen a und b besitzt. Der Basisquerschnitt des Paraboloids in der Höhe $z = h$ ist offenbar $F_h = a\,b\,\pi\,\frac{2\,h}{z_0}$, somit ist $V = \frac{1}{2}\,F_h \cdot h$.

Es liegt bekanntlich eine nicht zerfallende

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ellipse}\\ \text{Parabel}\\ \text{Hyperbel}\end{array}\right\} \quad \text{vor, je nachdem} \quad \Delta = AC - B^2 \gtrless 0 \quad \text{und zugleich} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$
$$\Gamma = ACF - B^2 F + 2\,BDE - AE^2 - CD^2 \neq 0 \quad \text{ist.} \qquad (21)$$

Besonders einfache Verhältnisse liegen dann vor, wenn entweder die große oder die kleine Halbachse parallel zur Spiegelverschneidungsgeraden g sind, wobei dann entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi/2$ ist. Ist z. B. $\alpha = 0$, also $a \| g$, so folgt aus (18b) sofort $x = 0$, während dann (19) für y eine quadratische Gleichung liefert, deren eine Wurzel in das Innere der Membranfläche fällt. Analog erhält man für $\alpha = \pi/2$, also $b \| g$ aus (19b) sofort $y = 0$, während (18) für x eine quadratische Gleichung mit einer Wurzel im Innern der Ellipse ergibt. Man erhält also:

$$\alpha = 0; \quad a \| g; \quad x_m = 0; \quad y_m = -\frac{h}{3} \cdot \frac{3\,a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{h^2}{9} \cdot \left(\frac{3\,a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \frac{b^2}{3}}\,; \qquad (22a)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\,; \quad b \| g; \quad x_m = -\frac{h}{3} \cdot \frac{a^2 + 3\,b^2}{a^2 + b^2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{h^2}{9} \cdot \left(\frac{a^2 + 3\,b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 + \frac{a^2}{3}}\,; \quad y_m = 0\,. \qquad (22b)$$

In (22a, b) ist jeweils das untere Wurzelvorzeichen, das Werte außerhalb der Ellipsenfläche liefert, eingeklammert worden. Im Falle der Kreismembran $a = b = r_a$ ergeben die Gleichungen (22a, b) bei Beibehaltung nur des oberen Vorzeichens

$$y_m = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{4\,h^2 + 3\,r_a^2} - 2\,h\right), \qquad (23)$$

somit wieder die Gleichung I (15), in der y_m (bzw. x_m) mit r_1 bezeichnet worden ist.

1. der Kegelschnitt $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$.

Der Vergleich von (18a) oder (18b) mit (20) ergibt:

$$A = \frac{3 \sin\alpha}{a^2\,(a^2 + 3\,b^2)}\,; \quad B = \frac{\cos\alpha}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)}\,; \quad C = \frac{\sin\alpha}{b^2\,(a^2 + 3\,b^2)}\,; \quad D = \frac{h}{a^2\,(a^2 + b^2)}\,; \quad E = 0\,;$$
$$F = -\frac{\sin\alpha}{a^2 + 3\,b^2}\,. \qquad (24)$$

Man erhält mit (24) aus (21):

$$\Delta = \frac{3 \sin^2\alpha}{a^2\,b^2\,(a^2 + 3\,b^2)^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^4\,(3\,a^2 + b^2)^2}\,; \qquad (25\,a)$$

$$\Gamma = -\frac{\sin\alpha}{a^2\,(a^2 + 3\,b^2)} \left[\frac{3 \cdot \sin^2\alpha}{b^2\,(a^2 + 3\,b^2)^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)^2} + \frac{h^2}{a^2\,b^2\,(a^2 + b^2)^2}\right]. \qquad (25\,b)$$

Der Kegelschnitt ist eine Parabel für $\Delta = 0$, woraus bei gegebenen Halbachsen der Ellipse sich für α der spezielle Winkel α_1 gemäß der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{b}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2 + 3\,b^2}{3\,a^2 + b^2} \qquad (26)$$

ergibt. Aus (25a) erkennt man ferner, daß der Minuend ab- und der Subtrahend zunimmt, wenn $\alpha < \alpha_1$ ist und somit $\Delta < 0$ ist und umgekehrt. Dann also ist (18a) oder (18b) eine Hyperbel, für $\alpha > \alpha_1$ eine Ellipse. Aus (25b) ersieht man ferner, daß zunächst $\Gamma = 0$ ist für $\alpha = 0$. Dann zerfällt also die Hyperbel gemäß (21) in zwei Gerade, für die man aus (18a) oder (18b) leicht:

$$x = 0; \quad y = -h\,\frac{3\,a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \qquad (27)$$

als Gleichungen feststellt. Diese beiden Geraden stehen somit aufeinander senkrecht. Andererseits könnte nach (25b) Γ auch dann verschwinden, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet. Damit findet man aber für α die Gleichung:

$$\sin^2\alpha \left[\frac{3}{b^2\,(a^2 + 3\,b^2)^2} + \frac{1}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)^2}\right] = \frac{1}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)^2} - \frac{h^2}{a^2\,b^2\,(a^2 + b^2)^2}\,.$$

Da links nur positive Glieder stehen, muß auch die rechte Gleichungsseite positiv sein, welche Forderung bei gegebenen Halbachsen der Ellipse der Membran für h den Größtwert

$$h_{max} = b\,\frac{a^2 + b^2}{3\,a^2 + b^2}$$

bedingt, somit wegen der Echtheit des Bruches einen Wert $h_{max} < b$. Dies aber widerspricht bereits der Vollbenetzungsbedingung (16) und erst recht trifft dies für jeden Wert $h < h_{max}$ zu, für den obige Gleichung reelle $\sphericalangle\,\alpha$ ergeben könnte.

Der Zerfall des Kegelschnittes $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ ist somit nur für $\alpha = 0$ möglich.

2. Der Kegelschnitt $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Der Vergleich von (19a) oder (19b) mit (20) ergibt hier:

$$A = \frac{\cos\alpha}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)}\,; \qquad B = \frac{\sin\alpha}{b^2\,(a^2 + 3\,b^2)}\,; \qquad C = \frac{3\cos\alpha}{b^2\,(3\,a^2 + b^2)}\,; \qquad D = 0\,.$$

$$E = \frac{h}{b^2\,(a^2 + b^2)}\,; \qquad F = -\,\frac{\cos\alpha}{3\,a^2 + b^2}\,. \tag{28}$$

Man erhält mit (28) aus (21):

$$\Delta = \frac{3\cos^2\alpha}{a^2\,b^2\,(3\,a^2 + b^2)^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^4\,(a^2 + 3\,b^2)^2}\,; \tag{29 a}$$

$$\Gamma = -\,\frac{\cos\alpha}{b^2\,(3\,a^2 + b^2)} \cdot \left[\frac{3\cos^2\alpha}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2\,(a^2 + 3\,b^2)^2} + \frac{h^2}{a^2\,b^2\,(a^2 + b^2)^2}\right]. \tag{29 b}$$

Der Kegelschnitt ist eine Parabel für $\Delta = 0$, womit (29a) für α den speziellen Wert α_2 gemäß der Gleichung ergibt:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{b\sqrt{3}}{a} \cdot \frac{a^2 + 3\,b^2}{3\,a^2 + b^2} = 3\operatorname{tg}\alpha_1\,. \tag{30}$$

Aus (29a) erkennt man ferner, daß der Minuend ab-, der Subtrahend aber zunimmt, wenn $\alpha > \alpha_2$ und somit $\Delta < 0$ ist und umgekehrt. Dann also ist (19a) oder (19b) eine Hyperbel, für $\alpha < \alpha_2$ aber eine Ellipse. Aus (29b) ersieht man ferner, daß $\Gamma = 0$ ist für $\alpha = \pi/2$. Dann zerfällt die Hyperbel gemäß (21) in zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade mit den aus (19a) oder (19b) sich ergebenden Gleichungen:

$$x = -\,h\,\frac{a^2 + 3\,b^2}{a^2 + b^2}\,; \qquad y = 0\,. \tag{31}$$

Der mit $\Gamma = 0$ etwa verschwindende Klammerausdruck ergibt wie unter 1):

$$\sin^2\alpha\left[\frac{3}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{b^2\,(a^2 + 3\,b^2)^2}\right] = \frac{3}{a^2\,(3\,a^2 + b^2)^2} + \frac{h^2}{a^2\,b^2\,(a^2 + b^2)^2}\,; \quad \text{oder} \quad \sin^2\alpha \cdot N = Z\,.$$

Hierin ist zwar jetzt für jeden Wert von h das Vorzeichen beiderseits des Gleichheitszeichen positiv. Es muß aber für reelle $\sphericalangle\,\alpha$ stets $Z \leq N$ sein, was für h den Größtwert:

$$h_{max} = a\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 + 3\,b^2}$$

ergibt. Da hierin aber der Bruch ein echter ist, so widerspricht bereits auch dieses Ergebnis und um so mehr jeder Wert $h < h_{max}$ der Vollbenetzungsbedingung (16).

Man kann somit die erhaltenen Ergebnisse übersichtlich in dem folgenden Schema darstellen, in welchem auch die Gleichungen des betreffenden Kegelschnittes angegeben sind:

Kegelschnitt	$\alpha = 0$	$0 < \alpha < \alpha_1$	$\alpha = \alpha_1$	$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$	$\alpha = \alpha_2$	$\alpha_2 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
(18a), (18b):	zerfallende	nicht zerfallende					
$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	Hyperbel		Parabel	Ellipse			
(19a), (19b):	nicht zerfallende						zerfallende
$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	Ellipse				Parabel	Hyperbel	

(32)

Will man schließlich auch die Richtungen und Größen der Halbachsen dieser Kegelschnitte berechnen, so macht man am besten von der Eigenschaft der Kegelschnitte Gebrauch, daß die Abstände ihrer Punkte von der Leitlinie zu denen vom zugehörigen Brennpunkt mit den Koordinaten q, r das konstante Verhältnis $1:\varepsilon$ mit ε als numerischer Exzentrizität besitzen. Bedeutet ferner p das Lot vom Ursprung auf die Leitlinie und ν den Winkel desselben mit der positiven x-Achse und damit auch zugleich den der großen Halbachse des Kegelschnittes mit der x-Achse, so wird diese zu benutzende Kegelschnittseigenschaft durch die Gleichung zum Ausdruck gebracht:[1]

$$\pm\varepsilon\,(x\cdot\cos\nu + y\cdot\sin\nu - p) = \sqrt{(x-q)^2 + (y-r)^2}\,.$$

Quadriert man diese Gleichung und vergleicht ihre Koeffizienten mit den entsprechenden von (20), so erhält man mit einem Proportionalitätsfaktor λ zur Bestimmung der 6 Unbekannten ν, $p, q, r, \varepsilon, \lambda$ die folgenden 6 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -1 + \varepsilon^2\cos^2\nu &= \lambda A \quad \text{(I)}\\ \varepsilon^2\cdot\cos\nu\cdot\sin\nu &= \lambda B \quad \text{(II)}\\ -1 + \varepsilon^2\sin^2\nu &= \lambda C \quad \text{(III)}\\ q - \varepsilon^2\cdot p\cdot\cos\nu &= \lambda D \quad \text{(IV)}\\ r - \varepsilon^2\cdot p\cdot\sin\nu &= \lambda E \quad \text{(V)}\\ -q^2 - r^2 + \varepsilon^2 p^2 &= \lambda F \quad \text{(VI)} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Hierin ergeben (I) bis (III) verhältnismäßig leicht die Unbekannten ν, ε und λ, während dann die Gleichungen (IV) bis (VI) die restlichen Unbekannten p, q, r liefern, wobei sich die Koordinaten eines etwaigen Mittelpunktes des Kegelschnittes dann leicht aus je zwei zusammengehörigen Werten q, r bestimmen lassen. Die Gleichung (VI) für p ist nämlich quadratisch und ihren beiden Wurzeln entsprechen nach (IV) und (V) je zwei Wertepaare q, r. Da sich somit die Gestalt der beiden Kegelschnitte (17a, b) mit allen ihren Bestimmungsstücken leicht ermitteln läßt, so kann in ihrem innerhalb der Membran enthaltenen Schnittpunkte der Ort des Wölbscheitels m sehr genau ermittelt werden. Hierzu wird in Abschnitt 7 ein Beispiel berechnet.

Bestimmung der Koordinaten x_M, y_M des Druckmittelpunktes M. Es ist oftmals von Interesse, die Lage des Wölbscheitels m mit der des Druckmittelpunktes M zu vergleichen. Zur Bestimmung dieser Koordinaten, die sich (man vgl. Abb. 1) zunächst nicht auf das O-x-y-System parallel zu den Ellipsenachsen, sondern auf das O-x'-y'-System mit horizontaler x'- und vertikaler y'-Achse beziehen sollen, stehen die bekannten Formeln zur Verfügung:

$$x'_M = \frac{J_{x'y'}}{F\cdot h}\,; \quad y'_M = \frac{J_{x'}}{F\cdot h}\,; \quad \text{worin} \quad F = a\,b\,\pi\,. \tag{34a, b}$$

Hierin bedeuten $J_{x'}$ das Flächenträgheitsmoment der Ellipse bzgl. der x'-Achse und $J_{x'y'}$ ihr Zentrifugalmoment bzgl. der beiden Achsen x' und y'. Mit den Trägheitsmomenten der Ellipse bzgl. des Achsensystems O-x-y, nämlich mit:

$$J_x = \frac{\pi}{4}\,a\,b^3\,; \qquad J_y = \frac{\pi}{4}\,a^3\cdot b\,; \qquad J_{xy} = 0 \tag{35}$$

besteht der bekannte Zusammenhang:[2]

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cdot\cos(-2\alpha) - J_{xy}\cdot\sin(-2\alpha)\,; \tag{36a}$$

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2}\cdot\sin(-2\alpha) + J_{xy}\cdot\cos(-2\alpha)\,. \tag{36b}$$

Führt man (35) in (36a, b) und das Ergebnis in (34a, b) ein, so erhält man:

$$x'_M = \frac{a^2 - b^2}{8\,h}\sin 2\alpha\,; \quad y'_M = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\cdot\cos 2\alpha}{8\,h}\,. \tag{37a, b}$$

[1] Man vgl. hierzu etwa *L. Schrutka*, Elemente der höheren Mathematik, 7. Aufl. 1948, § 36, Nr. 413, S. 397 bis 404.

[2] Man vgl. etwa *J. Szabó*, Einführung in die Technische Mechanik, 1954, § 13: Flächenmomente zweiten Grades, S. 101, Gleichungen (13,12) und (13,13). In obigen Gleichungen (36a, b) mußte der Winkel mit -2α bezeichnet werden, da die x'-Achse gemäß Abb. 1 in den Winkelraum $(+x, -y)$ fällt.

Aus (37a, b) erhält man schließlich die Koordinaten x_M, y_M des Druckmittelpunktes M im O-x-y-System, mittels der Transformationsformeln:

$$x_M = x'_M \cdot \cos 2\alpha + y'_M \cdot \sin \alpha; \quad y_M = -x'_M \sin \alpha + y'_M \cos \alpha .$$

Es folgt das einfache Ergebnis[1]

$$x_M = \frac{a^2}{4h} \sin \alpha; \quad y_M = \frac{b^2}{4h} \cos \alpha . \tag{38a, b}$$

4. Das Schubspannungsrelief (die Böschungsfläche des Wölbhügels) bei statischer Druckverteilung. Man gewinnt einen vertieften Einblick in den Strömungsvorgang durch Bestimmung der in der strömenden Flüssigkeit vorhandenen Schubspannungen und Ermittlung jener Ebenen, in denen sie wirksam sind. Ein besonderes Interesse kann wegen der Haftbedingung an den Wandungen des elliptischen Rohres der Verlauf der Wandschubspannung längs der elliptischen Kontur beanspruchen, zumal sich dort auch die absolut größten Schubspannungsbeträge vorfinden werden.

Grundsätzlich kann diese Fragen auch das Geschwindigkeitsrelief (der Wölbhügel) beantworten, zumal ja die Gleichungen (7a, b) oder (2a, b) unter Benutzung der Lösungen (13) oder (13a) die Schubspannungen τ_x bzw. τ_y in v-parallelen Ebenen durch y- bzw. x-Parallele unmittelbar liefern.[2] Man erfährt aber auf diesem Wege nichts über die einem Punkte $P(x, y)$ zugeordnete maximale Schubspannung und über die Orientierung der zugeordneten Wirkungsebene. Will man sich aber einen raschen Überblick über diese Verhältnisse verschaffen, wie sie das Geschwindigkeitsrelief über die Verteilung der Geschwindigkeiten geboten hat, so muß man denselben Weg der Herleitung und Darstellung beschreiten und befindet sich im vorliegenden Falle elliptischen Querschnittes in der günstigen Lage, sich auch in diesem komplizierteren Falle geschlossener Ausdrücke bedienen zu können.[2]

Die maximale Schubspannung τ in einem Punkte $P(x, y)$ des flüssigkeitsdurchströmten Gebietes wird — wenn man wieder das anschauliche Bild des Wölbhügels benutzt — offenbar in jener w-parallelen Ebene auftreten, deren senkrechte w-parallele Ebene aus dem Wölbhügel die Schnittlinie größter Neigung ausschneidet, also die Fall-Linie der Berührungsebene im Punkte $P(x, y)$ des Wölbhügels (Geschwindigkeitsreliefs) enthält.

Sei ψ der Winkel, den jene Fallinie und damit die Berührungsebene in P an den Wölbhügel gegen die x-y-Ebene einschließt, so kann ψ auch durch den Winkel der Flächennormale in P gegen die w-Achse angegeben werden. In der erwähnten Wirkungsebene wird sich dann die maximale Schubspannung τ in naheliegender Verallgemeinerung von (7a, b) durch die Gleichung

$$\tau = \operatorname{tg} \psi \cdot \frac{S}{l} \quad \text{oder} \quad S \operatorname{tg} \psi = l \cdot \tau \tag{39}$$

bestimmen lassen. Legt man ein Dreibein mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in die Richtung der x-, y-, w-Achsen, so ergibt sich für den Ortsvektor $r = \vec{OP}$ des Wölbhügels

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + w\,\mathfrak{k}. \tag{40}$$

Ist nun $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen, so steht derselbe senkrecht auf den beiden, die Berührungsebene enthaltenden Vektoren[3]

$$\mathfrak{r}_x = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} = \mathfrak{i} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{r}_y = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y} = \mathfrak{j} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathfrak{k} . \tag{41a, b}$$

---

[1] Eine schöne Deutung des Druckmittelpunktes M als Antipol der Spiegelverschneidungsgeraden g bzgl. der Zentralellipse des elliptischen Querschnittes, die durch die Gleichungen (38a, b) bestätigt wird, gibt K. Federhofer in seiner Arbeit: „Zur Ermittlung des Druckmittelpunktes in der Hydrostatik". Ing. Arch. 8 (1937) S. 172/173. Die dort angegebene einfache Konstruktion von M kann also zur Kontrolle ausgenutzt werden.

[2] Die Berechnung des Geschwindigkeitsreliefs (des Wölbhügels) im Falle statischer Druckverteilung und für rechteckige Rohrquerschnitte — auch bei allgemeiner Lage gegen den Flüssigkeitsspiegel — findet man in einer demnächst in der ZAMM erscheinenden Arbeit des Verf. Hierbei aber bot sich die Lösung in Form unendlicher konvergenter Reihen dar, so daß die Ermittlung des Schubspannungsreliefs in diesem Falle wesentlich mehr Rechenarbeit erfordern dürfte.

[3] Man vgl. hierzu etwa: *R. Rothe*, Höhere Mathematik, Teil III, Vierte Auflage, 1949, I: Krumme Flächen und krummlinige Koordinaten des Raumes, S. 9—32, insbes. Gleichung (9), S. 18 und Punkt 9: die beliebige Fläche, S. 22—23.

Sind nun

$$E = 1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad F = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}; \quad G = 1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \tag{42}$$

die *Gauß*schen Fundamentalgrößen I. Ordnung, so ist bekanntlich[1]:

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{r}_x \times \mathfrak{r}_y}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{43}$$

Führt man (41a, b) in (43) ein, so erhält man:

$$\mathfrak{n} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{i} - \frac{\partial w}{\partial y}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}}{\sqrt{EG - F^2}}; \tag{44}$$

und aus (44) und (42)

$$\cos\psi = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{k} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}} \tag{45}$$

Aus (45) erhält man schließlich nach bekannter pythagoräischer Relation

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}. \tag{46}$$

Die Wirkungsebene der Schubspannung τ sei durch ihre Schnittgerade (Spur) mit der zu den Achsen x, y parallelen Ebene durch P bestimmt; sie ist zugleich der Schnittgeraden der Berührungsebene durch $P(x, y)$ mit der x-y-Ebene parallel und daher zu $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ normal. Ist daher $\hat{\mathfrak{s}}$ ein Einheitsvektor in dieser Spurlinie, so gilt offenbar

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{k} = \hat{\mathfrak{s}} \cdot \sin\psi = \hat{\mathfrak{s}} \cdot \operatorname{tg}\psi \cdot \cos\psi.$$

Führt man hierin (44) bis (46) ein, so erhält man:

$$\hat{\mathfrak{s}} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{i} - \frac{\partial w}{\partial y}\mathfrak{i}}{\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{j} - \frac{\partial w}{\partial y}\mathfrak{i}}{\sqrt{EG - F^2 - 1}}. \tag{47}$$

Aus (39) und (46) erhält man die Kurven konstanter Schubspannungen $\tau = \tau_e$ zu:

$$\tau_e = \frac{S}{l}\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}. \tag{48}$$

Diese Kurven sind also dadurch gekennzeichnet, daß der Radikand in (48) konstante Werte annimmt, so daß der Spurenvektor der zugeordneten Wirkungsebene nach (47) für alle Punkte konstanter Schubspannungen τ_e nur vom Zähler abhängig ist. Führt man (18a) und (19a) in (48) ein, so erhält man für die Höhenlinien des Schubspannungsreliefs wegen (39):

$$4\left(\frac{h}{a^2+b^2} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{3a^2+b^2} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{a^2+3b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\alpha}{(a^2+3b^2)^2} + \frac{\cos^2\alpha}{(3a^2+b^2)^2}\right]$$

$$+ 4\left(\frac{h}{a^2+b^2} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{3a^2+b^2} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{a^2+3b^2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{x}{a^2}\frac{\sin\alpha}{a^2+3b^2} + \frac{y}{b^2} \cdot \frac{\cos\alpha}{3a^2+b^2}\right) = \frac{4\tau_e^2 l^2}{\gamma^2 a^4 b^4}. \tag{49}$$

Führt man andrerseits (18a) und (19a) in (47) ein und beachtet (48), so erhält man z. B. für den Spureneinheitsvektor $\hat{\mathfrak{s}}$ längs einer Höhenlinie des Schubspannungsreliefs:

$$\hat{\mathfrak{s}} = \frac{\gamma \cdot a^2 b^2}{2\tau_e \cdot l} \cdot \left\{\left[\frac{2y}{b^2}\left(\frac{h}{a^2+b^2} + \frac{y\cos\alpha}{3a^2+b^2} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{a^2+3b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \frac{\cos\alpha}{3a^2+b^2}\right]\mathfrak{i}\right.$$

$$\left. - \left[\frac{2x}{a^2}\left(\frac{h}{a^2+b^2} + \frac{y \cdot \cos\alpha}{3a^2+b^2} + \frac{x \cdot \sin a}{a^2+3b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \frac{\sin\alpha}{a^2+3b^2}\right]\mathfrak{j}\right\}. \tag{50}$$

[1] Siehe Fußnote 3 von Seite 126.

Will man nur die Richtung der Spur der Wirkungsebene im 0-x-y-System festlegen, so wird dies durch die Zähler in (47) und (50) allein geleistet. Bezeichnet man den Winkel, den $\mathfrak{s}$ mit der positiven x-Achse einschließt, mit χ, so erhält man aus (50):

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{\frac{2x}{a^2}\left(\frac{h}{a^2+b^2}+\frac{y\cos\alpha}{3a^2+b^2}+\frac{x\cdot\sin\alpha}{a^2+3b^2}\right)+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{a^2+3b^2}}{\frac{2y}{b^2}\left(\frac{h}{a^2+b^2}+\frac{y\cos\alpha}{3a^2+b^2}+\frac{x\sin\alpha}{a^2+3b^2}\right)+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{3a^2+b^2}} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial y}}. \quad (50a)$$

Durch die Gleichungen (49) und (50) bzw. (50a) werden im allgemeinsten Falle die Schichtenlinien des Schubspannungsreliefs und die Richtungen der Spuren der Wirkungsebenen festgelegt. Während aber die Höhenlinien des Geschwindigkeitsreliefs (des Wölbhügels) spezielle Kurven 3. Ordnung waren, sind die des Schubspannungsreliefs nach (49) allgemeine Kurven 4. Ordnung, deren Eigenschaften in dieser Allgemeinheit noch nicht untersucht worden sein dürften. Für die Punkte des Kegelschnittes $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ sind die Spuren der Wirkungsebenen der Schubspannungen nach (50a) parallel zur x-Achse, für jene des Kegelschnittes $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ jedoch parallel zur y-Achse gerichtet. Im Schnittpunkte m derselben ist die Richtung χ nach (50a) unbestimmt in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß alle v-parallelen Ebenen durch diesen Punkt schubspannungsfrei sind.

Die Gleichungen (49) und (50) bzw. (50a) können auch zur Beantwortung der Frage benutzt werden, wie sich die Schubspannungen $\tau(x,y)$ und ihre Richtung $\operatorname{tg}\chi$ ändern, wenn man den Bezugspunkt $P(x,y)$ längs einer beliebigen Kurve $F(x,y)=0$ wandern läßt. (Die Schubspannung $\tau(x,y)$ statt τ_e ist dann das von (49) gelieferte Ergebnis). Von besonderem Interesse ist der Schubspannungsverlauf — die Wandschubspannung $\tau_w(x,y)$ —, wie bereits bemerkt worden ist, für die Randkontur (5a). Dann verschwindet im Zähler und Nenner von (50a) jeweils der zweite Term, und man erhält durch Kürzung des Klammerausdruckes im ersten Term das einfache und natürlich erwartungsgemäße Ergebnis:

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{2x}{a^2}:\frac{2y}{b^2}. \quad (50b)$$

Die Spuren der Wirkungsebenen der Wandschubspannung $\tau_w(x,y)$ für Punkte der Randellipse (des elliptischen Rohrprofils) sind die Berührungstangenten derselben. Nach Einführung von (5a) in (49) entfallen die beiden letzten Summanden, und man erhält nach einigen Kürzungen für die Wandschubspannung $\tau_w(x,y)$:

$$\tau_w(x,y) = \frac{\gamma\cdot a^2b^2}{l}\cdot\left(\frac{h}{a^2+b^2}+\frac{y\cdot\cos\alpha}{3a^2+b^2}+\frac{x\sin\alpha}{a^2+3b^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\,; \quad \text{mit} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (51)$$

Die Endpunkte von $\tau_w(x,y)$ erfüllen somit eine Raumkurve mit der Kontur-Ellipse als Grundriß in der x-y-Ebene.

5. Die Diskussion praktisch wichtiger Unterfälle. Die im 4. Abschnitt erhaltenen Ergebnisse sind wohl die allgemeinsten, keinesfalls aber die praktisch wichtigsten; praktisch viel wichtiger sind Unterfälle, die sich auf eine spezielle Orientierung der Ellipsenachsen gegen den Spiegel, auf ein spezielles Achsenverhältnis oder auf die Tiefenlage des Rohrquerschnittes unter dem Spiegel beziehen. Dabei weisen die allgemeinen Ergebnisse z. T. große Vereinfachungen auf, aber gerade dieser Umstand gestattet die Herleitung interessanter Beziehungen, die für den betreffenden Unterfall charakteristisch sind und einen anschaulichen Einblick in die jeweils vorliegenden Verhältnisse vermitteln.

Aus der großen Zahl der möglichen Unterfälle sollen hier nur die folgenden herausgegriffen werden:

1. Kreisquerschnitt in großer Tiefe (Druck $p'=$ konstant).
2. Elliptischer Querschnitt in großer Tiefe (Druck $p'=$ konstant).
3. Kreisquerschnitt in endlicher Tiefe (Druck statisch verteilt).
4. Elliptischer Querschnitt in endlicher Tiefe und mit der großen Halbachse a parallel zum Spiegel $a\|g$ (Druck statisch verteilt).

1. Kreisquerschnitt in großer Tiefe (Druck $p' = \gamma h = \text{konstant}$). Man erhält mit $a = b = r_a$ und alleiniger Beachtung des Gliedes mit h, wobei $\gamma h = p'$ gemäß (8) der konstante Druck bedeutet, z. B. aus (13a):

$$v(x,y) = \frac{p' \cdot r_a^2}{4 \varkappa \cdot l}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{r_a^2}\right) = \frac{\gamma \cdot h}{4 \varkappa \cdot l}(r_a^2 - r^2); \quad r^2 = x^2 + y^2 . \tag{52a}$$

Damit ist die bekannte Geschwindigkeitsverteilung der laminaren Kreisrohrströmung dargestellt. Die Kreise gleicher Geschwindigkeit v_e erfüllen somit die Oberfläche eines Rotationsparaboloids mit dem Querschnitt des kreisförmigen Rohres als Basis. Für die sekundliche Flüssigkeitsmenge erhält man aus (14a):

$$Q = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\gamma \cdot h \cdot r_a^4}{\varkappa l} , \tag{52b}$$

somit das bekannte *Hagen-Poiseuille*sche Gesetz derselben Strömung. Bestimmt man mittels (6a, b) aus (52a, b) die Auslenkung w der Membran und das Volumen V des Wölbhügels, so erhält man sofort die Gleichungen (6) und (22a) in I. Ferner erhält man aus (52a) für $r = 0$ v_{max} und aus (52b) nach Teilung durch den Rohrquerschnitt $r^2\pi$ die mittlere Geschwindigkeit c zu:

$$v_{max} = \frac{\gamma \cdot h \cdot r_a^2}{4 \cdot \varkappa \cdot l}; \quad c = \frac{Q}{r^2 \cdot \pi} = \frac{\gamma \cdot h \cdot r_a^2}{8 \varkappa l}; \quad \eta = \frac{c}{v_{max}} = 0{,}5 . \tag{52c}$$

Die durchweg bekannten Ergebnisse (52c) sind zwecks Vergleiches mit anderen Unterfällen angefügt worden.

Beachtet man in (49) nur das Glied mit $(\gamma h)^2$, da es das Glied größter Mächtigkeit darstellt, so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\frac{h\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \frac{\tau_e \cdot l}{\gamma} \qquad \text{und} \qquad \tau_e = \frac{\gamma \cdot h \cdot r}{2 l} . \tag{53a, b}$$

Die Örter konstanter Schubspannungen (die Höhenlinien des Schubspannungsreliefs sind konzentrische Kreise ($r = \text{konst.}$)) und die Schubspannungen längs dieser Kreise nehmen linear mit deren Halbmesser zu. Die Kreise gleicher Schubspannungen τ_e erfüllen somit die Oberfläche eines Rotationskegels mit der Spitze im Mittelpunkte des Querschnittes des kreisförmigen Rohres. Neben diesen bekannten Ergebnissen folgt aus (53b) die Wandschubspannung τ_w für $r = r_a$

$$\tau_w = \frac{\gamma \cdot h \cdot r_a}{2 l} , \tag{53c}$$

ein Ergebnis, das natürlich auch aus (51) bei alleiniger Beibehaltung des Gliedes mit h und $a = b = r_a$ folgt. Dabei gilt: $\tau_w \geqq \tau_e$.[1] In der Rohrachse $r = 0$ ist gemäß (53b) auch $\tau_e = 0$: die Scheitel des Geschwindigkeits- und Schubspannungsreliefs liegen in der Rohrachse, der Symmetrieachse derselben. Dieser bekannte und leicht überschaubare Unterfall ist nur wegen des Zusammenhanges mit anderen Unterfällen angegeben worden.

2. Elliptischer Querschnitt in großer Tiefe (Druck $p' = \gamma h = \text{konstant}$)[2]. Unter Beibehaltung nur des Gliedes mit h erhält man aus (13a):

$$v(x,y) = \frac{\gamma \cdot h}{2 \varkappa l} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{\gamma}{\varkappa l} \cdot k \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad \text{mit} \quad k = \frac{h}{2} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} . \tag{54a}$$

Erteilt man $v = v_e$ einen konstanten Wert, so stellt (54a) die Mittelpunktsgleichung einer Schar konzentrischer ähnlicher und koaxialer Ellipsen dar. Man erhält als Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{2 \varkappa \cdot l \cdot v_e}{\gamma h} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{2 \varkappa \cdot l \cdot v_e}{\gamma \cdot h} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2}\right)} = 1, \quad \text{oder:} \quad \frac{x^2}{a_v^2} + \frac{y^2}{b_v^2} = 1 , \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mit} \quad \frac{a_v}{b_v} = \frac{a}{b} , \end{aligned}\right\} \tag{54b}$$

[1] In der Literatur sind die Ergebnisse (52) und (53) oftmals mittels des (geodätischen) Gefälles $J = h/l$ dargestellt. Man vgl. hierzu auch die in Fußnote 3 Seite 121 vermerkte Arbeit, in der auch erstmals das Membran-Gleichnis angegeben ist.

[2] Hierzu Literaturnachweis Seite 153.

woraus man auch die Halbachsen der zu einem gewählten v_e gehörigen Ellipse, die also eine Höhenlinie des Geschwindigkeitsreliefs darstellt, ablesen kann. Der Scheitel des Reliefs liegt also auch hier im Mittelpunkt 0. Man erhält aus (54a) mit $x = y = 0$ oder aus (54b) durch Nullsetzen der beiden Nenner

$$v_{max} = \frac{\gamma \cdot h}{2\varkappa \cdot l} \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2}\,; \quad c = \frac{Q}{a \cdot b \cdot \pi} = \frac{\gamma \cdot h}{4\varkappa \cdot l} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\,; \quad \eta = \frac{c}{v_{max}} = 0{,}5\,, \tag{54c}$$

wobei Q aus (14a) entnommen ist.

Erweitert man alle Ergebnisse (54) mit $\frac{\varkappa l}{S}$, so erhält man die Auswölbung w und das Volumen V des zugeordneten Membranproblems. Entsprechend ergeben sich nach (54b) die Halbachsen der Höhenlinien des Membran-Wölbhügels zu:

$$a_w = a \cdot \sqrt{1 - \frac{2S}{\gamma \cdot h} w_e \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2}}\,; \quad b_w = b \cdot \sqrt{1 - \frac{2S}{\gamma \cdot h} w_e \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2}}\,. \tag{54d}$$

Je größer somit die Werte von v_e bzw. w_e sind, um so kleiner sind, wie auch anschaulich einzusehen ist, nach (54b) bzw. (54d) die Halbachsen $a_v\, b_v$ bzw. $a_w\, b_w$ der Höhenlinienellipsen. Erteilt man y bzw. x in (54a) konstante Werte y_1 bzw. x_1, so erhält man die Schnittlinien des Geschwindigkeitsreliefs $v(x, y)$ mit den betreffenden v-parallelen Ebenen, die kurz Wölb-Linien heißen sollen. Mit der Veränderlichen

$$z = \frac{\varkappa \cdot v}{\gamma \cdot h}\,, \tag{54e}$$

die die Dimension einer Länge besitzt, erhält man die Parabelscharen:

$$x^2 + 2\,l \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} \cdot z = a^2\left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right), \quad \text{bzw.} \quad y^2 + 2\,l \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot z = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right). \tag{54f, g}$$

Ebenso erhält man aus (49) bei Berücksichtigung nur des Gliedes mit $(\gamma h)^2$:

$$\frac{h}{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{\tau \cdot l}{\gamma \cdot a^2 b^2} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\gamma \cdot h}{l} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}\,. \tag{55a, b}$$

Aus (55a, b) erkennt man, daß die Örter gleicher Schubspannungen $\tau = \tau_e$ oder gleicher Neigungen $\psi = \psi_e$ des zugehörigen Membran-Wölbhügels wieder Ellipsen mit den unten angegebenen Halbachsen a_τ, b_τ bzw. a_ψ, b_ψ sind:

$$\frac{x^2}{a_\tau^2} + \frac{y^2}{b_\tau^2} = 1 \quad \text{mit} \quad a_\tau = \frac{\tau_e \cdot l}{\gamma \cdot h} \frac{a^2 + b^2}{b^2}\,; \qquad b_\tau = \frac{\tau_e \cdot l}{\gamma \cdot h} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2}\,; \qquad \frac{a_\tau}{b_\tau} = \frac{a^2}{b^2}\,; \tag{55c}$$

$$\frac{x^2}{a_\psi^2} + \frac{y^2}{b_\psi^2} = 1 \quad \text{mit} \quad a_\psi = \frac{S \cdot \operatorname{tg} \psi_e}{\gamma \cdot h} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2}\,; \quad b_\psi = \frac{S \operatorname{tg} \psi_e}{\gamma \cdot h} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2}\,; \quad \frac{a_\psi}{b_\psi} = \frac{a^2}{b^2}\,. \tag{55d}$$

Die Höhenlinienellipsen des Schubspannungsreliefs sind also zu denen des Geschwindigkeitsreliefs wohl koaxial, die Halbachsen der Ellipsen nehmen aber mit zunehmender Schubspannung τ_e bzw. mit zunehmendem Gefälle $\operatorname{tg} \psi_e$ des Wölbhügels proportional zu. Da das Achsenverhältnis dieser Ellipsen nach (55c, d) gleich dem Quadrat des Achsenverhältnisses der Querschnittsellipse ist, sind sie dieser jedoch nicht ähnlich. Schneidet man auch das Schubspannungsrelief $\tau(x, y)$ in (55b) mit den Ebenenscharen $y = y_1$, bzw. $x = x_1$, so erhält man wieder dessen Wölblinien. Mit der Veränderlichen

$$t = \frac{l\,\tau}{\gamma \cdot h} \quad \text{und analog} \quad t_w = \frac{l\,\tau_w}{\gamma \cdot h} \quad \text{für die Wandschubspannung } \tau_w, \tag{55e}$$

die ebenfalls die Dimension einer Länge besitzt, erhält man die Hyperbelscharen:

$$t^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right)^2 - \frac{x^2}{a^4} = \frac{y_1^2}{b^4}\,, \quad \text{bzw.} \quad t^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right)^2 - \frac{y^2}{b^4} = \frac{x_1^2}{a^4}\,. \tag{55f, g}$$

Von der Raumkurve der Wandschubspannung τ_w interessieren ihre Projektionen auf die τ_w-x-Ebene (Aufriß) und auf die τ_w-y-Ebene (Kreuzriß). Eliminiert man also aus (51) mit der Ellipsengleichung der Randkontur zunächst y, dann x, so erhält man mit t_w als Veränderlicher gemäß (55e)

$$x^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^4} + t_w^2 \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 b^2} = 1 \quad \text{(Ellipse)}, \quad \text{bzw.} \quad -y^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^4} + t_w^2 \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^4} = 1\,; \tag{56a, b}$$

(Hyperbel).

Aus (56a, b) können die Halbachsen dieser Kegelschnitte leicht abgelesen, diese somit leicht bestimmt werden. Ein Beispiel ist im Abschnitt 7 berechnet.

3. Kreisquerschnitt in endlicher Tiefe (Druck statisch verteilt). Wie nach (13) gezeigt wurde, erhält man aus (13a) im x-y-System für $v(x, y)$:

$$v(x, y) = \frac{\gamma}{8 \varkappa l} (r_a^2 - x^2 - y^2) (2 h + y) . \tag{57a}$$

Erteilt man $v = v_c$ einen konstanten Wert, so stellt (57a) eine zirkulare Kurve 3. Ordnung dar, von der natürlich nur das Oval innerhalb der Kreisfläche mit dem Halbmesser r_a physikalische Bedeutung besitzt. Nach Wahl von y läßt sich aus (57a) x^2 leicht berechnen und man erhält:

$$x^2 = r_a^2 - y^2 - \frac{8 \varkappa \cdot l \cdot v_c}{\gamma \cdot (2 h + y)} . \tag{57b}$$

Diese Berechnung wurde z. B. in I, Tabelle 1, S. 365, tatsächlich durchgeführt, während im 6. Abschnitt dieser Arbeit ein allgemeineres und anschaulicheres Verfahren angegeben ist, das generell für alle hier behandelten Fälle anwendbar bleibt. Behält man in (57a) nur die Glieder mit h bei, so erhält man sofort wieder (52a), wie es diesem Fall großer Tiefe entspricht. Ebenso ändert sich nichts an den Ergebnissen (52b, c).

Als Wölblinien des Geschwindigkeitsreliefs mittels der Ebenenschar $y = y_1$, bzw. $x = x_1$ erhält man mit z in (54e) die Scharen quadratischer bzw. kubischer Parabeln:

$$x^2 + 8 \frac{l h}{2 h + y_1} \cdot z = r_a^2 - y_1^2; \quad \text{bzw.} \quad y^2 (2 h + y) + 8 l \cdot h \cdot z = (r_a^2 - x_1^2) (2 h + y) . \tag{57c, d}$$

In (57c) sind aber im Gegensatz zur Parabelschar (54f, g) die Parameter p nicht mehr konstant, sondern für jedes Individuum der Schar verschieden.

Um die Linien gleicher Schubspannungen $\tau = \tau_c$ zu finden, hat man in (49) $a = b = r_a$ zu setzen. Da man das 0-x-y-System mit horizontaler x-Achse annehmen wird, so ist außerdem $\alpha = 0$ anzunehmen. Man erhält so aus (49) für die Höhenlinien bizirkulare Kurven 4. Ordnung, die zur y-Achse symmetrisch sind und von der wiederum nur die Ovale bzw. Teile innerhalb des Kreisquerschnittes in Frage kommen[1]:

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2) [4 (2 h + y)^2 + 4 y (2 h + y) - 2 r_a^2] - 4 y (2 h + y) r_a^2 + r_a^4 = 64 \frac{l^2 \tau_c^2}{\gamma^2}$$

$$= 64 \frac{S^2}{\gamma^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \psi_c . \tag{58}$$

In (58) ist im letzten Term auch die Auffassung berücksichtigt, daß diese Kurven als Linien gleicher Neigung des Wölbhügels anzusehen sind.

Für $\lim h \to \infty$ erhält man aus (58) sofort wieder (53a), wie es dem nunmehr gewonnenen Fall konstanten Druckes $p' = \gamma h$ entspricht. Da (58) hinsichtlich x^2 eine quadratische Gleichung darstellt, so kann x^2 nach Wahl von y leicht berechnet und zur Bestimmung der Schichtenlinien des Schubspannungsreliefs ausgenutzt werden. Es folgt:

$$x^2 = -[4 (2 h + y) (h + y) + y^2 - r_a^2] \pm \sqrt{4 (2 h + y)^2 [4 (h + y)^2 - r_a^2] + 64 \frac{l^2 \tau_c^2}{\gamma^2}} . \tag{58a}$$

In der Deutung als Linien gleicher Neigungen $\operatorname{tg} \psi_c$ des Membran-Wölbhügels wäre der letzte Term in (58a) wieder durch $\frac{S^2}{\gamma^2} \cdot 64 \cdot \operatorname{tg}^2 \psi_c$ zu ersetzen.

Als Schnittlinien des Schubspannungsreliefs mit den Ebenen $y = y_1$ und $x = x_1$ erhält man jeweils Kurven 4. Ordnung, von denen die Schar der ersteren zur y-Achse symmetrisch ist. Ihre leicht bestimmbaren Gleichungen brauchen hier nicht eigens angeschrieben zu werden. Im Aufriß werden allerdings die x^2-t-Kurven durch Kegelschnitte und zwar durch eine Hyperbelschar dargestellt.

In dem im Abschnitt 7 durchgeführten analytisch-graphischen Verfahren werden die erwähnten Kurven 4. Ordnung im Auf- und Kreuzriß graphisch dargestellt. Man vgl. Abb. 7.

[1] Hinsichtlich der Darstellung der wesentlichen Eigenschaften dieser Kurven vgl. man *G. Loria*, a. a. O. (Fußnote 2 Seite 121) III. Abschnitt: Kurven 4. Ordnung, 3. Kapitel: Elliptische, insbesondere bizirkulare Kurven 4. Ordnung im allgemeinen, S. 114—124.

Bemerkenswerter sind hier die Projektionen der Raumkurven der Wandschubspannung τ_w auf die erwähnten vertikalen Projektionsebenen. Aus (51) folgt mit $\alpha = 0$ und $a = b = r_a = \sqrt{x^2 + y^2}$ und mit t_w in (55e) sofort:

$$t_w = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_a}{h} \cdot (2h + y); \quad t_{w\,max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_a}{h} (2h + r_a); \quad t_{w\,min} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_a}{h} (2h - r_a). \tag{59a}$$

In der Kreuzrißebene ergibt sich als Projektion der Raumkurve der Wandschubspannung somit eine Gerade. Drückt man y durch x aus, so erhält man:

$$\left(\frac{x}{r_a}\right)^2 + \left(\frac{t_w \cdot \frac{h}{r_a} - \frac{h}{2}}{\frac{r_a}{4}}\right)^2 = 1. \tag{59b}$$

Die Projektion auf die Aufrißebene ist somit eine Ellipse mit den Halbachsen r_a in der x- und $r_a^2/4h$ in der t_w-Achsenrichtung, deren Mittelpunkt die Koordinaten $x_1 = 0$, $(t_w)_1 = \frac{r_a}{2}$ besitzt. Aus (59a) folgt mit $y = r_a \cos\varphi = r_a \cos s/r_a$:

$$t_w = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_a}{h} \left(2h + r_a \cdot \cos\frac{s}{r_a}\right). \tag{59c}$$

Die Wandschubspannung als Funktion des rektifizierten Kreisbogens s der Kreiskontur ist eine cos-Linie, die für $\varphi = 0, \pi$ die in (59a) vermerkten Extremwerte annimmt.

4. Elliptischer Querschnitt in endlicher Tiefe und mit der großen Halbachse a parallel zum Spiegel $a \parallel g$. (Druck statisch verteilt.) Mit $\alpha = 0$ erhält man aus (13a) für $v(x, y)$:

$$v(x, y) = \frac{\gamma \cdot a^2 \cdot b^2}{2\varkappa \cdot l} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y}{3a^2 + b^2}\right). \tag{60a}$$

Erteilt man $v = v_c$ einen konstanten Wert, so stellt (60a) eine Kurve 3. Ordnung dar, von der wieder nur die Ovale innerhalb des elliptischen Rohrquerschnittes physikalische Bedeutung besitzen. Sie gestattet nach Wahl von y die Abszisse x zu berechnen; man erhält:

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 - \frac{2\varkappa \cdot l \cdot v_c}{\gamma \cdot b^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2)(3a^2 + b^2)}{h(3a^2 + b^2) + y(a^2 + b^2)}. \tag{60b}$$

Setzt man in (60b) $a = b = r_a$, so erhält man die für diesen Fall kreisförmigen Rohres gültige Formel (57b). Behält man in (60a) nur das Glied mit h bei, so erhält man sofort wieder Gleichung (54a), die für diesen Fall konstanten Druckes gültig war. Mit $y = y_1$ bzw. mit $x = x_1$ erhält man mit z in (54c):

$$x^2 + 2\frac{l \cdot h}{b^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2) \cdot (3a^2 + b^2)}{h(3a^2 + b^2) + y_1(a^2 + b^2)} \cdot z = a^2\left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right); \tag{60c}$$

somit wieder eine Parabelschar, die mit $a = b = r_a$ sofort wieder (57c) ergibt, bzw. die Schar kubischer Parabeln

$$y^2\left(h\frac{3a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + y\right) + 2l \cdot h\frac{3a^2 + b^2}{a^2} \cdot z = \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_1^2\right)\left(h\frac{3a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + y\right), \tag{60d}$$

deren Gleichungen (60d) mit $a = b = r_a$ sofort wieder die Gleichung (57d) ergeben.

Um die Linien gleicher Schubspannungen $\tau = \tau_c$ zu erhalten, hat man in (49) $\alpha = 0$ zu setzen. Man erhält dann die folgende Verallgemeinerung der bizirkularen Kurve 4. Ordnung in (58), von der nur die Teile innerhalb der Fläche der elliptischen Membran in Frage kommen:

$$4\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y}{3a^2 + b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) + 4\left(\frac{h}{a^2 + b^2} + \frac{y}{3a^2 + b^2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \cdot \frac{y}{b^2(3a^2 + b^2)}$$
$$+ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{(3a^2 + b^2)^2} = 4\frac{l^2 \tau_c^2}{\gamma^2 a^4 b^4} = 4\frac{S^2 \operatorname{tg}^2 \psi_e}{\gamma^2 a^4 b^4} \tag{61}$$

In (61) ist im letzten Term wieder die Auffassung als Linien gleicher Neigung des Wölbhügels des zugeordneten Membran-Problems berücksichtigt worden. Da auch (61) hinsichtlich x^2 eine quadratische Gleichung darstellt, kann sie nach x^2 gelöst werden und ergibt:

$$x^2 = -\left|2\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+y\right)^2+2\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+y\right)\frac{a^2}{b^2}\cdot y+a^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)\right| \pm \sqrt{4\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+y\right)^2\left|\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+y\right)^2+2\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+y\right)\frac{a^2}{b^2}\cdot y+a^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)\right|+\frac{4l^2\tau_e^2}{\gamma^2 b^4}\cdot(3a^2+b^2)^2}. \tag{61a}$$

In (61a) wäre der letzte Term des Radikanden wieder durch

$$4\frac{S^2\operatorname{tg}^2\psi_e}{\gamma^2 b^4}(3a^2+b^2)^2$$

zu ersetzen, falls man das Problem wieder als solches einer einseitig gedrückten Membran auffassen wollte. Setzt man in (61a) wieder $a=b=r_a$, so erhält man nach einigen Umformungen sofort wieder das für Kreismembranen gültige Ergebnis (58a).

Als Schnittlinien des Schubspannungsreliefs (61) mit den Ebenen $y=y_1$ und $x=x_1$ erhält man wieder leicht berechenbare Kurven 4. Ordnung, die im Auf- bzw. Kreuzriß sich in wahrer Größe darstellen. Die x^2-t-Kurven der Schnittlinien mit den Ebenen $y=y_1$ ergeben im Aufriß allerdings wieder auch hier eine Hyperbelschar, wie man aus (61) leicht erkennt, wenn man $\frac{l\tau_e}{\gamma\cdot h}=t$ setzt. In einem im 7. Abschnitt durchgeführten Beispiel dieses Falles werden die erwähnten Kurven 4. Ordnung graphisch dargestellt werden. Man vgl. Abb. 9.

Viel bemerkenswerter sind auch hier Betrachtungen über die Raumkurve der Wandschubspannung τ_w. Zunächst erhält man aus (51) für $\alpha=0$:

$$\tau_w(x,y)=\frac{\gamma\cdot a^2b^2}{l}\cdot\left(\frac{h}{a^2+b^2}+\frac{y}{3a^2+b^2}\right)\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\;;\quad\text{mit}\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{62}$$

Drückt man hierin y durch x aus, so erhält man als Projektion dieser Raumkurve auf die Aufrißebene mit t_w in (55e):

$$t_w\frac{h}{b}(3a^2+b^2)=\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\;. \tag{62a}$$

Eine doppelte Quadrierung zeigt, daß dies eine Kurve 4. Ordnung hinsichtlich der Veränderlichen t_w und x^2 — symmetrisch zur y-Achse — ist. Dies soll hier nicht weiter durchgeführt werden. Man erkennt aber bereits aus (62a), daß man mit $a=b=r_a$ sofort wieder Gleichung (59a) für den Kreisquerschnitt erhält. Eliminiert man andererseits aus (62) x, so erhält man analog mit t_w in (55e)

$$t_w\frac{h}{a}(3a^2+b^2)=\left(h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}+y\right)\sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2}\;. \tag{62b}$$

Mit $a=b=r_a$ erhält man auch als (62b) sofort wieder Gleichung (59a).

Es können in praktischen Fällen nun verschiedene Möglichkeiten über das Verhalten von τ_w und damit von t_w längs des Ellipsen-Umfanges eintreten. Am oberen Endpunkt ($y=-b$) der kleinen Halbachse hat die Schubspannung τ_w (wegen der Verschiebung des Scheitels m des Geschwindigkeitsreliefs im Sinne $+y$) stets einen kleineren Wert als am unteren Ende ($y=+b$). τ_w kann nun bei der Bewegung vom oberen zum unteren Ende der kleinen Halbachse längs der elliptischen Kontur entweder monoton zunehmen, wie es sich z. B. beim kreisförmigen Rohrquerschnitt ergab, oder zunächst abnehmen und nach Passieren eines Minimums wieder zunehmen. Es sei zunächst der letztere Fall vorausgesetzt. Es ist dabei gleichgültig, ob man t_w als Funktion von x oder y ansieht. Da der letztere Fall geringere Mühe erfordert, sei (62b) — etwa nach vorhergehender Quadrierung — differenziert und das Ergebnis gleich Null gesetzt. Man erhält dann für y die quadratische Gleichung:

$$2(a^2-b^2)y^2+h\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}(a^2-b^2)y+b^4=0$$

mit den beiden Wurzeln:

$$y=-\frac{h}{4}\cdot\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}\pm\sqrt{\frac{h^2}{16}\left(\frac{3a^2+b^2}{a^2+b^2}\right)^2-\frac{b^4}{2(a^2-b^2)}}\;. \tag{63}$$

Ein Extremum existiert nur dann, wenn der Radikand in (63) positiv ist. Der ungünstigste Fall tritt bei gegebenen Halbachsen a, b offenbar dann ein, wenn h den kleinsten, nach der Vollbenetzungsbedingung (16) noch möglichen Wert annimmt, der für $\alpha = 0$ $h = b$ ist. Der Minuend des Radikanden in (16) ist dann am kleinsten. Setzt man mit $h = b$ den Radikanden gleich Null, so wird also für jedes $h > b$ ein reelles Extremum für t_w existieren. Führt man die beiden dimensionslosen Größen

$$\mu = \frac{a}{b}\,; \qquad \nu = \frac{h}{b} \tag{64a, b}$$

ein, so ergibt die Nullsetzung des Radikanden in (63) die Gleichung:

$$9\,\nu^2\,\mu^6 - (3\,\nu^2 + 8)\,\mu^4 - (5\,\nu^2 + 16)\,\mu^2 - (\nu^2 + 8) = 0\,, \tag{65a}$$

die für den Kleinstwert $\nu = 1$ von ν in

$$9\,\mu^6 - 11\,\mu^4 - 21\,\mu^2 - 9 = 0 \tag{65b}$$

übergeht. Da in (65a, b) mit Ausnahme des ersten Gliedes mit der höchsten Potenz von μ alle drei anderen Glieder negativ sind, so erkennt man, daß die Gleichungen (65a, b) mindestens eine positive reelle Wurzel für μ^2 liefern. Daß diese reelle positive Wurzel die einzige ist, ersieht man aus der *Cartesi*schen Zeichenregel (nur ein Zeichenwechsel für alle $\nu \geqq 1$). Zu jeder Tiefenlage $\nu \geq 1$ des Membran-Mittelpunktes 0 unter der Spiegelverschneidungsgeraden g gibt es somit einen bestimmten Wert $\mu = a/b$ des Verhältnisses der Halbachsen der Querschnittsellipse, der nicht unterschritten werden darf, wenn ein Extremum (Minimum) der Wandschubspannung längs der Randkontur existieren soll. Ist andererseits das Halbachsenverhältnis μ des Rohrquerschnittes gegeben, so folgt aus (63) oder (65a) eine untere Schranke für ν, die nicht unterschritten werden darf, wenn ein Minimum von t_w existieren soll. Mit (64a, b) und mit (16) für $\alpha = 0$ folgt:

$$\nu \geq 1; \qquad \nu \geq 2\sqrt{2} \cdot \frac{1 + \mu^2}{(3\,\mu^2 + 1)\sqrt{\mu^2 - 1}}\,. \tag{65c, d}$$

Für den Sonderfall des Zusammenfallens der Scheiteltangente im oberen Endpunkt der kleinen Halbachse mit der Spiegelverschneidungsgeraden g ($\nu = 1$) findet man aus (65b) als einzige reelle Wurzel

$$\mu = \frac{a}{b} = 1{,}543\,. \tag{65e}$$

Tabelle 1. *Die nach Gleichung (65d) zu den gewählten Werten von μ^2 bzw. μ berechneten Werte von ν.*

μ^2	μ	$\nu(\mu)$
4	2	0,628
3	1,723	0,800
2,5	1,581	0,951
2,4	1,549	0,989
2,3	1,517	1,035
2,2	1,483	1,087
2,1	1,449	1,142
2,0	1,414	1,213
1,9	1,378	1,294
1,8	1,342	1,386
1,7	1,304	1,498
1,6	1,265	1,635
1,5	1,225	1,820

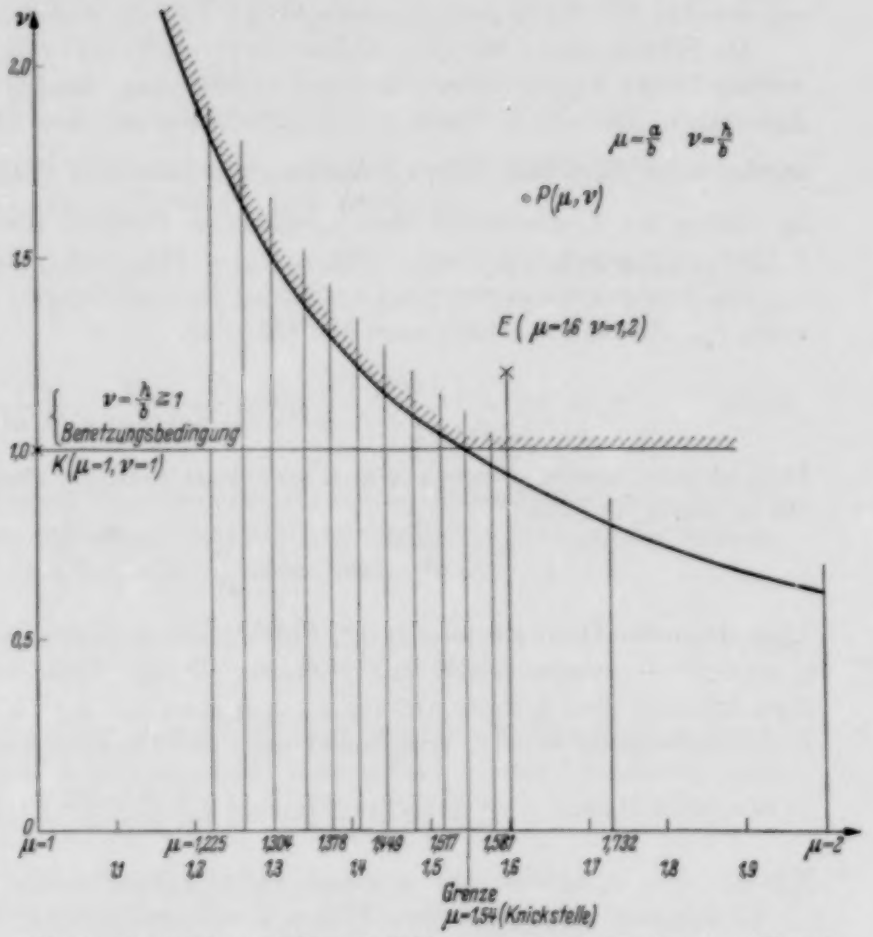


Abb. 3. Das durch die beiden Ungleichungen (65c, d) aus der $\mu - \nu$-Ebene ausgesonderte Feld mit seinen durch Schraffur hervorgehobenen Grenzlinien. Liegt der Bildpunkt (μ, ν) eines speziellen durch $\alpha = 0$ charakterisierten Strömungsproblems innerhalb dieses Feldes, so besitzt die Wandschubspannung längs der elliptischen Kontur ein Minimum.

Diesen Wert erhält man auch durch Interpolation aus Tabelle 1, in der die Funktion (65d) berechnet ist, oder durch Ablesung aus Abbildung 3. In dieser ist das durch (65c, d) ausgesonderte und durch Schraffur hervorgehobene Feld ersichtlich gemacht, in dem der Bildpunkt (μ, ν) eines speziellen betrachteten Strömungsproblems liegen muß, damit — außer den beiden stets vorhandenen Extremwerten in den Endpunkten der kleinen Halbachse, die dann Maxima sind — noch an anderer Stelle der elliptischen Kontur für $\alpha = 0°$ ein Kleinstwert der Wandschubspannung τ_w existiere.

Dieses höchst bemerkenswerte Ergebnis erfährt im allgemeinen Falle ($\alpha \neq 0$) eine wesentliche Erweiterung, die jedoch hier nicht mehr betrachtet werden soll[1].

6. Ein analytisch-graphisches Lösungsverfahren. Will man die Höhenlinien des Geschwindigkeits- und Schubspannungsreliefs in einem praktisch vorgegebenen Strömungsproblem wirklich ermitteln, so steht man vor der mühevollen und zeitraubenden Aufgabe, die mitgeteilten Gleichungen (54a), (57a), (58) usw. sehr oftmals auszuwerten. Dazu kommt, daß die im 5. Abschnitt erwähnten Vereinfachungen im allgemeinsten Fall einer mit den Achsen gegen den Spiegel schiefen Ellipse vollkommen wegfallen, und es ist dann nötig, ganze Scharen von Gleichungen 3. und 4. Grades oftmals numerisch auszuwerten. Nomogramme, die das leisten, ließen sich unschwer entwerfen, sie hätten aber mit der direkten Berechnung obiger Gleichungen den Nachteil gemeinsam, daß ihre Zwischenergebnisse unanschaulich und hinsichtlich ihrer Richtigkeit schwer kontrollierbar wären. Außerdem müßten bei jeder neuen Fragestellung, die man bei einem schon durchgerechneten Strömungsproblem aufwerfen könnte, die erwähnten Berechnungen immer wieder von neuem durchgeführt werden. Das hier zu beschreibende analytisch-graphische Verfahren vermeidet die erwähnten Nachteile:

1. Es ist grundsätzlich für das Geschwindigkeits- und Schubspannungsrelief in gleicher Weise anwendbar.

2. Es ist bereits in seinen Zwischenergebnissen, den Wölbungslinien, außerordentlich anschaulich und vermittelt schon durch diese Linien eine klare Vorstellung von der Gestalt des betreffenden Reliefs.

3. Es gestattet, die Höhenlinien desselben mittels weniger Ordnerlinien zu konstruieren, wobei eine mehrfache Kontrolle aus der Zeichnung sich von selbst ergibt.

4. Jede neue Frage kann nach Entwurf der Wölblinien ohne jede weitere Berechnung durch Zeichnung weniger Ordnerlinien beantwortet werden.

Das Verfahren besteht darin, daß man die erwähnten Gleichungen z. B. (57a) für bestimmte, am besten ganzzahlige Gitterpunkte, die innerhalb des elliptischen (oder kreisförmigen) Rohrquerschnitts liegen, ausrechnet, wodurch man bereits die erwähnten Wölblinien punktweise konstruieren kann, wenn man nur die auf einer y-Parallelen $x = x_i$ oder auf einer x-Parallelen $y = y_k$ liegenden Funktionswerte beachtet und durch Kurvenzüge verbindet, die dann durch die Parameter x_i bzw. y_k gekennzeichnet sind.

Als Funktionswerte in der Zeichnung kann man v oder τ selbst, auch die in den Gleichungen (54e) und (55e) eingeführten Strecken z und t oder irgend eine andere v bzw. τ proportionale Größe ζ bzw. η auftragen. Die Nullachsen der so zu zeichnenden Wölblinien sind in den Aufrissen mit den Wölblinien $y = y_k$ die x-Parallelen, die dann x''-Achsen genannt werden, in den Kreuzrissen mit den Wölblinien $x = x_i$ hingegen die y-Parallelen, die dann y'''-Achsen heißen mögen. Zu den berechneten Gitterpunkten kommen im Falle des Geschwindigkeitsreliefs dann zu jeder Wölblinie $x = x_i$ bzw. $y = y_k$ noch je zwei Basispunkte, die man durch Projektion der Schnittpunkte der Querschnittsellipse mit den Geraden $x = x_i$ bzw. $y = y_k$ auf die zugehörige Basisgerade y''' bzw. x'' erhält. Im Beispiel der Abb. 4 sind diese Basispunkte und ihre Konstruktion deutlich gemacht.

Im Falle des Schubspannungsreliefs erhält man für jede Wölblinie zwei weitere Punkte und damit auch Kontrollmöglichkeiten dadurch, daß die Endpunkte dieser Wölblinien auf den Auf- oder Kreuzrißprojektionen der Raumkurve der Wandschubspannungen τ_w liegen müssen, die man vorher durch Berechnung der i. a. verhältnismäßig einfacheren bzgln. Gleichungen (51), (56a, b), (59a, b) oder (62) ermittelt hat. In Abb. 5 ist die Konstruktion auch dieser Randpunkte besonders angedeutet.

Will man nun die Höhenlinien eines Reliefs z. B. für eine Schar äquidistanter Ebenen, die parallel zur Basisebene der Querschnittsellipse verlaufen, zeichnen, so hat man nur nötig, die Wölblinienscharen im Aufriß und Kreuzriß mit einer Schar zu den Basisachsen x'' bzw. y''' paralle-

[1] In einer späteren Arbeit soll neben weiteren Untersuchungen dieses allgemeinen Falles auch diese Erweiterung diskutiert werden. Natürlich ergibt sich dann eine größere Mannigfaltigkeit der Bedingungen.

ler, äquidistanter Geraden zum Schnitte zu bringen und die Schnittpunkte auf die Geraden $y = y_k$ bzw. $x = x_i$, also auf jene Geraden herabzuloten, die durch die gleichen Parameter gekennzeichnet sind, wie die Wölblinien, die die Schnittpunkte mit den Spuren der betreffenden Höhenebene liefern. Auf diese Art wird der Funktionswert jedes Gitterpunktes auf zweifache Art zur Konstruktion der Wölblinienpläne ausgenutzt. In Abb. 4 ist diese einfache Konstruktion von Punkten einer Höhenlinie noch besonders ersichtlich gemacht.

Will man z. B. Geschwindigkeit v_e oder Schubspannung τ_e im Strömungsgebiet vorgeben und jene Punkte suchen, in denen dieselben vorhanden sind, so braucht man die Wölblinienscharen nur mit Basisparallelen zu schneiden, die in den v_e bzw. τ_e entsprechenden Höhen zu zeichnen sind und die Schnittpunkte, wie beschrieben, auf die Geraden $x = x_i$ bzw. $y = y_k$ herabzuloten. Da die Maßstäbe für die Größen v, τ, z usw. willkürlich wählbar sind, so kann man leicht schleifende Schnitte vermeiden, indem man — etwa nur für einen Riß — den bzgl. Maßstab entsprechend ändert. Im Falle des Beispiels 2 ist das in Abb. 7 im Aufriß durch Halbierung der Maßstabskonstanten durchgeführt. Sollten trotzdem schleifende Schnitte nicht zu vermeiden sein, so wird man die auch anderweitig zu Kontrollzwecken heranzuziehende analytische Berechnung der betreffenden Punktkoordinaten mit Vorteil ausnutzen können.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß es in der Natur der Strömungsprobleme liegt, daß die Wölblinien im Falle des Geschwindigkeitsreliefs gegen die Basisgeraden hin stets konkav, im Falle des Schubspannungsreliefs hingegen zum größten Teile konvex verlaufen[1].

Liegt nur eine einfache Symmetrie eines Reliefs vor, so empfiehlt es sich, die symmetrischen Wölblinien nicht alle auf eine einzige Rißebene zu projizieren, da sie sich dann in schmalen Bezirken verdichten und so die Zeichnung unübersichtlich würde. Z. B. wurden so in dem Falle einer Querschnittsellipse mit horizontaler großer Achse in Abb. 8 die symmetrischen Wölblinien $y = y_k$ so verteilt, daß in dem Teil der Aufrißebene oberhalb der Querschnittsellipse die Wölblinien mit negativem Parameter $-y_k$ einschließlich y_0, in dem Teil der Aufrißebene unterhalb der Querschnittsellipse aber die Wölblinien $+y_k$ (ausschließlich y_0) gezeichnet wurden. Dasselbe gilt bzgl. eines Kreises als Querschnitt (man vgl. die Abb. 6—9). Liegt überhaupt keine Symmetrie mehr vor, wie im Falle des Geschwindigkeitsreliefs der schiefen Ellipse (Abb. 11), so sind sinngemäß, um lästige Überdeckungen zu vermeiden, beide Scharen von Wölblinien auf je eine Hälfte der Auf- und Kreuzrißebene zu verteilen.

Die Berechnung der Funktionswerte für die Gitterpunkte ist für die Zeichnung genau genug mit einem 25-cm-Rechenschieber durchführbar und daher verhältnismäßig rasch zu erledigen[1].

Um die Abbildungen nicht zu sehr zu überlasten, wurde die Bezeichnung cm dort weggelassen, wo Irrtümer ausgeschlossen sind, z. B. wurden die Koordinaten x, y kurz durch die Zahl der Zentimeter $+1, +2, \ldots, -1, -2, \ldots$ bezeichnet, ebenso auch die Parameter der Wölblinien.

7. 4 Zahlenbeispiele mit Konstruktionen der Schichtenpläne. Hier wurden die praktisch wichtigen Unterfälle des 5. Abschnittes weitgehend berücksichtigt. Der Fall des Kreisquerschnittes unter konstantem Überdruck ist sehr durchsichtig und in seinen Ergebnissen längst bekannt, so daß sich seine nochmalige Durcharbeitung nach dem Verfahren des 6. Abschnittes erübrigt.

Beispiel 1. Strömung durch ein elliptisches Rohr mit konstantem Überdruck $p' = \gamma h$. Es werde gewählt $a = 8$ cm; $b = 5$ cm; $h = 6$ cm. [2]

Für jeden Druck p ist $v(x, y)$ gemäß Gleichung (54a) der Funktion

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

proportional. Es wurde, um einen konkreten Fall zu betrachten, angenommen, daß der Überdruck durch eine hydrostatische Druckhöhe $h = 6$ cm zustande gekommen ist. h hat hier nur die Bedeutung einer Proportionalitätskonstante. Die Gestalt der Reliefe ändert sich für andere Werte

[1] Das hier geschilderte analytisch-graphische Lösungsverfahren wurde bereits in der in Fußnote 2 Seite 126 erwähnten Arbeit des Verf. zur Ermittlung des Geschwindigkeitsreliefs bei rechteckigen Rohrquerschnitten mit Erfolg herangezogen. Die Berechnung wurde zwecks Durchführung einiger Kontrollen und Verschärfungen in der vorliegenden Arbeit mit einer kleinen Brunsviga-Rechenmaschine durchgeführt.

[2] Die gewählten Abmessungen sind vollkommen willkürlich und für laminare Strömungen verhältnismäßig groß. Bei maximalen *Reynolds*schen Zahlen von etwa 1200 ergeben sich Strömungsgeschwindigkeiten für Wasser etwa von 1,5 ~ 2,5 cm/sec. Um sie zu verwirklichen, müßte man sehr große Rohrlängen l voraussetzen. Setzt man wieder Wasser bei Zimmertemperatur als Strömungsflüssigkeit voraus, so folgt mit $\varkappa/\gamma = 10^{-5}$ cmsec. etwa eine Länge von einigen km für l. Da sich laminare Strömungen hauptsächlich in Rohren mit kleinen Querschnitten abspielen werden, so ist es zweckmäßig, die Zeichnung als λ-fache Vergrößerung derselben aufzufassen.

von h natürlich nicht. Für die Konstante k in (54a) ergibt sich dann der Zahlenwert $k = 53{,}933\,\mathrm{cm}^3$ und die (54a) vorkommende Funktion $\varphi(x, y)$ zu:

$$\varphi(x, y) = k\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 53{,}933^{\mathrm{cm}^3}\left(1 - \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25}\right) = \left(\frac{\varkappa \cdot v\, l}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm}^3}. \tag{66}$$

In Tabelle 2 ist $\varphi(x, y)$ nach (66) für die am oberen Rande vermerkten Gitterpunktsabszissen x und für die am linken Rande angegebenen Gitterpunktsordinaten y berechnet worden. Wegen der doppelten Symmetrie des Reliefs genügte es, diese Berechnung nur für einen Ellipsenquadranten

Tabelle 2. *Die nach Gleichung (66) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{\varkappa \cdot l}{\gamma} \cdot v(x, y)^{\mathrm{cm}^3}$ *im Beispiel 1. (Man vgl. Abb. 4.)*

y \ x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8
0	53,933	53,090	50,562	46,348	40,449	32,865	23,596	12,640	0
±1	51,775	50,933	48,404	44,191	38,292	30,708	21,438	10,483	—
±2	45,303	44,461	41,933	37,719	31,820	24,236	14,966	4,011	—
±3	34,517	33,674	31,146	26,933	21,034	13,449	4,180	—	—
±4	19,416	18,573	16,045	11,831	5,933	—	—	—	—
±5	0	—	—	—	—	—	—	—	—

durchzuführen. Striche in der Tabelle 2 deuten an, daß sich die betreffenden Gitterpunkte bereits außerhalb der Querschnittsellipse befinden und sich daher ihre Berücksichtigung erübrigt hat. Für $x = y = 0$ folgt aus (66)

$$v_{max} = 53{,}933\,\gamma/\varkappa \cdot l\ \mathrm{cm/sec}.$$

In Abb. 4 ist nun eine zu $\varphi(x, y) = \frac{\varkappa \cdot l}{\gamma} \cdot v(x, y)\,\mathrm{cm}^3$ proportionale Strecke ζ cm im Auf- und Kreuzriß aufgetragen worden. Dies geschah mittels eines Maßstabes, der e cm³ dieser Größe durch 1 cm

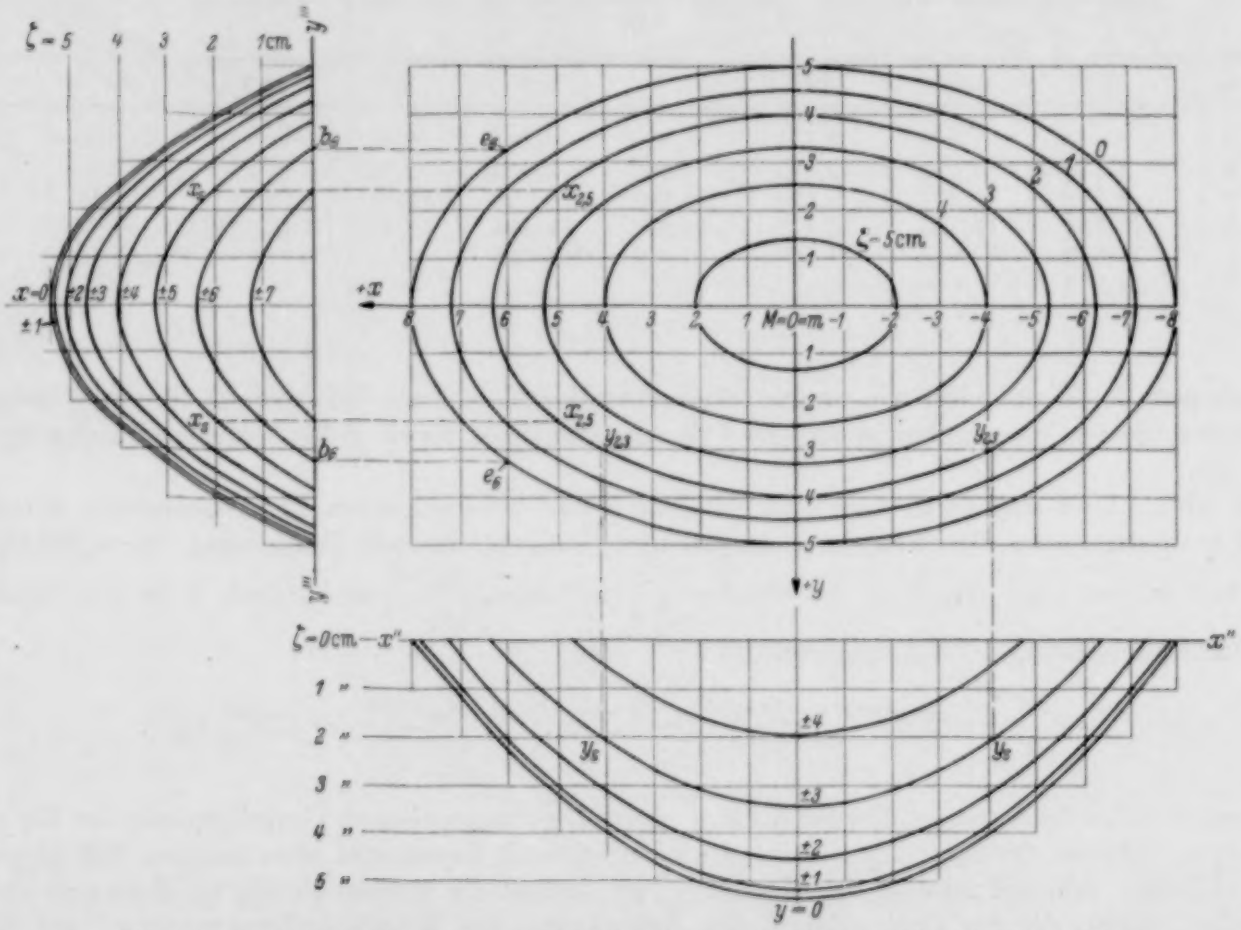


Abb. 4. Die nach Tabelle 2 gezeichneten Wölblinien des Geschwindigkeitsreliefs und die Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes im Beispiel 1.

der Zeichnung zur Darstellung bringt, und zwar deshalb, um die Ergebnisse von den Konstanten $\varkappa/\gamma$ der jeweiligen Strömungsflüssigkeit und der Rohrlänge l unabhängig zu machen, d. h. sie für verschiedene Wahl dieser Größen ausnutzen zu können. Fast immer wurde die Konstante e zu

$$e = \frac{10^{\mathrm{cm}^3}}{1^{\mathrm{cm}}} = 10^{\mathrm{cm}^3/\mathrm{cm}}\,; \left(\frac{\varkappa \cdot v \cdot l}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm}^3} = e^{\mathrm{cm}^3} \cdot \zeta^{\mathrm{cm}} = 10^{\mathrm{cm}^3} \cdot \zeta^{\mathrm{cm}} \tag{67}$$

gewählt. Nach (54b) ergeben sich nun die Halbachsen a_v und b_v der elliptischen Höhenlinien mittels der Konstanten k in (54a) und e in (67) zu:

$$a_v = a\sqrt{1 - \frac{e\,\zeta}{k}} = 8\sqrt{1 - 0{,}1855\,\zeta}\,; \quad b_v = b\sqrt{1 - \frac{e\,\zeta}{k}} = 5 \cdot \sqrt{1 - 0{,}1855\,\zeta}\,; \quad \zeta \text{ in cm};$$

Z. B. folgt für $\zeta = 4$ cm: $a_v = 4{,}06$ cm; $b_v = 2{,}54$ cm, ohne erkennbaren Fehler gegenüber der Zeichnung.

Die Konstruktion der Punkte der Höhenlinie, die z. B. durch die Ebene $\zeta = 2$ cm aus dem Geschwindigkeitsrelief ausgeschnitten wird, ist für die Ebene $x = +5$ cm mittels der Wölblinienschnittpunkte x_s und ihre Projektionen auf die Gerade $x = +5$ cm, die die gesuchten Punkte $x_{2.5}$ liefern, ersichtlich gemacht. Ebenso erkennt man die Konstruktion der zur Wölblinie $x = \pm 6$ cm gehörigen Basispunkte b_6 aus den Schnittpunkten e_6 der Randellipse mit den Geraden $x = \pm 6$ cm. Analog wurden die Punkte $y_{2,3}$ derselben Höhenlinie aus dem Schnittpunkt y_s der Spur $\zeta = 2$ mit der Wölblinie $y = \pm 3$ ermittelt.

Ganz analog wurde in Abb. 5 das zugehörige Schubspannungsrelief konstruiert.

Zuvor wurde gemäß (55b) die Funktion

$$\psi(x, y) = h\,\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = 2\,k\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}^{\mathrm{cm}^3} = 107{,}865 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4096} + \frac{y^2}{625}}^{\mathrm{cm}^3} = \left(\frac{\tau\, l}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm}^3} \tag{68}$$

in Tabelle 3 für die innerhalb der Querschnittsellipse liegenden Gitterpunkte, deren Koordinaten in Tabelle 3 oben und links angegeben sind, berechnet. Sodann berechnet man die Projektionen der

Tabelle 3. *Die nach Gleichung (68) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l \cdot \tau(x, y)}{\gamma}$ *cm² im Beispiel 1. (Man vgl. Abb. 5.)*

y \ x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8
0	0	1,685	3,371	5,056	6,742	8,427	10,112	11,798	13,483
±1	4,315	4,632	5,475	6,647	8,004	9,467	11,210	12,562	—
±2	8,629	8,792	9,264	10,001	10,950	12,061	13,294	14,617	—
±3	12,944	13,053	13,375	13,896	14,594	15,445	16,426	—	—
±4	17,258	17,341	17,585	17,984	18,528	—	—	—	—
±5	21,573	—	—	—	—	—	—	—	—

Raumkurve der Wandschubspannung τ_w nach derselben Gleichung (68), jedoch für die Randpunkte der Querschnittsellipse, wobei in Tabelle 4 die ganzzahligen Werte x die betreffenden Randpunkte festlegen.

In Abb. 5 sind nun diese nach den Tabellen 3 und 4 berechneten Funktionswerte mittels der ihnen proportionalen Strecken η cm aufgetragen worden, die mit Benutzung eines f-Maßstabes ermittelt worden sind, der f cm² der Größen $\left(\frac{\tau\, l}{\gamma}\right)$ cm² bzw. $\left(\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma}\right)$ cm² durch 1 cm der Zeichnung zur Darstellung bringt. Es wurde gewählt:

$$f = \frac{10^{\mathrm{cm}^3}}{4^{\mathrm{cm}}} = 2{,}5^{\mathrm{cm}^3/\mathrm{cm}}\,; \left(\frac{\tau\, l}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm}^3} = 2{,}5^{\mathrm{cm}} \cdot \eta^{\mathrm{cm}}\,; \left(\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm}^3} = 2{,}5^{\mathrm{cm}} \cdot \eta_w^{\mathrm{cm}}\,. \tag{69}$$

Man erkennt im Auf- wie im Kreuzriß die nach (55f, g) angegebenen Geradenpaare der für $y_1 = 0$ bzw. $x_1 = 0$ degenerierenden Hyperbeln, die auch zugleich Asymtoten aller anderen Riß-Hyperbeln sind. Ebenso erkennt man in der Kontur η_w im Aufriß die Ellipse (56a), im Kreuzriß aber die Hyperbel (56b), die die Projektionen der Raumkurve der Wandschubspannung τ_w auf die betreffenden Rißebenen darstellen. Im Aufriß der Abb. 5 ist ferner für die Wölblinie $y = \pm 3$ cm die

Konstruktion der beiden Randpunkte t_3 auf η_w durch Projektion der Schnittpunkte s_3 der Randellipse mit der Geraden $y = \pm 3$ auf die η_w-Ellipse noch besonders kenntlich gemacht. Die Konstruktion des Höhenlinienplanes verläuft im übrigen völlig analog zu der der Abb. 4. Hierbei wurden, um die Figur nicht zu sehr zu überlasten, die Abstände der Schichtenebenen mit $\eta = 1{,}6$ cm, von $\eta = 0$ beginnend, angenommen. Mit $f = 2{,}5$ cm in (69) und den angenommenen Werten für a, b, h findet man z. B. für $\eta = 4{,}8$ cm die Halbachsen a_τ, b_τ der zugehörigen Höhenlinienellipse nach (55c) zu:

$$a_\tau^{\text{cm}} = \frac{\eta \cdot f}{h} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{4{,}8 \cdot 2{,}5}{6} \cdot \frac{89}{25} = 7{,}125^{\text{cm}};$$

$$b_\tau^{\text{cm}} = \frac{\eta \cdot f}{h} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 2{,}78^{\text{cm}}.$$

Fast genau dieselben Werte (7,2 cm, 2,75 cm) liest man aus Abb. 5 ab.

Tabelle 4. *Die nach Gleichung (68) für die Randpunkte der Querschnittsellipse mit den am linken Rand angegebenen Koordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l\,\tau_w(x)^{\text{cm}^3}}{\gamma}$ *im Beispiel 1. (Man vgl. Abb. 5.)*

x^{cm}	y^{cm}	$\frac{\tau_w\, l\,\text{cm}^3}{\gamma}$
0	±5	21,573
±1	±4,961	21,470
±2	±4,841	21,158
±3	±4,635	20,628
±4	±4,330	19,862
±5	±3,903	18,831
±6	±3,307	17,489
±7	±2,421	15,756
±8	0	13,483

Charakteristisch für die Höhenlinien des Schubspannungsreliefs ist, daß sie nicht nur als geschlossene Kurven ganz im Innern der Querschnittsellipse verlaufen, sondern auch den Rand derselben schneiden können, wobei natürlich die Teile außerhalb der Querschnittsellipse keine physikalische Bedeutung besitzen. Diese Erscheinung wiederholt sich in anderen Fällen ebenso. Stets aber fällt der Senkenpunkt des Schubspannungsreliefs mit dem Scheitelpunkt des Geschwindigkeitsreliefs zusammen.

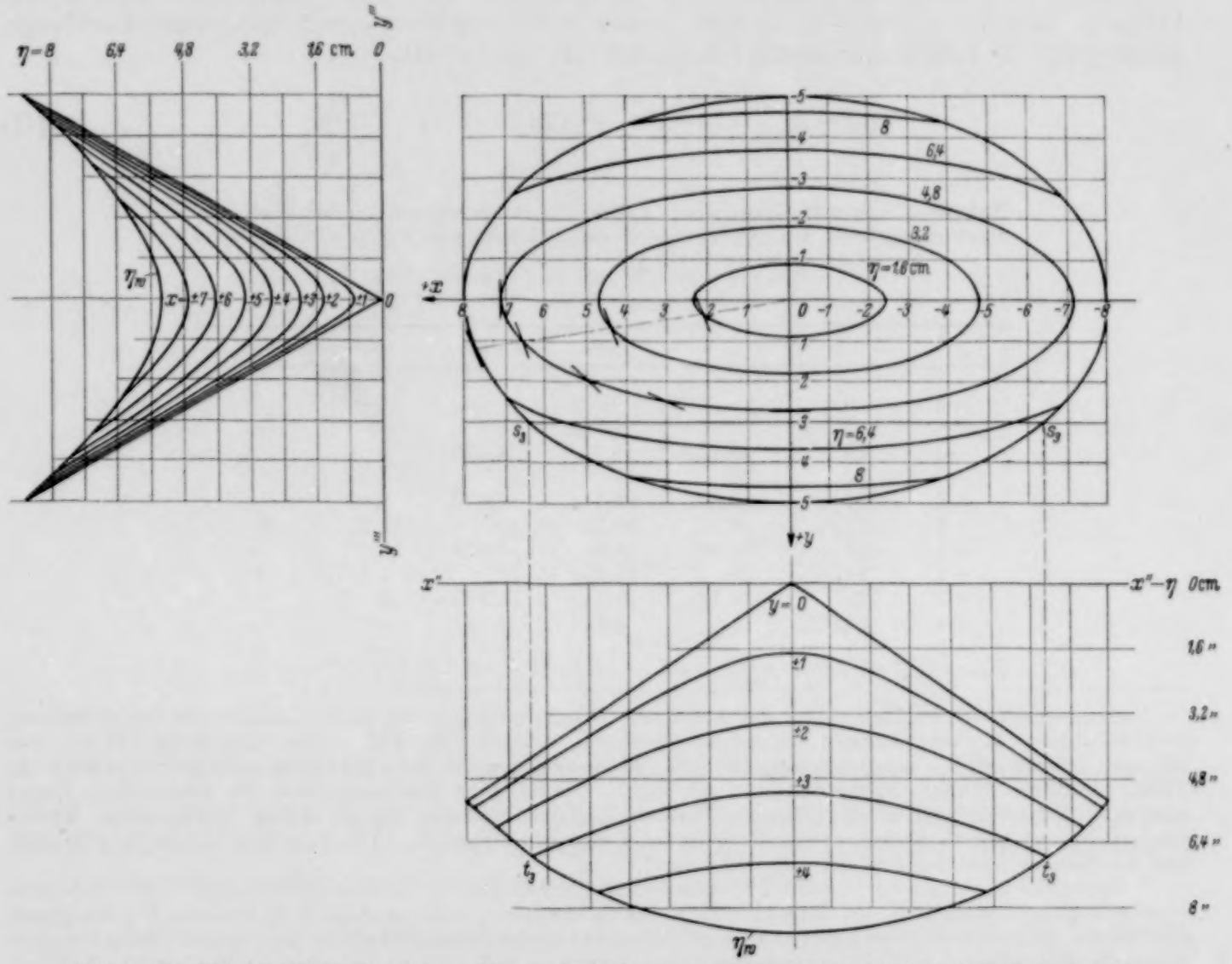


Abb. 5. Die nach den Tabellen 3 und 4 gezeichneten Wölblinien des Schubspannungsreliefs und Projektionen des Verlaufs der Wandschubspannung samt der Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes im Beispiel 1.

Die Spuren der Wirkungsebenen der Schubspannungen bestimmt man nach Gleichung (50a), die sich im vorliegenden Falle konstanten Überdruckes (h sehr groß) zu

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} = -\frac{25}{64}\cdot\frac{x}{y} \tag{70}$$

vereinfacht. Der Vergleich von (70) mit (50b) zeigt, daß die Spurenelemente aller Punkte eines Strahles durch 0 untereinander und daher auch zum Spurenelement des Schnittpunktes dieses Strahles mit der Querschnittsellipse parallel sind. In Abb. 5 ist dies für einen Strahl angedeutet. Alle Punkte der Ordinatenachse $x = 0$ haben somit ($\chi = 0$) Spurenelemente parallel zur x-Achse, alle Punkte der Abszissenachse $y = 0$ $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$ parallel zur y-Achse.

Im positiven Quadranten der Höhenlinie $\eta = 4{,}8$ cm ergeben sich nach (70) für die Punkte mit den der Zeichnung entnommenen Koordinaten (die also nur ungefähr die Ellipse (55c) erfüllen) beispielsweise folgende Winkel χ:

y^{cm}	x^{cm}	$\operatorname{tg}\chi$
+1	+6,65	—2,6
+2	5,00	—0,978
+2,5	3,00	—0,469.

Die Richtungen dieser Spurenelemente sind für die in diesem Schema angegebenen Punkte dieser Höhenellipse samt den Spurenelementen der beiden Ellipsenscheitelpunkte in Abb. 5 eingezeichnet worden. Als Größtwert der Schubspannung findet man aus den Tabellen 3 oder 4 für $x = 0$, $y = \pm 5$, also an den Endpunkten der kleinen Halbachse $\tau_{max} = 21{,}573\,\gamma/l$ kp/cm².[1]

Beispiel 2. Strömung durch ein kreisförmiges Rohr bei statischer Druckverteilung. Es sei: $h = r_a = 5$ cm, so daß die obere Kreistangente zugleich Spiegelverschneidungsgerade g ist.[2] In Tabelle 5 ist analog (66) gemäß (57a) die Funktion

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{8}(25 - x^2 - y^2)(10 + y) = \left(\frac{\varkappa\cdot v\cdot l}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm}^3} \tag{71}$$

Tabelle 5. *Die nach Gleichung (71) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{\varkappa\cdot l}{\gamma}\cdot v(x,y)^{\mathrm{cm}^3}$ *im Beispiel 2. (Man vgl. Abb. 6.)*

y \ x	0	±1	±2	±3	±4	±5
—5	0	—	—	—	—	—
—4	7,875	7	4,375	0	—	—
—3	14	13,125	10,5	6,125	0	—
—2	21	20	17	12	5	—
—1	27	25,875	22,5	16,875	9	—
0	31,25	30	26,25	20	11,25	0
+1	33	31,625	27,5	20,625	11	—
+2	31,5	30	25,25	18	7,5	—
+3	26	24,375	19,5	11,375	0	—
+4	14,625	13	8,125	0	—	—
+5	0	—	—	—	—	—

[1] Man bemerkt die Analogie dieses Falles mit dem Torsionsproblem von Stäben elliptischen Querschnittes. Man vgl. hierzu *J. Szabó*, Höhere Technische Mechanik, 1956, S. 250—252, insbes. Gleichung (14,25), aus der man erkennt, daß das Drehmoment M_t dem Wölbhügelvolumen V in (14) proportional ist. Ferner *F. Tölke*, Baustatik, Winters Studienführer, 1949, insbes. Nr. 86: Das Torsionsproblem bei elliptischem Querschnitt, S. 201—203, und *M. M. Filonenko-Boroditsch*, Festigkeitslehre Bd. II, 1952, S. 285—288. Insbesondere aber vgl. man *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 1939, S. 112—117 und S. 192—203 und die Bemerkungen bei Fußnote 1 S. 119 dieser Arbeit.

[2] Dieser Fall wurde in der in Fußnote 1 S. 120 genannten Arbeit hinsichtlich des Geschwindigkeitsreliefs bereits — allerdings rein analytisch — behandelt. Z. B. der Höhenlinie $\alpha = 2$ der Abb. 2, S. 364 a. a. O., die durch den Membranmittelpunkt (also hier den Kreismittelpunkt) hindurchgeht, würde in der jetzigen Bezeichnungsweise die Höhenlinie $\zeta = 3{,}125$ entsprechen. Dort war $\alpha_{max} = 2{,}1126$, daher $w_{max} = 10 \cdot 1{,}0563 \cdot 3{,}125 = 10 \cdot 3{,}3009 = 33$ in Übereinstimmung mit Tabelle 5 für $x = 0$, $y = +1$.

für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Koordinaten x, y der im Kreisquerschnitt des Rohres liegenden Gitterpunkte berechnet worden. Dann ist mittels der Maßstabskonstanten analog (67):

$$e = 10 \text{ cm}^3/\text{cm}$$

in Abb. 6 das Geschwindigkeitsrelief mit den dort angegebenen ganzzahligen ζ-Werten genau so konstruiert worden, wie dies in Abb. 4 erklärt worden ist. Zieht man im Kreuzriß an die Wölblinie $x = 0$ die zur y-Achse parallele Tangente und lotet den Berührungspunkt auf die Ordinatenachse $x = 0$, so erhält man den Ort des Wölbscheitels m. Man kann diesen Ort, d. h. seine Ordinate y_m auch nach (23) berechnen und erhält für $h = r_a = 5$ cm

$$y_m = \frac{5}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right) = 1{,}076^{\text{cm}}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem zeichnerischen Ergebnis. Schließlich erhält man nach (38a, b) für die Koordinaten des Druckmittelpunktes M mit $\alpha = 0$, $a = b = h = 5$ cm:

$$x_M = 0; \qquad y_M = 1{,}25^{\text{cm}}.$$

In Abb. 6 ist der Druckmittelpunkt M eingezeichnet. Er liegt tiefer als der Wölbscheitel m. Man erkennt im Aufriß von Abb. 6 die in (57c) angegebene Parabelschar und im Kreuzriß die durch

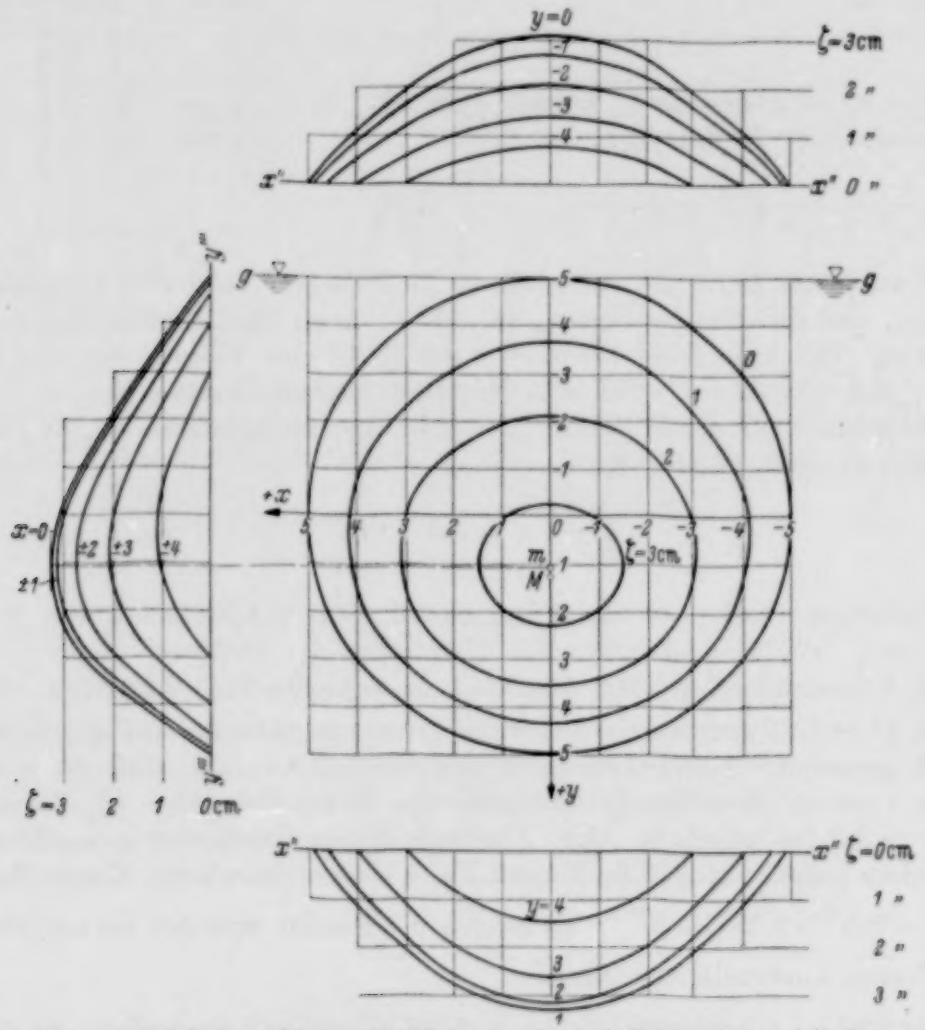


Abb. 6. Die nach Tabelle 5 gezeichneten Wölblinien des Geschwindigkeitsreliefs und die Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes im Beispiel 2.

(57d) dargestellte Schar kubischer Parabeln. Aus Abb. 6 entnimmt man $v_{max} = 33 \frac{\gamma}{\varkappa \cdot l}$ cm/sec.

Die Wölblinien des Aufrisses, die nach (57c) Parabeln sind, wurden, wie im Abschnitt 6 angegeben, zwecks Erhöhung der Übersichtlichkeit in zwei Gruppen getrennt gezeichnet. Zwecks Entwurfes des Schubspannungsreliefs wurde zunächst nach (58) die Funktion

$$\frac{l \cdot \tau(x,y)}{\gamma} = \psi(x,y) = \frac{1}{8}\sqrt{(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)\left[4(10+y)^2 + 4y(10+y) - 50\right] - 100\,y(10+y) + 625} \tag{72}$$

wie früher für die innerhalb des Kreisquerschnitts liegenden Gitterpunkte in Tabelle 6 berechnet. Ebenso wurde in Tabelle 7 dieselbe Funktion ψ für die Randpunkte des Kreisquerschnittes, für

Tabelle 6. *Die nach Gleichung (72) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l \cdot \tau(x,y)^{cm^3}}{\gamma}$ *im Beispiel 2. (Man vgl. Abb. 7.)*

y \ x	0	±1	±2	±3	±4	±5
−5	6,25	—	—	—	—	—
−4	7,125	7,159	7,510	7,5	—	—
−3	7,25	7,337	7,603	8,067	8,75	—
−2	6,625	6,801	7,315	8,139	9,241	—
−1	5,25	5,597	6,543	7,911	9,569	—
0	3,125	3,905	5,647	7,762	10,063	12,5
+1	0,25	2,753	5,506	8,296	11,138	—
+2	3,375	4,610	7,143	10,062	13,149	—
+3	7,750	8,519	10,503	13,184	16,25	—
+4	12,875	13,463	15,212	17,5	—	—
+5	18,75	—	—	—	—	—

Tabelle 7. *Die nach Gleichung (72a) für die Randpunkte des Querschnittskreises mit den am linken Tabellenrand angegebenen Koordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l\,\tau_w(y)^{cm^3}}{\gamma}$ *im Beispiel 2. (Man vgl. Abb. 7.)*

y^{cm}	x^{cm}	$\frac{\tau_w\, l^{cm^3}}{\gamma}$
−5	0	6,25
−4,899	±1	6,376
−4,583	±2	6,772
−4	±3	7,5
−3	±4	8,75
−2	±4,583	10
−1	±4,899	11,25
0	±5	12,5
+1	±4,899	13,75
+2	±4,583	15
+3	±4	16,25
+4	±3	17,5
+4,583	±2	18,228
+4,899	±1	18,624
+5	0	18,75

die aber $x^2 + y^2 = 25$ ist, berechnet. Damit geht sie über in die viel einfachere Beziehung:

$$\frac{l \cdot \tau_w}{\gamma} = \frac{5}{4}(10 + y), \qquad (72a)$$

die man sogleich auch aus (59a) erhalten hätte. In Tabelle 7 sind alle ganzzahligen Werte von x, y berücksichtigt, um die Randkurven η_w in Abb. 7 auch für Punkte dieser Ordinaten leicht zeichnen zu können. Die Aufrißprojektion ist nach (59b) eine Ellipse mit den Halbachsen $a_1 = r_a = 5$ cm; $b_1 = r_a^2/4\,h = 1{,}25$ cm[1] und den Mittelpunktskoordinaten $x = 0$, $y = r_a/2 = 2{,}5$ cm.

Als Maßstabskonstante für die Zeichnung des Schubspannungsreliefs wurde $f = 10\ cm^2/4\ cm = 2{,}5\ cm^2/cm$ gewählt, so daß gemäß (69)

$$\left(\frac{\tau\, l}{\gamma}\right)^{cm^3} = 2{,}5^{cm} \cdot \eta^{cm}$$

wird. Die Schichtebenen wurden — von 0 beginnend — in η-Abständen von je 0,8 cm gewählt. Die Spur der Ebene $\eta = 3{,}2$ cm schneidet die Wölblinien des Aufrisses $y = 0, -1, -2, -3, -4$ in ziemlich dicht beieinanderliegenden Punkten in schleifenden Schnitten. In verdoppeltem Ordinatenmaßstab ($\bar{f} = 1{,}25$ cm) wurde daher die Schnittpunktreihe auf der Geraden $\bar{\eta} = 6{,}4$ cm nochmals deutlich gemacht, wobei man noch den Vorteil erreicht, daß die η_w-Ellipse in einen Kreis vom Radius 5 cm mit der Mittelpunktshöhe von 10 cm übergeht. ($\bar{\eta}_w$-Kreis der Zeichnung.) Die Höhenlinie $\eta = 3{,}2$ cm wurde in Abb. 7 mittels dieser deutlicher gemachten Schnittpunkte gezeichnet. Trotzdem empfiehlt sich in diesem Falle eine rechnerische Kontrolle nach Gleichung (58a). Es ist $\frac{\tau\, l}{\gamma} = 2{,}5^{cm} \cdot 3{,}2^{cm} = 8^{cm^2}$. Es mögen die Punkte mit den im nachstehenden Schema angegebenen y-Werten kontrolliert werden.

y^{cm}	x^{cm}	tg χ
−3	±2,879	+0,811
−2,5	±2,784	+0,861
−2	±2,853	+1,018
−1	±3,058	+1,686
0	±3,102	+4,030

[1] Nach (55e) ist $\left(\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma}\right)^{cm^3} = t_w \cdot h = f \cdot \eta$, somit $\eta = t_w \cdot \frac{h}{f} = t_w \cdot \frac{5}{2{,}5} = 2\,t_w$, d. h. alle t_w Werte erscheinen in der Zeichnung, in welcher η_w statt t_w aufgetragen ist, verdoppelt. Daher hat der Ellipsenmittelpunkt die η_w-Ordinate 5 cm und die kleine Halbachse b_1 in der Zeichnung den Wert 2,5 cm.

Die Abweichungen der Zeichnung liegen an der Grenze der Zeichengenauigkeit. Der Bildpunkt $\mu = 1$, $\nu = 1$ dieses Falles befindet sich in Abb. 3 tatsächlich im nicht schraffierten Gebiet (Punkt K), wie es der monoton vom oberen zum unteren Scheitelpunkt des Kreises — nach einem

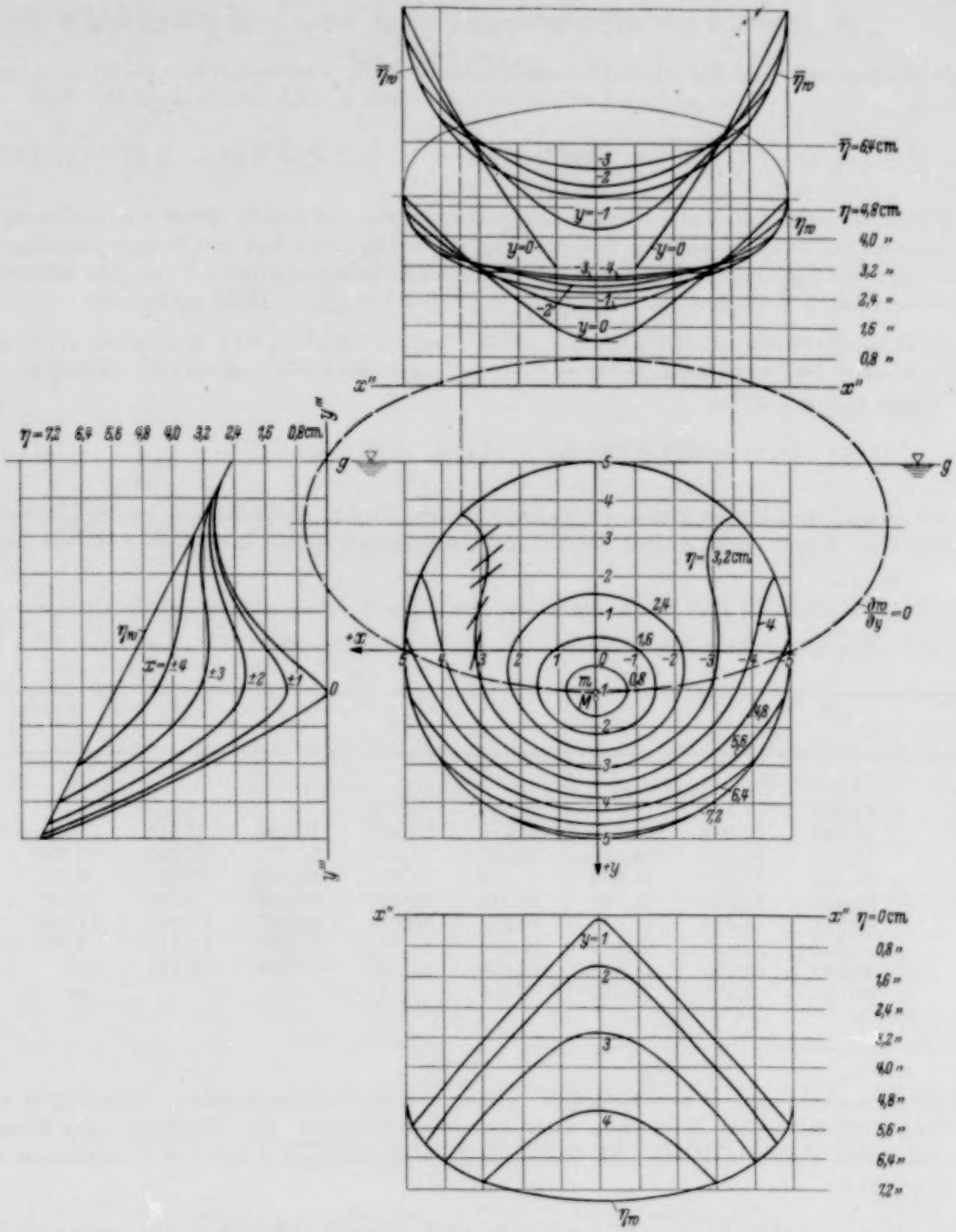


Abb. 7. Die nach den Tabellen 6 und 7 gezeichneten Wölblinien des Schubspannungsreliefs und Projektionen des Verlaufs der Wandschubspannung samt der Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes im Beispiel 2.

cos-Gesetz ansteigenden — Wandschubspannung entspricht, die sonst auf dem Kreisumfang kein Extremum besitzt. Die Richtungen der Spurenelemente der Ebenen, in denen die Schubspannungen wirksam sind, findet man wieder nach Gleichung (50a), die in dem vorliegenden Falle die Form annimmt:

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{2x(2h+y)}{2y(2h+y)-(r_a^2-x^2-y^2)} = -\frac{2x(10+y)}{2y(10+y)-(25-x^2-y^2)}\,. \tag{73}$$

Im obigen Schema sind auch die nach (73) berechneten Werte von $\operatorname{tg}\chi$ eingetragen und in Abb. 7 sind für die betreffenden Punkte der Schichte $\eta = 3{,}2$ cm auch die Richtungen der Spurenelemente eingezeichnet worden.

Dort ist auch die Ellipse $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ eingezeichnet worden, deren Schnitt mit der Ordinatenachse gemäß Gleichung (23) den Punkt m (Senke) ergab. Ihre Gleichung folgt aus (19a) mit $a = b = r_a$, $\alpha = 0$ zu

$$x^2 + 3\,y^2 + 4\,h\,y - r_a^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^2 + 3\,y^2 + 20\,y - 25 = 0$$

somit als Ellipse mit den Mittelpunktskoordinaten $x = 0$; $y = -2/3\,h = -10/3$ cm und den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{r_a^2 + \frac{4}{3}h^2} = \frac{5}{3}\sqrt{21}^{\text{cm}} = 7{,}638^{\text{cm}} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3\,r_a^2 + 4\,h^2} = \frac{5}{3}\sqrt{7} = 4{,}410^{\text{cm}}\,.$$

Diese Ellipse verbindet somit alle Punkte des Querschnittes, für welche durch sie hindurchgehende Ebenen parallel zur x-Achse und zur Strömungsgeschwindigkeit v frei von Schubspannungen sind. Als Größtwert der Schubspannung findet man aus den Tabellen 6 oder 7 für den unteren Endpunkt des vertikalen Kreisdurchmessers ($x = 0$, $y = +5$): $\tau_{max} = 18{,}75\,\gamma/l$ kp/cm².

Beispiel 3. Strömung durch ein elliptisches Rohr mit horizontaler großer Halbachse und bei statischer Druckverteilung. Es sei $a = 8$ cm; $b = 5$ cm: $h = 6$ cm; $\alpha = 0°$. Dann ist nach (60a)

$$\varphi(x, y) = 800 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25}\right) \cdot \left(\frac{6}{89} + \frac{y}{217}\right) = \frac{\varkappa \cdot v(x,y) \cdot l}{\gamma}\,. \tag{74}$$

Für die am oberen und linken Rand der Tabelle 8 angegebenen Koordinaten wurde (74) berechnet und in Abb. 8 im Kreuz- und Aufriß wie früher ausgewertet, wobei die Wölblinien des Aufrisses,

Tabelle 8. *Die nach Gleichung (74) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{\varkappa \cdot l}{\gamma} \cdot v(x, y)^{\text{cm}^3}$ *im Beispiel 3. (Man vgl. Abb. 8.)*

y^{cm} \ x^{cm}	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8
−5	0	—	—	—	—	—	—	—	—
−4	14,107	13,495	11,658	8,596	4,310	—	—	—	—
−3	27,439	26,769	24,759	21,410	16,720	10,691	3,323	—	—
−2	39,110	38,382	36,200	32,562	27,470	20,923	12,920	3,463	—
−1	48,236	47,451	45,096	41,170	35,675	28,609	19,973	9,767	—
0	53,933	53,090	50,562	46,348	40,449	32,865	23,596	12,640	0
+1	55,314	54,414	51,713	47,212	40,910	32,807	22,904	11,200	—
+2	51,497	50,539	47,665	42,876	36,170	27,549	17,012	4,560	—
+3	41,595	40,580	37,533	32,456	25,347	16,208	5,037	—	—
+4	24,724	23,651	20,432	15,066	7,555	—	—	—	—
+5	0	—	—	—	—	—	—	—	—

die nach (60c) Parabeln sind, in zwei Gruppen, wie im 6. Abschnitt angegeben, aufgetragen wurden, um die Übersichtlichkeit der Zeichnung nicht zu beeinträchtigen. Die Wölblinien des Kreuzrisses sind die kubischen Parabeln (60d). Als Maßstab und als Distanz d der Schichtenebenen wurden in Abb. 8 gewählt:

$$e = 10^{\text{cm}^3/\text{cm}}\,; \quad \left(\frac{\varkappa \cdot v \cdot l}{\gamma}\right)^{\text{cm}^3} = e^{\text{cm}^2} \cdot \zeta^{\text{cm}}\,; \quad d = 1^{\text{cm}}$$

Die Konstruktion der Schichtenlinien im Grundriß erfolgt genau so wie in Abb. 4. Zieht man im Kreuzriß wieder an die Wölblinie $x = 0$ die Tangente und lotet den Berührungspunkt auf die Ordinatenachse (strichlierter Ordner in Abb. 8), so erhält man den Ort m des Wölbscheitels, also den Ort von v_{max}, der sich nach (22a) auch direkt zu

$$y_m = 0{,}790 \text{ cm}$$

berechnen läßt. Die Übereinstimmung mit dem Zeichenergebnis ist ausgezeichnet. Für v_{max} selbst erhält man aus dem Kreuzriß der Abb. 8 in guter Näherung:

$$v_{max} = 55{,}6\,\frac{\gamma}{\varkappa \cdot l}\ \text{cm/sec}\,,$$

wozu die Tabelle 8 für $x = 0$, $y = +1$ die sehr gute Näherung 55,3 $\frac{\gamma}{\varkappa \cdot l}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ liefert. Die nach (32) nicht zerfallende Ellipse $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ wurde in Abb. 8 nicht eingezeichnet. Hingegen ist dort der Druckmittelpunkt M angegeben, dessen Ordinate y_M nach (38b) mit $\alpha = \Omega$ zu

$$y_M = 1{,}041 \text{ cm}$$

berechnet wird. M liegt wie in Abb. 6 tiefer als der Wölbscheitel m.

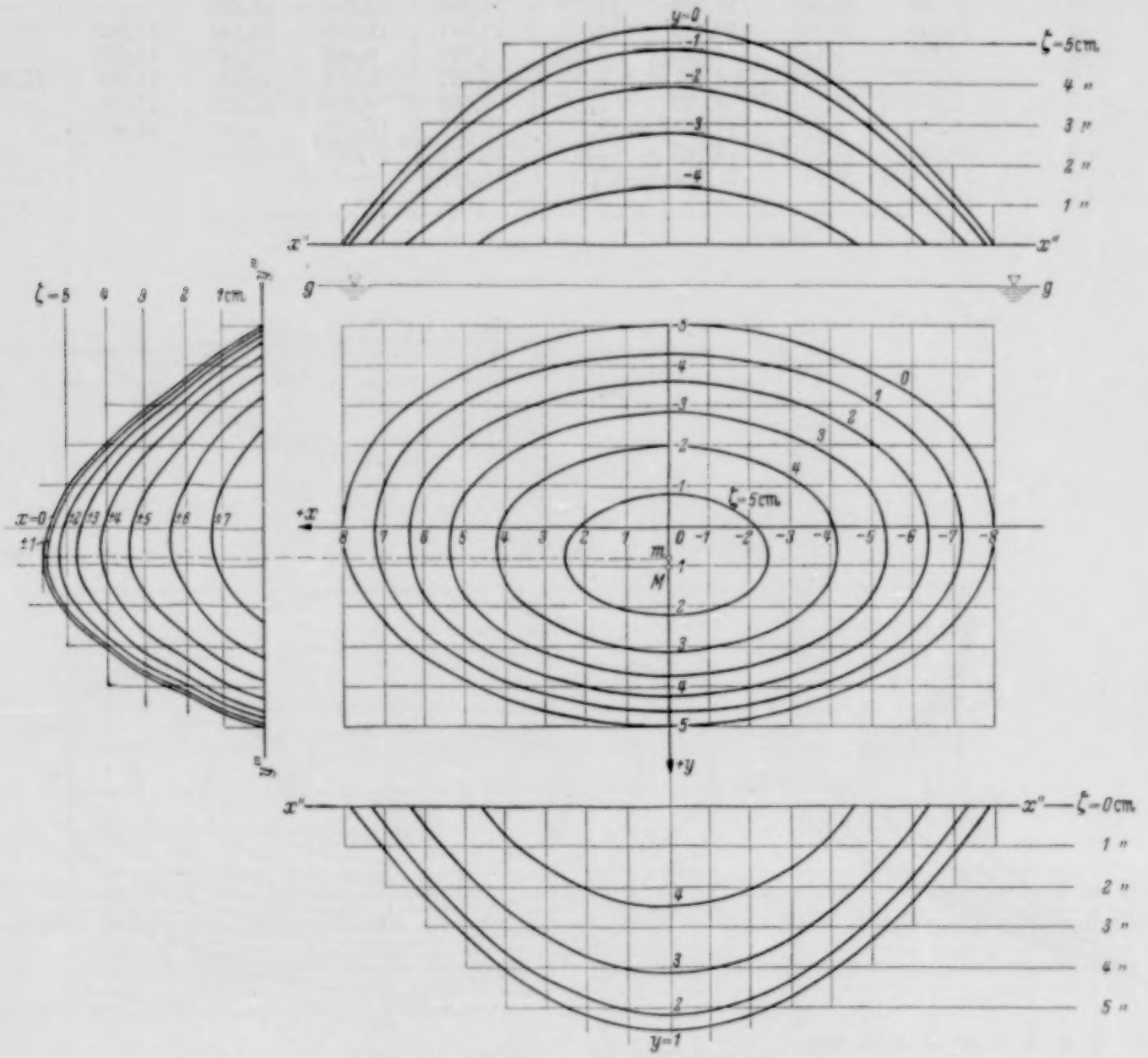


Abb. 8. Die nach Tabelle 8 gezeichneten Wölblinien des Geschwindigkeitsreliefs und die Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes im Beispiel 3.

Um auch das Schubspannungsrelief zeichnen zu können, wurde zunächst nach (61) die folgende Funktion in Tabelle 9 für die am oberen und linken Rande daselbst angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechnet:

$$\frac{l \cdot \tau(x,y)}{\gamma} = 800 \sqrt{4\left(\frac{6}{89}+\frac{y}{217}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4096}+\frac{y^2}{625}\right) + 4\left(\frac{6}{89}+\frac{y}{217}\right)\left(\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}-1\right) \cdot \frac{y}{25 \cdot 217} + \left(\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}-1\right)^2 \cdot \frac{1}{(217)^2}} \tag{75}$$

und dann daraus in Abb. 9 im Auf- und Grundriß mittels des Maßstabes

$$f = \frac{10^{\text{cm}^2/\text{cm}}}{3} = 3{,}333 \text{ cm} \; ; \; \left(\frac{\tau \cdot l}{\gamma}\right)^{\text{cm}^2} = 3{,}333^{\text{cm}} \cdot \eta^{\text{cm}} .$$

Tabelle 9. *Die nach Gleichung (75) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l \cdot \tau(x,y)^{cm^3}}{\gamma}$ *im Beispiel 3. (Man vgl. Abb. 9 und 10.)*

y^{cm} \ x^{cm}	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8
−5	14,200	—	—	—	—	—	—	—	—
−4	13,867	13,863	13,854	13,845	13,841	—	—	—	—
−3	12,649	12,662	12,704	12,779	12,894	13,058	13,284	—	—
−2	10,546	10,589	10,718	10,937	11,247	11,655	12,165	12,782	—
−1	5,356	5,545	6,080	6,890	7,903	9,066	10,347	11,725	—
0	3,687	4,001	4,828	5,967	7,287	8,721	10,240	11,829	13,483
+1	1,070	2,125	3,829	5,631	7,473	9,346	11,252	13,192	—
+2	6,712	7,036	7,930	9,237	10,817	12,578	14,468	16,455	—
+3	13,239	13,451	14,068	15,046	16,325	17,849	19,570	—	—
+4	20,650	20,819	21,317	22,126	23,218	—	—	—	—
+5	28,946	—	—	—	—	—	—	—	—

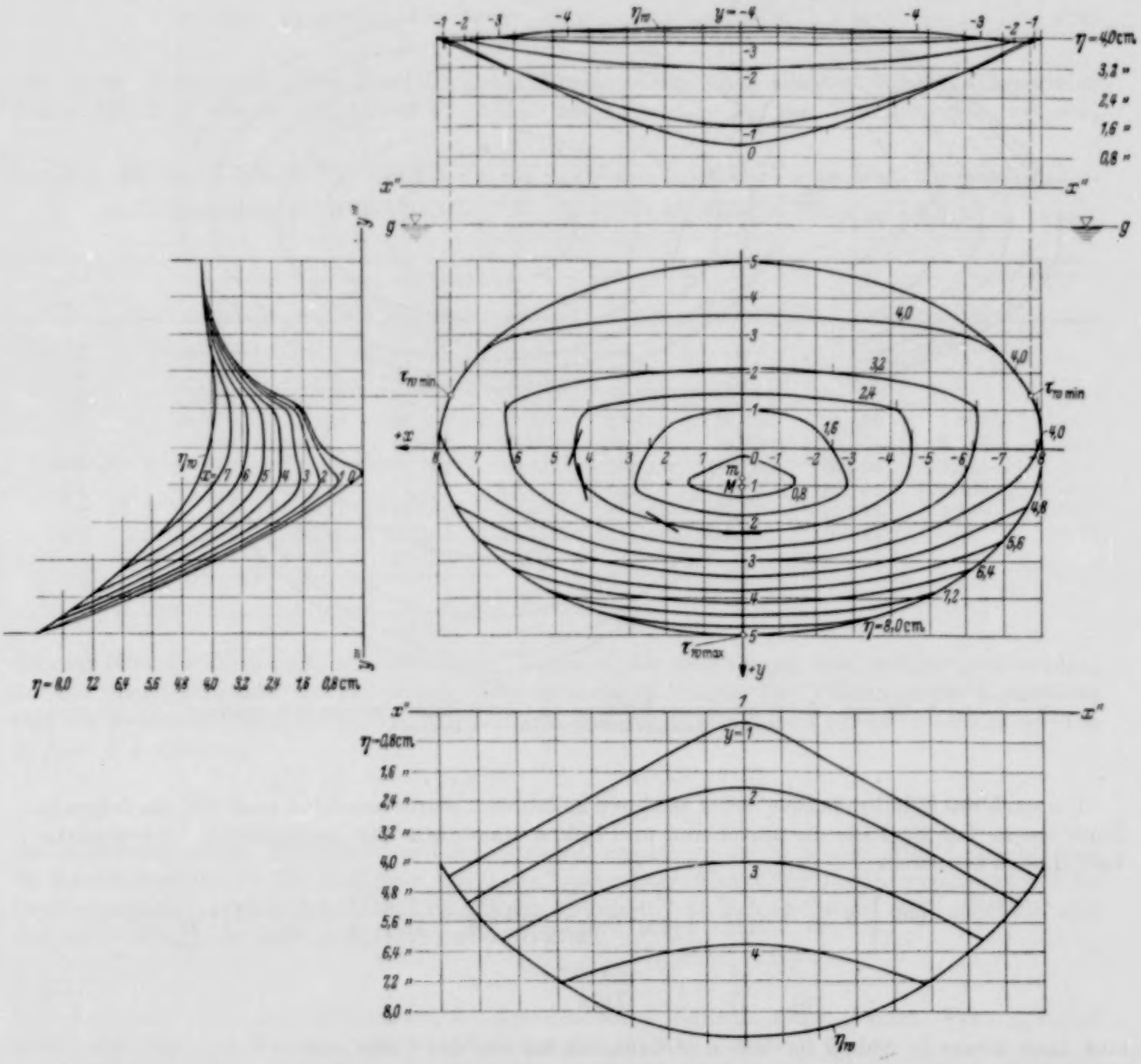


Abb. 9. Die nach den Tabellen 9 und 10 gezeichneten Wölblinien des Schubspannungsreliefs und Projektionen des Verlaufs der Wandschubspannung samt der Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes im Beispiel 3. Im Kreuzrisse wurden bei den Wölblinien $x = 7cm$ usw. die doppelten Vorzeichen wegen Raummangel fortgelassen.

die Konstruktion der Wölblinien vorgenommen. Ebenso wurde gemäß Gleichung (62) in Tabelle 10 die Funktion $\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma}$ nach der Formel:

$$\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma} = 1600\left(\frac{6}{89} + \frac{y}{217}\right)\sqrt{\frac{x^2}{4096} + \frac{y^2}{625}} \quad \text{mit} \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} \doteq 1 \tag{75a}$$

berechnet und in Abb. 9 im Auf- und Kreuzriß mittels des gewählten f-Maßstabes aufgetragen (η_w-Linie). Als Distanz der Höhenebenen wurde — von 0 beginnend — wieder 0,8 cm gewählt.

Tabelle 10. *Die nach Gleichung (75a) für die Randpunkte der Querschnittsellipse mit den am linken Tabellenrand angegebenen Koordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l \cdot \tau_w}{\gamma}^{\text{cm}^3}$ *im Beispiel 3.*

(Man vgl. Abb. 9 und 10.)

x^{cm}	y^{cm}	$\frac{\tau_w\, l}{\gamma}^{\text{cm}^3}$
0	—5	14,200
1	—4,961	14,190
2	—4,841	14,156
3	—4,635	14,092
4	—4,330	13,983
5	—3,903	13,807
6	—3,307	13,535
7	—2,421	13,149
7,52	—1,341	$12{,}916 = \left(\frac{\tau_w\, l}{\gamma}\right)_{\min}$
8	0	13,483
7	+2,421	18,364
6	+3,307	21,443
5	+3,903	23,855
4	+4,330	25,741
3	+4,635	27,164
2	+4,841	28,160
1	+4,961	28,751
0	+5	28,946

Die Konstruktion des Schubspannungsreliefs und seiner Schichtenlinien erfolgt so wie in den früheren Beispielen. Man erkennt aus Tabelle 10, daß in der Nähe des Randpunktes $x = 7$, $y = -2{,}421$ ein Minimum von $\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma}$ existiert. Die genauere Berechnung nach (75a) ergibt dieses für $y = -1{,}341$ cm und (75a) ergibt hierzu

$$\tau_{w\,min} = 12{,}916 \cdot \frac{\gamma}{l}\ \text{kp/cm}^2, \quad \text{somit} \quad \eta_{min} = 12{,}916 \cdot \frac{3}{10} \doteq 3{,}875^{\text{cm}}\,.$$

Im Grundriß der Abb. 9 sind diese beiden Punkte mit $\tau_{w\,min}$ vermerkt. Tatsächlich liegt der Bildpunkt E des hier vorliegenden Strömungsproblems, der nach (64a, b) die Koordinaten

$$\mu = \frac{8}{5} = 1{,}6\,; \qquad \nu = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

besitzt, in dem durch Schraffur hervorgehobenen Felde der Abb. 3. Als maximalen Wandschubspannungswert und damit als Maximalwert aller Schubspannungen im durchströmten Gebiet entnimmt man aus den Tabellen 9 oder 10

$$\tau_{w\,max} = 28{,}946 \cdot \frac{\gamma}{l}\ \text{kp/cm}^2\,,$$

der erwartungsgemäß am unteren Endpunkt der kleinen Halbachse der Querschnittsellipse auftritt. Im Aufriß waren schleifende Schnitte nicht ganz zu vermeiden Man kann zu gewählten

y-Werten zur Kontrolle die zugehörigen x-Werte nach Gleichung (61a) genauer berechnen nach der Formel:

$$x^2 = -\left|2\left(\frac{1302}{89}+y\right)^2 + 2\left(\frac{1302}{89}+y\right)\frac{64}{25}y + 64\left(\frac{y^2}{25}-1\right)\right| \pm \sqrt{4\left(\frac{1302}{89}+y\right)^2\left|\left(\frac{1302}{89}+y\right)^2 + 2\left(\frac{1302}{89}+y\right)\cdot\frac{64}{25}\cdot y + 64\left(\frac{y^2}{25}-1\right)\right| + \frac{4\cdot(217)^2}{625}\cdot\frac{l^2\tau^2}{\gamma^2}}\ ; \quad (76)$$

Z. B. ergab sich ein schleifender Schnitt für $\eta = 3{,}2$ cm mit der Wölblinie $y = -2$ cm im Aufriß der Abb. 9. Hierfür ist in (76)

$$\frac{l\cdot\tau}{\gamma} = f\cdot\eta = \frac{10^{cm}}{3}\cdot 3{,}2 = 10{,}6^{cm^2}\ .$$

Mit diesem Wert ergibt (76) für $y = -2$ cm $x = 1{,}673$ cm, wogegen man aus der Zeichnung den sehr ungenauen Wert $x \approx 2$ cm abliest. Die Richtungen der Spuren der Wirkungsebenen der Schubspannungen bestimmt man wieder nach Gleichung (50a), die im vorliegenden Falle die einfache Gestalt:

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{\frac{2x}{a^2}\left(\frac{h}{a^2+b^2}+\frac{y}{3a^2+b^2}\right)}{\frac{2y}{b^2}\left(\frac{h}{a^2+b^2}+\frac{y}{3a^2+b^2}\right)+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\cdot\frac{1}{3a^2+b^2}} = -\frac{\frac{2x}{64}\left(\frac{6}{89}+\frac{y}{217}\right)}{\frac{2y}{25}\left(\frac{6}{89}+\frac{y}{217}\right)+\left(\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}-1\right)\cdot\frac{1}{217}} \quad (77)$$

annimmt. Für die nach (76) zu gewählten y-Werten berechneten x-Werte der Höhenlinie $\eta = 2{,}4$ cm, also $\frac{l\tau}{\gamma} = \frac{10^{cm}}{3}\cdot 2{,}4^{cm} = 8^{cm^2}$ wurden nach (77) die Spurenrichtungen tg χ berechnet und die Ergebnisse in folgendem Schema zusammengestellt:

y^{cm}	x^{cm}	tg χ
0	4,516	+3,030
+1	4,110	—3,880
+2	2,075	—0,571

Die Werte x stimmen ausgezeichnet mit den Zeichnungsgrößen überein. Die Richtungselemente der Spuren der Schubspannungswirkungsebenen wurden im Grundriß der Abb. 9 für die Schichtenlinie $\eta = 2{,}4$ cm für die im Schema durch ihre Koordinaten angegebenen Punkte eingezeichnet.

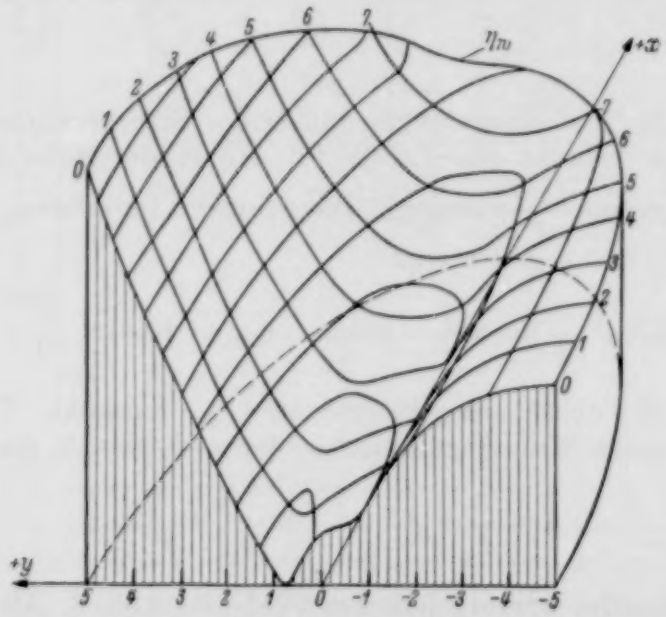


Abb. 10. Darstellung des Schubspannungsreliefs der Abb. 9 im Beispiel 3 in isometrischer schiefer Axonometrie. Es wurden nur die Höhenlinien und die Wölblinien des Kreuzrisses der Abb. 9 übernommen, um die Zeichnung nicht zu sehr zu überlasten. $\sphericalangle(+x, +y) = 120°$.

Um die Anschauung von der Gestalt des Schubspannungsreliefs noch weitergehend zu unterstützen, wurde dessen linke Hälfte aus Abb. 9 in Abb. 10 in klinogonaler isometrischer Axonometrie dargestellt, wobei nur die Wölblinien des Kreuzrisses und die horizontalen Höhenlinien übernommen

wurden, um die Abbildung nicht zu sehr zu überlasten. Aber auch so dürfte sie einen plastischen Eindruck von der Gestalt des Schubspannungsreliefs vermitteln.

Beispiel 4. Strömung durch ein elliptisches Rohr mit geneigter großer Halbachse und bei statischer Druckverteilung. Halbachsen und Tiefenlage wie bei Beispiel 3. $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $h = 6$ cm, $\alpha = 30°$; $\sin 30° = 0{,}5$; $\cos 30° = 0{,}86603$.

Man stellt zunächst fest, daß diese Annahmen der Vollbenetzungsbedingung (16) genügen. (Man vgl. Abb. 11.) Es ist nämlich nach (16):

$$36 > 64 \cdot 0{,}25 + 25 \cdot 0{,}75 = 34{,}75\,.$$

Dann ist nach (13a):

$$q(x,y) = 800\left(1 - \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25}\right)\left(\frac{6}{89} + \frac{0{,}86603}{217}\,y + \frac{0{,}5}{139}\,x\right) = \frac{\varkappa \cdot v(x,y) \cdot l}{\gamma}\,. \tag{78}$$

In Tabelle 11 ist (78) für die am oberen und linken Tabellenrand angegebenen Koordinaten der innerhalb des elliptischen Querschnittes befindlichen Gitterpunkte berechnet und in Abb. 11 wie früher ausgewertet worden. Zur Auftragung der Wölblinien wurde dabei der Maßstab

$$e = \frac{10^{\mathrm{cm^3/cm}}}{1} = 10\ \mathrm{cm^2}\,;$$

somit

$$\left(\frac{\varkappa \cdot l \cdot v}{\gamma}\right)^{\mathrm{cm^3}} = 10^{\mathrm{cm^2}} \cdot \zeta^{\mathrm{cm}}$$

gewählt. Als Distanz der Schichtenebenen wurde — von Null beginnend — 1 cm angenommen. Die Konstruktion des Höhenlinienplanes im Grundriß erfolgte dann aus den Wölblinien der beiden Auf- und Kreuzrisse wie in den früheren Fällen. Legt man an die am meisten abstehenden Wölblinien, also im Kreuzriß links an die Wölblinie $x = +1$ und im Aufriß unten an die Wölblinie $y = +1$ Tangenten und durch die Berührungspunkte achsenparallele Ordner (in Abb. 11 strichliert gezeichnet), so ergeben dieselben in ihrem Schnitt recht genau die ungefähre Lage des Wölbscheitels m. Eine vollkommenere Kontrolle seiner Lage ergibt sich durch Bestimmung und Zeichnung der beiden Kegelschnitte (18) und (19) und ihres in das Innere des Rohrquerschnittes fallenden Schnittpunktes. Zunächst ergibt sich nach den Gleichungen (26) und (30)

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{139}{217} \cdot \frac{5}{8 \cdot \sqrt{3}} = 0{,}231;$$

$$\alpha_1 \doteq 13°; 0'; 21''; \quad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = 3\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 0{,}693;$$

$$\alpha_2 = 34°, 43', 20''$$

der Winkel $\alpha = 30°$ liegt also zwischen α_1 und α_2, beide Kegelschnitte sind somit nach Schema (32) Ellipsen.

1. Die Ellipse $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$:

Setzt man die gegebenen Größen in (24) ein und erweitert mit $128 \cdot 139$, so erhält man die Ellipsengleichung:

$$3\,x^2 + 2{,}2189\,x\,y + 2{,}56\,y^2 + 37{,}4831\,x - 64 = 0\,.$$

Tabelle 11. Die nach Gleichung (78) für die an den Tabellenrändern angegebenen Gitterpunktskoordinaten berechneten Werte der Funktion $\frac{\varkappa \cdot l}{\gamma} \cdot v(x,y)^{\mathrm{cm^3}}$ im Beispiel 4. (Man vgl. Abb. 11.)

y^{cm} \ x^{cm}	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
−5									0								
−4									14,818								
−3									28,387								
−2									39,940								
−1									48,710								
0	0								53,933								0
+1									54,840								
+2									50,667								
+3									40,647								
+4									24,013								
+5									0								

y^{cm} \ x^{cm}	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
−5																	
−4																	
−3																	
−2																	
−1																	
0																	
+1																	
+2																	
+3																	
+4																	
+5																	

y^{cm} \ x^{cm}	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
−5																	
−4																	
−3																	
−2																	
−1																	
0																	
+1																	
+2																	
+3																	
+4																	
+5																	

Subtrahiert man dann (III) in (33) von (I), so erhält man mit (II):

$$\varepsilon^2 \cdot \cos 2\nu = 0{,}44\,\lambda; \qquad \varepsilon^2 = \pm 2{,}2621\,\lambda = \mp \frac{4{,}5243}{5{,}56 \mp 2{,}2621};$$

$$\varepsilon^2 \cdot \sin 2\nu = \frac{278}{217} \cdot \sqrt{3} \cdot \lambda = 2{,}2189\,\lambda; \qquad \lambda = -\frac{2}{5{,}56 \mp 2{,}2621}.$$

Die obere der rechts stehenden Gleichungen erhält man, wenn man die links stehenden Gleichungen quadriert und addiert, die untere durch Addition von (I) und (III). Ihre Einführung in die obere rechte Gleichung zeigt, daß nur das untere Vorzeichen in Frage kommt. Man findet nach längerer Rechnung schließlich:

$$\lambda = -0{,}2557; \quad \varepsilon^2 = 0{,}5784; \quad \cos\nu = -0{,}6346; \quad \sin\nu = +0{,}7728.^1$$

Führt man diese Zahlenwerte in die Gleichungen (IV) und (V) von (33) und die letzteren in (VI) ein, so erhält man nach einigen Erweiterungen für p die quadratische Gleichung:

$$p^2 - 14{,}4263\,p = 161{,}2713.$$

Ihre beiden Wurzeln liefern schließlich mit (IV) und (V) auch je zwei Werte für q und r:

$$\begin{aligned} &p_1 = 21{,}8180; \quad q_1 = -12{,}8005; \quad r_1 = +9{,}7526; \quad (F_1)_x; \quad u_x = \frac{q_1 + q_2}{2} = -7{,}4396; \\ &p_2 = -7{,}3917; \quad q_2 = -2{,}0787; \quad r_2 = -3{,}3041; \quad (F_2)_x; \quad u_y = \frac{r_1 + r_2}{2} = 3{,}2243; \end{aligned} \qquad (M_x)$$

In Abb. 11 sind die beiden Brennpunkte $(F_1)x$ und $(F_2)x$, sowie der Mittelpunkt M_x angegeben und die Ellipse gezeichnet worden, die auch durch die Endpunkte der kleinen Halbachse der Querschnittsellipse hindurchgeht. Natürlich ist eine weitere Kontrolle durch direkte Berechnung z. B. der x-Werte aus angenommenen y-Werten möglich. Es ist

y^{cm}	-1	0	$+1$	$+2$
x^{cm}	1,540	1,522	1,400	1,182

in sehr guter Übereinstimmung mit der Zeichnung. Für die Halbachsen a, b und die lineare Exzentrizität e fand sich ferner:

$$a = 11{,}107\text{ cm}; \quad b = 7{,}212\text{ cm}; \quad e = 8{,}447\text{ cm}.$$

2. Die Ellipse $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Verfährt man wie im Falle 1., so erhält man der Reihe nach:

$$x^2 + 4{,}6148\,x\,y + 7{,}68\,y^2 + 86{,}4889\,y - 64 = 0;$$

$$\lambda = -0{,}1191; \quad \varepsilon^2 = 0{,}9666; \quad \cos\nu = -0{,}9547; \quad \sin\nu = 0{,}2977;$$

$$p^2 + 91{,}8049\,p = 1057{,}3496$$

$$\begin{aligned} &p_1 = 10{,}3504; \quad q_1 = -9{,}5512; \quad r_1 = -2{,}1700; \quad (F_1)y; \quad v_x = \frac{q_1 + q_2}{2} = 42{,}3580; \\ &p_2 = -102{,}1553; \quad q_2 = 94{,}2673; \quad r_2 = -34{,}5443; \quad (F_2)y; \quad v_y = \frac{r_1 + r_2}{2} = -18{,}3572; \end{aligned} \qquad (My)$$

Hiervon konnte in Abb. 11 nur der Brennpunkt $(F_1)_y$ und die Richtung ν der großen Halbachse eingezeichnet werden. Durch direkte Berechnung fand sich:

y^{cm}	-1	-2
x_1^{cm}	14,478	19,699
x_2^{cm}	$-9{,}864$	$-10{,}469$

[1] Es sei bemerkt, daß das bei *L. Schrutka*, a. a. O. (Fußnote 1 S. 125) durchgerechnete Beispiel S. 404 nicht richtig ist. Dort müßte es $\cos\nu = -\frac{3}{\sqrt{10}}\left(\text{statt } +\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ heißen, da sich 2ν im 4., somit ν im 2. Quadranten befindet, daher sind auch die ebendort für p, q, r errechneten Ergebnisse falsch.

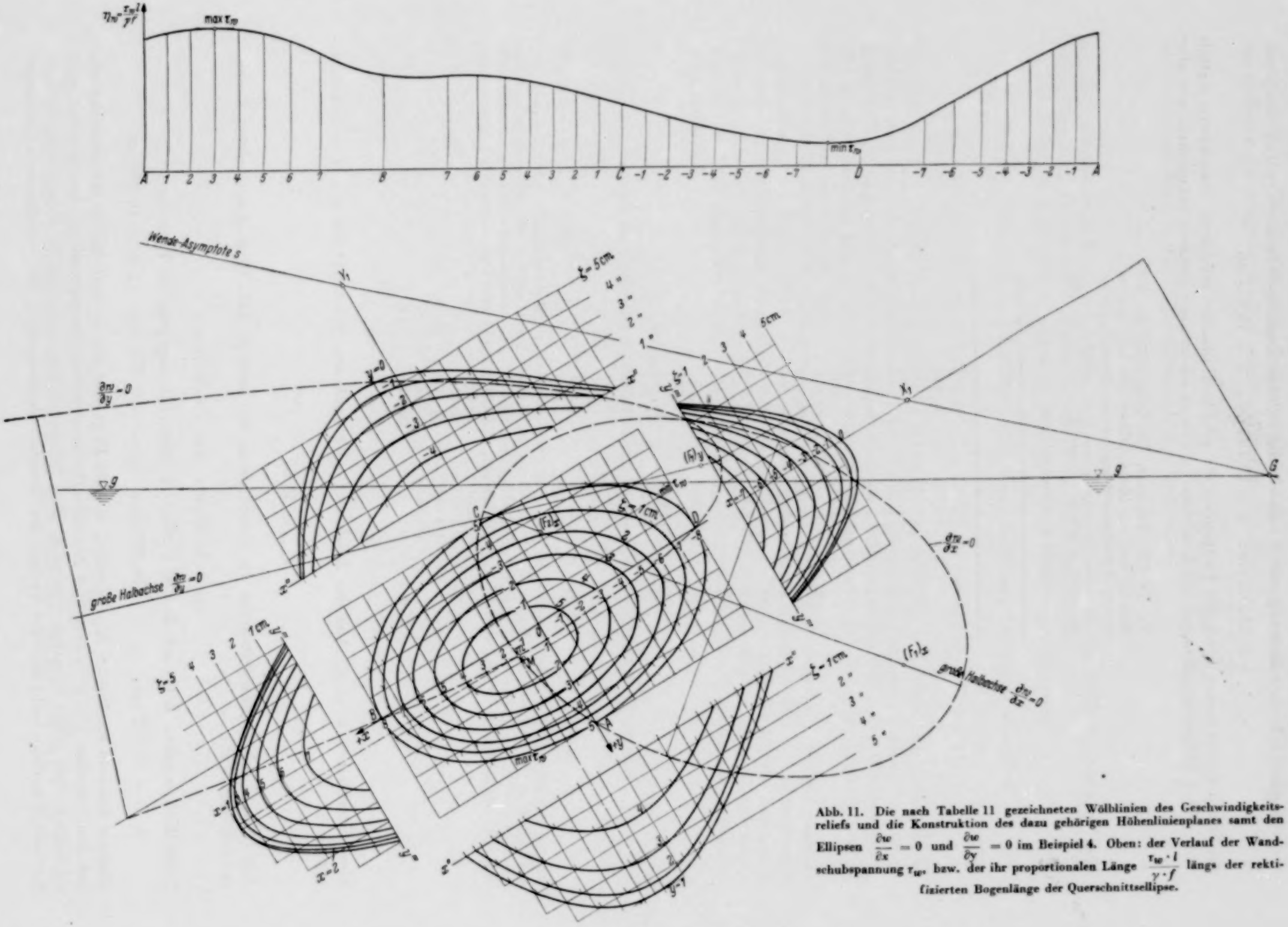


Abb. 11. Die nach Tabelle 11 gezeichneten Wölblinien des Geschwindigkeitsreliefs und die Konstruktion des dazu gehörigen Höhenlinienplanes samt den Ellipsen $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ im Beispiel 4. Oben: der Verlauf der Wandschubspannung τ_w, bzw. der ihr proportionalen Länge $\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma \cdot f}$ längs der rektifizierten Bogenlänge der Querschnittsellipse.

in sehr guter Übereinstimmung mit der Zeichnung. Schließlich ergab sich:

$$a = 55{,}306 \text{ cm}; \quad b = 10{,}106 \text{ cm}; \quad e = 54{,}375 \text{ cm}.$$

Die Ellipse geht ferner durch die Endpunkte der großen Halbachse hindurch. Man könnte mittels der beiden Ellipsengleichungen die Koordinaten von m leicht noch genauer bestimmen, was aber

Tabelle 12. *Die nach Gleichung (79) für die Randpunkte der Querschnittsellipse mit den am linken Tabellenrand angegebenen Koordinaten berechneten Werte der Funktion* $\frac{l \cdot \tau_w}{\gamma}^{\text{cm}^2}$ *im Beispiel 4. (Man vgl. Abb. 11 oben.)*

x^{cm}	y^{cm}	$\frac{\tau_w\, l^{\text{cm}^2}}{\gamma}$	
0	+5	28,946	A
+1	+4,961	30,218	
+2	+4,841	31,053	
+3	+4,635	31,394	
+4	+4,330	31,172	
+5	+3,903	30,292	
+6	+3,307	28,616	
+7	+2,421	25,903	
+8	0	20,856	B
+7	−2,421	20,689	
+6	−3,307	20,708	
+5	−3,903	20,243	
+4	−4,330	19,414	
+3	−4,635	18,322	
+2	−4,841	17,049	
+1	−4,961	15,657	
0	−5	14,200	C
−1	−4,961	12,722	
−2	−4,841	11,264	
−3	−4,635	9,862	
−4	−4,330	8,552	
−5	−3,903	7,371	
−6	−3,307	6,362	
−7	−2,421	5,610	
−8	0	6,110	D
−7	+2,421	10,824	
−6	+3,307	14,270	
−5	+3,903	17,419	
−4	+4,330	20,310	
−3	+4,635	22,934	
−2	+4,841	25,267	
−1	+4,961	27,283	
0	+5	28,946	A

hier unterbleiben konnte. Aus der Zeichnung oder auch aus Tabelle 11 für $x = y = +1$ liest man ab:

$$v_{max} = 56{,}67 \cdot \frac{\gamma}{\varkappa \cdot l} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Aus (38a, b) erhält man ferner für die Koordinaten des auch in Abb. 11 eingezeichneten Druckmittelpunktes M:

$$x_M = 1{,}333 \text{ cm}; \quad y_M = 0{,}902 \text{ cm}.$$

Schließlich ergaben sich nach den in Fußnote 4 Seite 121 angegebenen Formeln:

$$x_1 = -18{,}742 \text{ cm}; \quad y_1 = -16{,}892 \text{ cm}; \quad x_G = -30{,}755 \text{ cm}; \quad y_G = +10{,}828 \text{ cm}.$$

Hiermit konnten die Punkte X_1, Y_1 und G in Abb. 11 gezeichnet werden, die die Wendeasymptote auf den Geraden $y = 0$, $x = 0$ und der Oberflächenverschneidungsgeraden g ausschneidet, und schließlich diese selbst konstruiert werden. Das Schubspannungsrelief ist für dieses Beispiel nicht gezeichnet worden, wohl aber der Verlauf der Wandschubspannung τ_w des rektifizierten Umfanges

der Querschnittsellipse. Hierzu wurde gemäß Gleichung (51) zunächst in Tabelle 12 für die dort angegebenen Koordinaten der Querschnittskontur die Funktion

$$\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma} = 1600 \left(\frac{6}{89} + \frac{0{,}86603}{217} \cdot y + \frac{0{,}5}{139} x \right) \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4096} + \frac{y^2}{625}} \tag{79}$$

berechnet und dann in Abb. 11 oben mittels des Maßstabes

$$f = \frac{10^{\mathrm{cm}^2}}{2^{\mathrm{cm}}} = 5\ \mathrm{cm}; \quad \text{somit} \quad \left(\frac{\tau_w \cdot l}{\gamma} \right)^{\mathrm{cm}^2} = 5^{\mathrm{cm}} \cdot \eta^{\mathrm{cm}}$$

auf dem rektifizierten Ellipsen-Umfang, beginnend vom unteren Endpunkt A der kleinen Halbachse über B, C, D (Grundriß in Abb. 11) bis A zurück aufgetragen.

Durch Ziehen horizontaler Tangenten entnimmt man diesem η_w-Diagramm:

$$x = +3^{\mathrm{cm}}; \qquad y = +4{,}635^{\mathrm{cm}}; \quad \tau_{w\,max} = 31{,}4\ \frac{\gamma}{l}\ \mathrm{kp/cm^2}\ \text{zwischen } A \text{ und } B$$

$$x = -7{,}27^{\mathrm{cm}}; \quad y = -2{,}09^{\mathrm{cm}}; \quad \tau_{w\,min} = 5\ \frac{\gamma}{l}\ \mathrm{kp/cm^2}\ \text{zwischen } C \text{ und } D.$$

Der Ort von $\tau_{w\,min}$ wurde durch graphische Interpolation genähert vermittelt. Im Grundriß der Abb. 11 sind die Orte dieser Extremwerte der Wandschubspannung auf dem Umfange der Querschnittsellipse angegeben. Man bemerkt, daß die Höhenlinien in der Nähe des Punktes min τ_w den größten Abstand voneinander aufweisen, während sie sich in der Nähe des Punktes max τ_w am dichtesten zusammendrängen.

In experimenteller Hinsicht werden sich die beiden hier durch dasselbe Verfahren gelösten physikalischen Probleme, wie hier noch bemerkt werden möge, ergänzen: die i. a. versuchsweise schwerer zu bestimmenden Strömungsgeschwindigkeiten v wird man mittels der leichter meßbaren Membran-Auswölbungen w und umgekehrt die umständlicher durch Messungen zu bestimmende Kubatur des Wölbhügels mittels der leichter meßbaren sekundlichen Flüssigkeitsmenge zu bestimmen trachten.[1]

(Eingegangen am 17. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *Karl Karas*, Techn. Hochschule Darmstadt.

Nachtrag vom 23. 4. 59:

Dieser Fall ist — insbesondere hinsichtlich der Abhängigkeit der Durchflußmenge Q von der Gestalt des elliptischen Querschnitts — sehr ausführlich diskutiert in der Arbeit von *O. Emersleben:* „Wie hängt bei Parallelströmung zäher Flüssigkeiten die Durchflußmenge von der Gestalt des Querschnitts ab?". Abteilung Angewandte Mathematik der Universität Greifswald: Anwendungen der Mathematik Nr. 3, insbesondere S. 5—8.

[1] Es sei in diesem Zusammenhang auf die Arbeit von *K. E. Meier-Dörnberg*, Ing. Arch. 26 (1958) S. 93—95, verwiesen.

Über nichtlineare Schwingungen mit unstetiger Erregung

Von **H. Kauderer**

1. Einleitung. Die periodischen Bewegungen, die für ungedämpfte Zwangsschwingungen mit nichtlinearer Kennlinie charakteristisch sind, werden gewöhnlich am Musterbeispiel eines schwingungsfähigen Systems untersucht, das die nach *G. Duffing* benannte Differentialgleichung

$$a\frac{d^2q}{dt^2} + c\,q\,(1 + \beta\,q^2) = P\cos\gamma t \tag{1}$$

befolgt. Hierbei bedeutet q die generalisierte Koordinate des Systems von einem Freiheitsgrad, t die Zeit, a eine konstante positive Trägheitsgröße, P die Amplitude und γ die Kreisfrequenz der Zwangskraft. Die positive Konstante c und die Konstante β legen die für $\beta > 0$ überlineare und für $\beta < 0$ unterlineare Kennlinie des Schwingers fest, die hier die Form einer zum Nullpunkt symmetrischen kubischen Parabel hat.

Die *Duffing*sche Differentialgleichung ist die einfachste Erweiterung der Differentialgleichung für die Zwangsschwingungen eines Schwingers mit gerader Kennlinie, in die sie für $\beta = 0$ übergeht. Trotz ihrer einfachen Gestalt läßt sie sich jedoch nur durch Näherungsverfahren behandeln. Diese liefern, da man sie praktisch schon nach wenigen Schritten abbrechen muß, nur für geringe Abweichungen von der Linearität brauchbare Lösungen, und dasselbe gilt dann natürlich entsprechend für die aus diesen Näherungslösungen hergeleiteten Resonanzdiagramme.

Es liegt daher die Frage nahe, ob sich vielleicht die *Duffing*sche Differentialgleichung unter Wahrung ihres Charakters als Bewegungsgleichung eines Schwingers mit nichtlinearer Kennlinie und periodischer Zwangskraft so ändern läßt, daß man sie exakt lösen kann. Der Zweck dieser Abhandlung ist, nachzuweisen, daß dies tatsächlich möglich ist, und zwar dadurch, daß man die harmonische Zwangskraft $P\cos\gamma t$ durch andere einfache Formen einer periodischen Erregung ersetzt. Ein solches Vorgehen scheint aus folgendem Grund durchaus gerechtfertigt zu sein: Während im linearen Fall infolge der Möglichkeit der Superposition von Einzellösungen die zu einer harmonischen Zwangskraft gehörige Lösung der Schwingungsgleichung dadurch ausgezeichnet ist, daß sie die Bausteine liefert für den Aufbau der Lösung bei einer beliebigen, durch eine *Fourier*sche Reihe darstellbaren periodischen Zwangskraft, nimmt die Lösung der *Duffing*schen Differentialgleichung keinerlei bevorzugte Stellung mehr ein gegenüber den Lösungen für andere periodische Zwangskräfte, da man ja bei nichtlinearen Differentialgleichungen die Lösungen nicht mehr superponieren darf.

Wir wollen nun in Ziff. 2 eine erste und in Ziff. 3 eine zweite Form periodischer Erregungen kennenlernen, die eine exakte Bestimmung der Zwangsschwingungen und des Resonanzdiagramms von Schwingern mit nichtlinearer Kennlinie ermöglicht. Zur Klärung des Verhaltens dieser Schwinger zeigen wir jeweils zuerst das (an sich bekannte) Verhalten des linearen Schwingers unter diesen Formen der Erregung auf, wobei wir die Bewegungsvorgänge mit Hilfe der Phasenebene darstellen. In Ziff. 4 sollen dann noch Hinweise dafür gegeben werden, wie sich die hier am einfachen Beispiel der *Duffing*schen Differentialgleichung entwickelten Gedankengänge verallgemeinern und auf schwierigere Probleme nichtlinearer erzwungener oder parametererregter Schwingungen anwenden lassen, so daß man auch in diesen Fällen zu exakten Lösungen gelangen kann.

2. Erregung durch schrittweise konstante periodische Kräfte. Bekanntlich läßt sich der Zusammenhang zwischen der generalisierten Koordinate q und der zugehörigen Geschwindigkeit $v = dq/dt$ für eine konservative Bewegung, welche die Differentialgleichung

$$\frac{d^2q}{dt^2} + w(q) = 0 \tag{2}$$

mit einer beliebigen Funktion $w(q)$ befolgt, nach Ausführung einer einfachen Quadratur in der (q, v)-Ebene darstellen. Die Phasenkurvenschar, die diesen Zusammenhang liefert, ist zugleich die Schar der Kurven konstanten Gesamtpotentials h, die sich aus der Energiegleichung

$$\frac{1}{2}v^2 + U(q) = h \tag{3}$$

mit dem Potential

$$U(q) = \int_{q_0}^{q} w(q)\, dq \quad (q_0 = \text{const}) \tag{4}$$

ergeben. Aus der Auflösung der Gleichung (3) nach v folgt durch eine zweite Quadratur die zum Durchlaufen einer Strecke von $q = q_1$ bis q benötigte Zeit t zu

$$t(q) = \int_{q_1}^{q} \frac{dq}{\sqrt{2\,[h - U(q)]}}\,. \tag{5}$$

Stünde nun auf der rechten Seite der Gleichung (1) anstelle der Funktion $P\cos\gamma t$ eine Konstante K, so könnten wir Gleichung (1) als Differentialgleichung einer konservativen Bewegung deuten, für welche die in Gleichung (2) eingeführte Funktion $w(q)$ den Wert

$$w(q) = \frac{c}{a}\left[q\,(1 + \beta\, q^2) - \frac{K}{c}\right] \tag{6}$$

hat. Die Phasenkurvenschar läßt sich in diesem Fall ohne weiteres zeichnen, und die Berechnung von $t(q)$ nach (5) führt, wie man leicht durch Berechnung von $U(q)$ nach (4) mit $w(q)$ nach (6) feststellt, auf elliptische Integrale.

Lassen wir nun die Kraft K gemäß der Darstellung in Abb. 1 ihr Vorzeichen wechseln, indem sie periodisch die Werte $+P_0$ und $-P_0$ annimmt (P_0 sei eine positive Konstante), so können wir für $K = +P_0$ und für $K = -P_0$ zwei Scharen von Phasenkurven zeichnen, die beide die ganze Phasenebene überdecken. Der Bewegungsvorgang unter einer solchen periodisch veränderlichen Kraft läßt sich dann, wenn wir uns noch, etwa für $t = 0$, einen Anfangspunkt $A_0(q_0, v_0)$ vorschreiben, durch einen Zug aus Kurvenstücken wiedergeben, die abwechselnd aus den beiden Scharen von Phasenkurven für $K = +P_0$ und $K = -P_0$ stammen und sich stetig aneinander schließen. Insbesondere werden sich die unter den möglichen Bewegungsformen auftretenden periodischen Schwingungsvorgänge durch geschlossene, in ständiger Wiederholung zu durchlaufende Kurvenzüge darstellen lassen. Die *Duffing*sche Differentialgleichung (1) wird demnach durch Quadraturen lösbar, wenn wir auf ihrer rechten Seite die harmonische Zwangskraft $P\cos\gamma t$ durch die in Abb. 1 dargestellte abschnittsweise konstante Zwangskraft mit derselben Frequenz ersetzen.

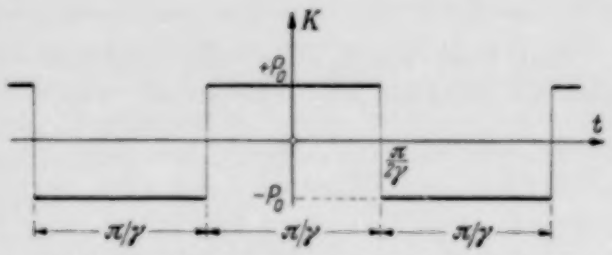


Abb. 1. Abschnittsweise konstante periodische Kraft.

Für die weiteren Untersuchungen empfiehlt es sich, die Gleichung (1) in dimensionslose Form zu bringen. Wir führen hierzu die dimensionslosen Veränderlichen

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{a}}\, t\,, \qquad x = \frac{c}{P}\, q\,,$$

die dimensionslose Zwangsfrequenz

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{c}}\, \gamma$$

und den dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon = \frac{P^2}{c^2}\,\beta$$

ein. Die Differentialgleichung (1) erhält dann mit

$$p(\tau) = \cos\eta\,\tau \tag{7}$$

und ε als einzigem Parameter die normierte Gestalt

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x\,(1 + \varepsilon\, x^2) = p(\tau)\,, \tag{8}$$

die für $\varepsilon = 0$ in die Differentialgleichung der linearen Schwingung übergeht. Der Ersatz von $P\cos\gamma t$ in (1) durch die unstetige Funktion von Abb. 1 bedeutet dann, daß in (8) für $p(\tau)$ anstelle des Ausdrucks (7) die unstetige Funktion

$$p(\tau) = \begin{cases} +\,p_0 & \text{für } \dfrac{(4n-1)\pi}{2\eta} < \tau < \dfrac{(4n+1)\pi}{2\eta} \\ -\,p_0 & \text{für } \dfrac{(4n+1)\pi}{2\eta} < \tau < \dfrac{(4n+3)\pi}{2\eta} \end{cases} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{9}$$

mit $p_0 = P_0/P$ einzusetzen ist, die sich in bekannter Weise durch die *Fourier*sche Reihe

$$p(\tau) = \frac{4}{\pi}\, p_0 \sum_{\nu = 1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\nu} \cos \nu\, \eta\, \tau \tag{10}$$

wiedergeben läßt. Führen wir noch die dimensionslos gemachte Geschwindigkeit

$$y = \frac{dx}{d\tau} = \frac{\sqrt{a\, c}}{P}\, v$$

ein, so folgt aus (8) wegen $d^2x/d\tau^2 = y\, dy/dx$ durch Integration über x sofort, daß mit einem sich als Integrationskonstante ergebendem Parameter r^2 die beiden Phasenkurvenscharen in der normierten Phasenebene die Gleichungen

$$(x \mp p_0)^2 + \frac{1}{2}\, \varepsilon\, x^4 + y^2 = r^2 \tag{11}$$

haben müssen. Für τ als Funktion von x erhält man dann, entsprechend Gleichung (5), jetzt mit dem Anfangswert x_1 die Gleichung

$$\tau(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x \mp p_0)^2 - \frac{1}{2}\, \varepsilon\, x^4}}. \tag{12}$$

Der Wert von p_0 ist an sich noch frei wählbar. Zu seiner Festlegung können wir z. B. fordern, daß die während der Halbperiode von $t = -\pi/2\,\gamma$ bis $t = +\pi/2\,\gamma$ durch die Zwangskraft verursachte Impulsänderung bei der harmonischen Erregung und bei der unstetigen Erregung (gemäß Abb. 1) den gleichen Wert erhält. Es muß dann das zeitliche Integral der harmonischen Zwangskraft

$$\int_{-\pi/2\,\gamma}^{+\pi/2\,\gamma} P \cos \gamma\, t\, dt = \frac{\pi}{\gamma}\, P_0$$

werden, was auf

$$P_0 = \frac{2}{\pi}\, P$$

oder, in dimensionsloser Form, auf $p_0 = 2/\pi$ führt.

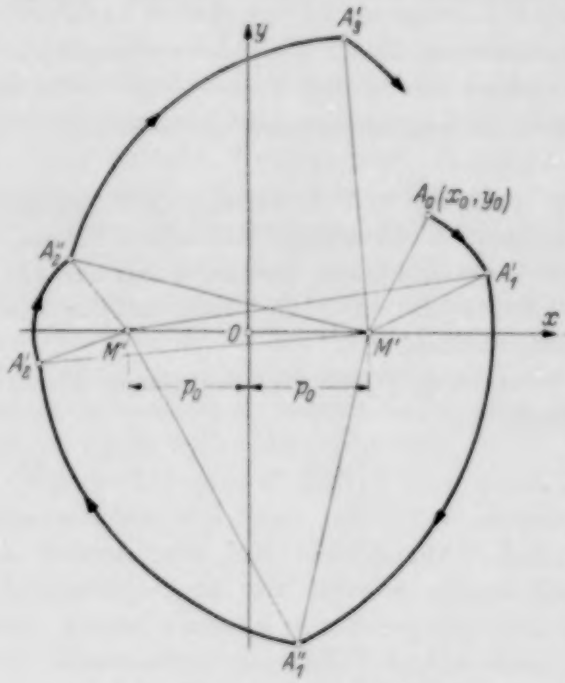


Abb. 2. Eine Phasenkurve aus Kreisbögen im linearen Fall.

Zum besseren Verständnis des nichtlinearen Falles betrachten wir nun zuerst den linearen Fall mit $\varepsilon = 0$. Die Gleichung (11) für die Phasenkurven liefert dann die Scharen der konzentrischen Kreise

$$(x \mp p_0)^2 + y^2 = r^2$$

um die Punkte M' und M'' der x-Achse mit den Koordinaten $+\,p_0$ und $-\,p_0$ (Abb. 2). Diese Kreise sind, wie man aus (12) herleiten kann, sämtliche in der (dimensionslosen) Zeit $2\,\pi$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit zu durchlaufen. Der im Bogenmaß gemessene Zentriwinkel eines Kreisbogenstücks ist also direkt gleich der zu dessen Durchlaufung nötigen (dimensionslosen) Zeit.

Schreiben wir uns nun etwa vor, daß die Phasenkurve der Zwangsschwingung für $\tau = 0$ durch den Punkt $A_0\,(x_0, y_0)$ hindurchgehen soll, so bewegen wir uns zuerst auf dem Kreis um M' durch A_0 bis zum Punkt A_1', für den $\sphericalangle\, A_0\, M'\, A_1' = \pi/2\,\eta$ ist, sodann auf dem Kreis um M'' durch A_1' bis zum Punkt A_1'', für den $\sphericalangle\, A_1'\, M''\, A_1'' = \pi/\eta$ ist, hierauf auf dem Kreis um M' durch A_1'' bis zum Punkt A_2', für den $\sphericalangle\, A_1''\, M'\, A_2' = \pi/\eta$ ist usf. Ein Beispiel für $\eta = 2{,}5$ ist in Abb. 2 eingetragen. Die uns besonders interessierenden geschlossenen Kurvenzüge, die den periodischen Bewegungen entsprechen, müssen sich auf jeden Fall aus einer geraden Anzahl $(2\,n)$ von Kreisbögen zusammensetzen. Ist $n = 1$, so bezeichnen wir die Bewegung als harmonisch zur Zwangskraft, ist $n > 1$ als subharmonisch von der Ordnung $1/n$. Sie hat dann die Periode $2\,\pi\, n/\eta$ und die Kreisfrequenz η/n.

Infolge der Symmetrie der beiden Kreisscharen zur y-Achse ergeben sich die Bilder der zur Zwangskraft harmonischen Bewegungen als geschlossene Kurven aus zwei Kreisbögen, die sich auf der y-Achse schneiden. Für $\eta > 1$ müssen die Zentriwinkel der Kreisbögen kleiner als π werden. Wir erhalten dann Kreisbogenzweiecke $BCDE$ (Abb. 3). Die Schwingung erfolgt in Gegenphase zur Zwangskraft $p(\tau)$, da die Ausschläge x stets das umgekehrte Vorzeichen von $p(\tau)$ haben. Mit $\eta \to 1$ gehen die Zentriwinkel $CM'E$ und $EM''C$ gegen π, was nur dann möglich wird, wenn

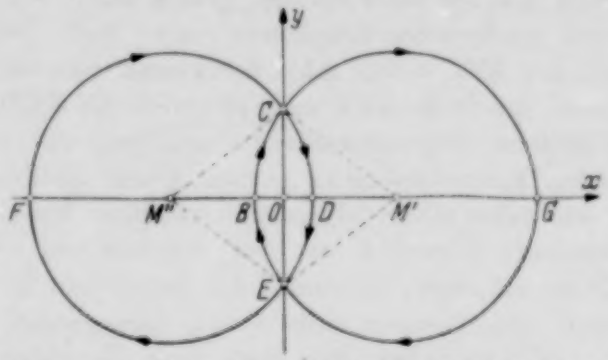


Abb. 3. Zur Erklärung der periodischen Zwangsschwingungen im linearen Fall.

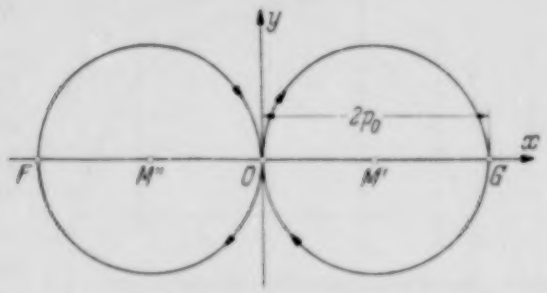


Abb. 4. Zur Erklärung der periodischen Zwangsschwingungen. Grenzlage.

die Punkte C und E immer weiter von O wegrücken und somit auch die Radien der Kreisbögen und die Amplituden, die ja durch die Abszisse von D bestimmt sind, unbeschränkt wachsen. Dies führt auf die Resonanzstelle bei $\eta = 1$. Nimmt η von 1 an weiter ab, so müssen die Zentriwinkel größer als π werden. Es werden also zunächst die Bogenstücke EFC und CGE zu durchlaufen sein, bis der in Abb. 4 dargestellte Grenzfall der sich in O berührenden Kreise mit Zentriwinkeln von 2π bei $\eta = 1/2$ erreicht ist. Hier ist die Schwingung in Phase mit der Zwangskraft; die Amplitude ist durch die Abszisse von G bestimmt. Liegt η zwischen 1/2 und 1/3, so braucht man Zentriwinkel zwischen 2π und 3π. Diese erhält man durch den in Abb. 3 zu verfolgenden Linienzug $EBCGEBCDEFCDE$. Es wird hierbei, etwa von E aus, der Kreis um M' einmal ganz durchlaufen und dann nochmals bis C, und hieran anschließend wird der Kreis um M'' einmal ganz durchlaufen und dann nochmals bis E. Mit $\eta \to 1/3$ wachsen die Kreise wieder unbeschränkt. Wir erhalten so die aus der Entwicklung (10) für $p(\tau)$ zu erwartende Resonanz für $\eta = 1/3$. Für $1/3 < \eta < 1/4$ sowie für $1/4 < \eta < 1/5$ gilt wieder dasselbe wie für $1 < \eta < 1/2$ und für $1/2 < \eta < 1/3$, nur mit dem Unterschied, daß beide Kreise zusätzlich noch einmal voll zu durchlaufen sind. Bei $\eta = 1/5$ erscheint die nächste Resonanz. Das weitere Verhalten im Sinne abnehmender η-Werte ist jetzt vollends leicht zu übersehen. Für $\eta = 1/2, 1/4, 1/6, \ldots$ erhält man stets die aus der hierfür zuständigen Abb. 4 zu entnehmende Abszisse $2\,p_0$ von G als Amplitude. Das Resonanzdiagramm, das die Amplitude X als Funktion von η wiedergibt, ist in Abb. 5 für $\eta > 1/5$ gezeichnet.

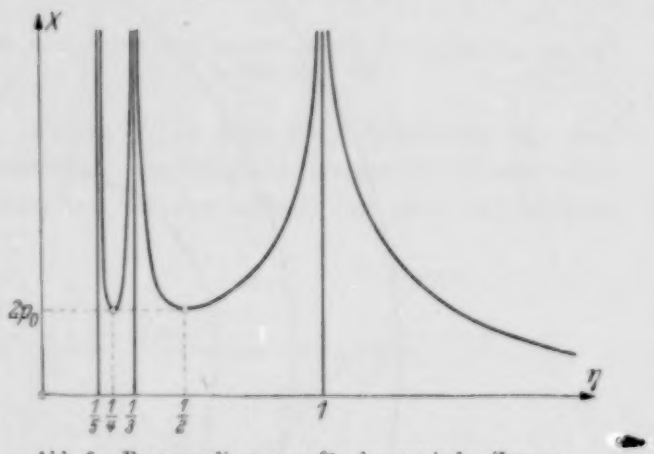


Abb. 5. Resonanzdiagramm für harmonische Zwangsschwingungen. Linearer Fall.

Aus der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (8) mit $\varepsilon = 0$ und $p(\tau)$ nach (10), die wir hier mit den Integrationskonstanten a und b in der Form

$$x(\tau) = a\cos\tau + b\sin\tau + \frac{4}{\pi}\,p_0 \sum_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\,\frac{1}{\nu}\,\frac{1}{1-\nu^2\eta^2}\cos\nu\eta\tau \tag{13}$$

schreiben können, ergibt sich sofort: Ist $\eta = n/m$ eine rationale Zahl (n, m ganz; $m \neq \nu\, n$), so gibt es durch jeden Anfangspunkt in der Phasenebene eine subharmonische Zwangsschwingung von der Ordnung $1/n$. Man kann demnach eine solche Zwangsschwingung mit beliebiger Amplitude X_n erzeugen. Das Resonanzdiagramm für subharmonische Zwangsschwingungen von der Ordnung $1/n$ besteht somit aus den Parallelen zur Ordinatenachse mit den Abszissen $\eta = n/m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$; Abb. 6).

In der Tat erhält man, wie etwa das Beispiel der Abb. 7 für $\eta = 4/3$ zeigen mag, zu jedem Ausgangspunkt A_0 einen geschlossenen Zug von $2\,n = 8$ Kreisbögen mit den Zentriwinkeln

$m\pi/n = 3\pi/4$. Zur x-Achse symmetrische Kurvenzüge kommen insbesondere dann zustande, wenn man den Ausgangspunkt für $\tau = 0$ auf der x-Achse wählt. Zwei Beispiele für $n = 2$ zeigt Abb. 8.

Wenden wir uns nun wieder dem nichtlinearen Fall zu. An die Stelle der beiden Kreisscharen treten jetzt die beiden Scharen geschlossener Kurven gemäß Gleichung (11). Die Perioden der konservativen Schwingungen, welche diese geschlossenen Kurven wiedergeben, gehen für $\varepsilon > 0$ bei unbegrenzt wachsender Amplitude gegen Null. Durch Vergleich der Abb. 9 mit Abb. 3 erkennt man sofort, daß jetzt an die Stelle der Kreisbogenzweiecke $BCDEB$ für periodische Gegenphasenschwingungen die entsprechenden Kurvenzweiecke treten. Ohne Rechnung können wir daher schon folgendes feststellen: Wandern die Eckpunkte C und E auf der y-Achse vom Ursprung O an auswärts, so nimmt die Amplitude X, die hier gleich der Abszisse von D ist, unbegrenzt zu. Hierbei wird zunächst die Zeit zum Durchlaufen der beiden Bögen von Null an wachsen, da die Länge der Bögen auch von Null an wächst; sodann wird sie aber wieder gegen Null gehen müssen, weil die Periode der konservativen Schwingungen mit wachsender Amplitude gegen Null geht. Es muß also sicher für einen bestimmten Amplitudenwert X_0 ein Maximum der Durchlaufzeit

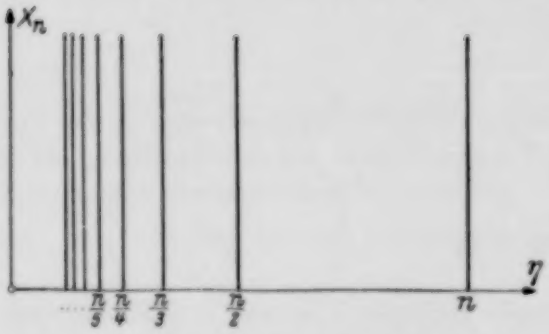


Abb. 6. Resonanzdiagramm für subharmonische Zwangsschwingungen. Linearer Fall.

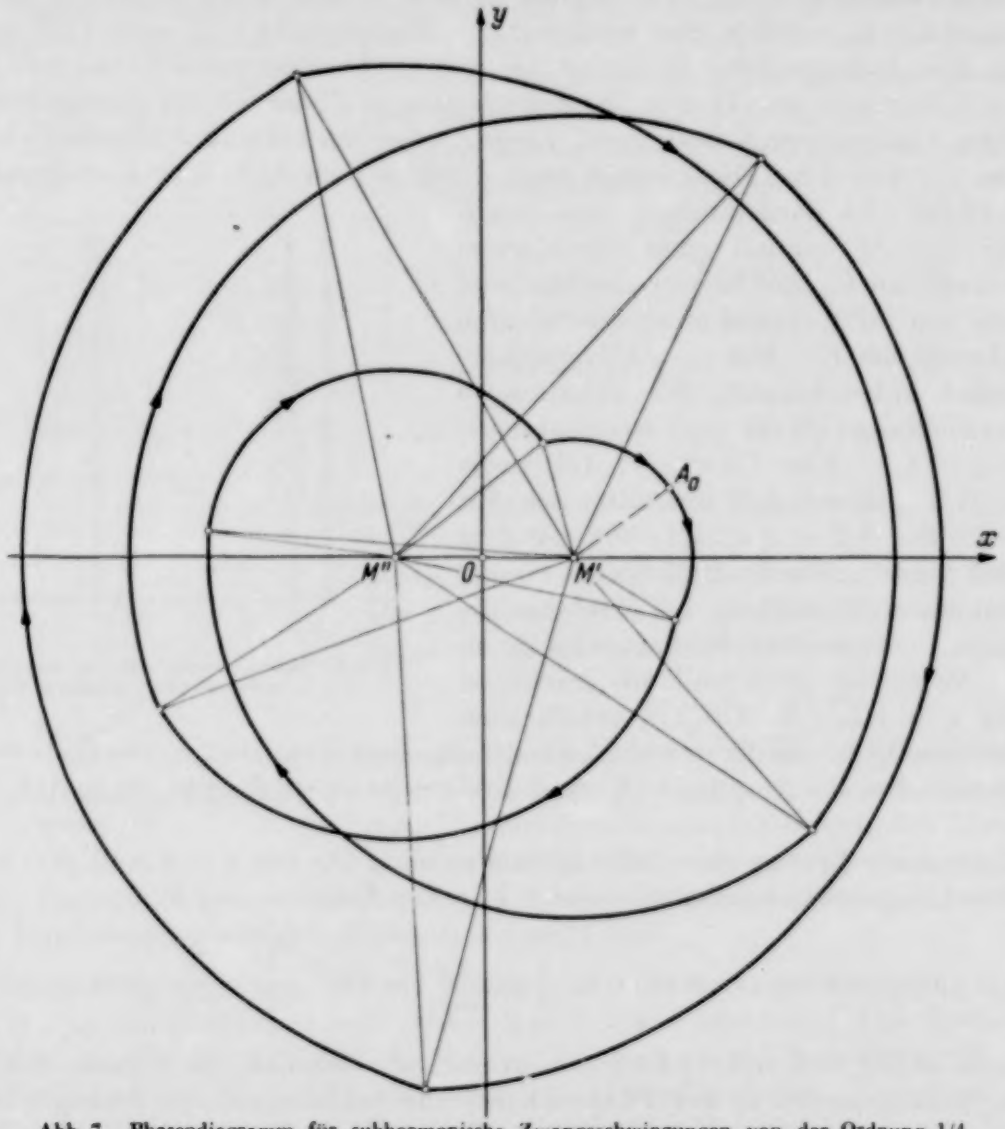


Abb. 7. Phasendiagramm für subharmonische Zwangsschwingungen von der Ordnung 1/4. Linearer, allgemeiner Fall.

erreicht werden, dem ein Minimum η_0 der Zwangsfrequenz η entspricht. Im Resonanzdiagramm, das die Abb. 10 schematisch wiedergibt, wird demnach der zugehörige Kurvenast, im Sinne wachsender Amplituden vom Unendlichen auf der Abszissenachse herkommend, zuerst nach links laufen, bis er im Punkt $U(\eta_0, X_0)$ mit vertikaler Tangente seine Richtung umkehrt und sich

hierauf im Sinn wachsender η und wachsender X fortsetzt. Auch an die Stelle der früher für $1/2 < \eta < 1$ maßgebenden Kreisbogenzweiecke $FCGEF$ treten jetzt die entsprechenden Kurvenzweiecke der Abb. 9. Fallen C und E mit dem Ursprung O zusammen, so haben wir (dem früheren Fall von Abb. 4 entsprechend) die beiden durch den Ursprung gehenden geschlossenen Phasenkurven der beiden Scharen vollständig zu durchlaufen. Ihnen entspricht eine bestimmte Amplitude X_1, und die zugehörige Zwangsfrequenz η_1 wird gleich der halben Eigenfrequenz der zu einer

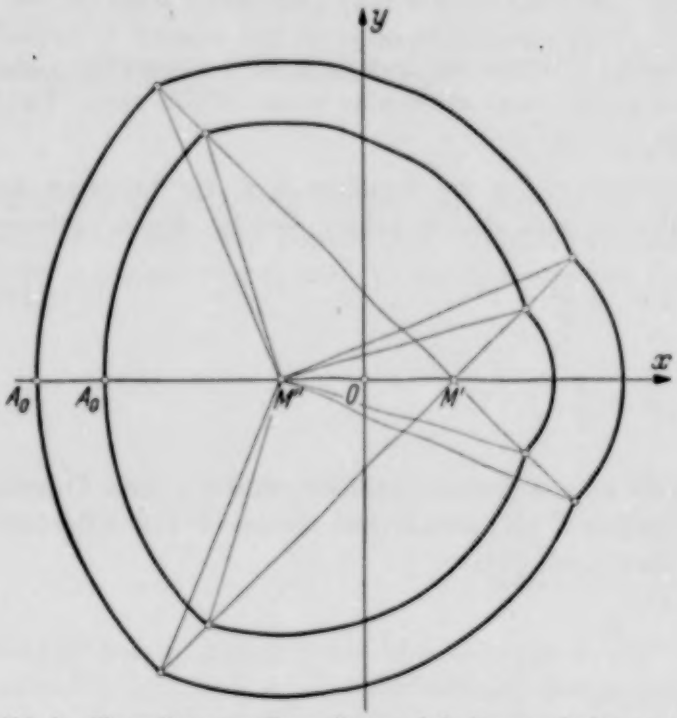


Abb. 8. Phasendiagramm für subharmonische Zwangsschwingungen von der Ordnung 1/2. Linearer, symmetrischer Fall.

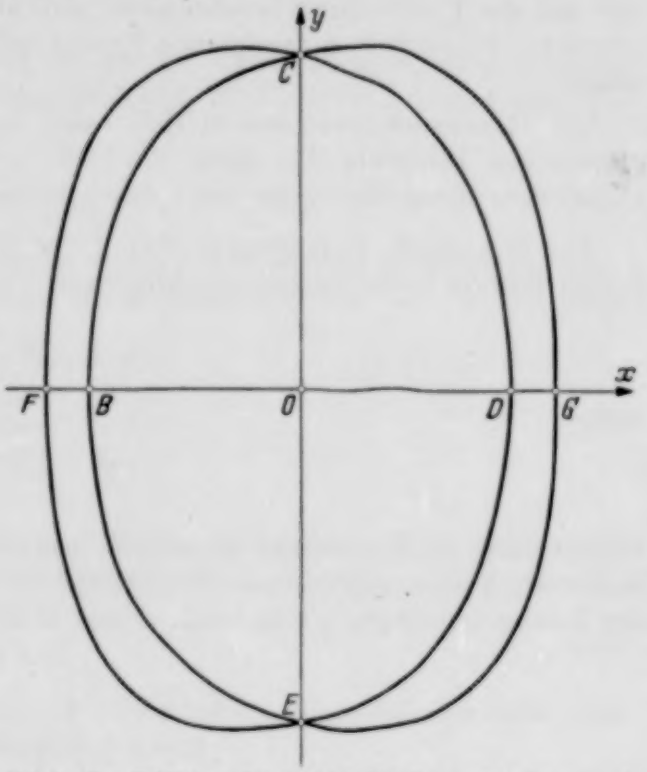


Abb. 9. Zur Erklärung der periodischen Zwangsschwingungen im nichtlinearen Fall.

dieser beiden Kurven gehörenden freien Schwingung (Punkt V_1 in Abb. 10). Wandern nun die Punkte C und E vom Ursprung O an auswärts, so werden mit wachsender Amplitude X nur noch Teile der geschlossenen Kurven durchlaufen. Die Laufzeiten werden also sicher dauernd kleiner und demgemäß die η-Werte größer. Da mit wachsendem X der Beitrag der Konstanten p_0 in der Gleichung (11) für die Kurvenscharen immer mehr an Bedeutung verliert, so werden sich die Kurven mit gleichem Wert von r^2 in den beiden Scharen für $+p_0$ und für $-p_0$ mit wachsendem X immer mehr einander und auch derjenigen Phasenkurve annähern, die zur freien Schwingung mit $p = 0$ gehört. Somit wird auch mit wachsendem η der Unterschied der zu gleichem η gehörigen Amplituden X der früher betrachteten Gegenphasenschwingung und der jetzt betrachteten Schwingung immer geringer. Der von V_1 nach rechts ausgehende Zweig der Resonanzkurve nähert sich also asymptotisch dem von U ausgehenden Zweig und zugleich auch der (in Abb. 10 gestrichelten) Kurve, welche die Amplitude der freien Schwingungen mit $p = 0$ als Funktion ihrer Kreisfrequenz wiedergibt. Für $\eta > \eta_1$ hat demnach das Resonanzdiagramm durchaus denselben Charakter wie ihn die Näherungsverfahren an der ursprünglichen *Duffing*schen Differentialgleichung (1) aufzeigen. Analoge Betrachtungen wie bei den linearen Zwangsschwingungen, wobei jetzt stets an die Stelle der Kreise die geschlossenen Phasenkurven treten, zeigen weiter, daß sich die Resonanzkurven links von V_1 in einer Folge solcher nach rechts abgebogener Äste fortsetzen,

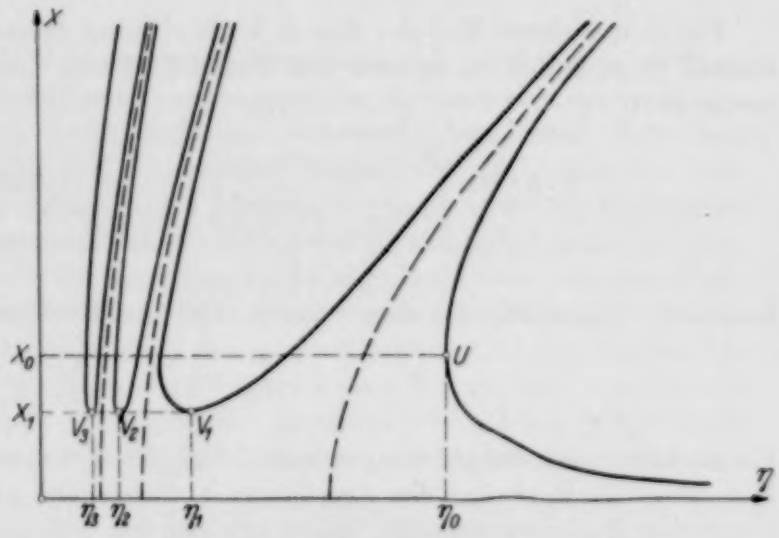


Abb. 10. Resonanzdiagramm im nichtlinearen Fall.

die sich gegen die X-Achse häufen und jeweils bei den Abszissen $\eta_k = \eta_1/k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ in den Punkten V_k bis zur Ordinate X_1 herabreichen. Man erhält so zu jedem Wert von η stets unendlich viele Schwingungsformen, von denen zu vermuten ist, daß sie abwechselnd stabil und labil sind.

Ähnliche Überlegungen, wie wir sie soeben für $\varepsilon > 0$ angestellt haben, läßt auch der Fall der unterlinearen Kennlinie mit $\varepsilon < 0$ zu. Wir wollen jedoch hierauf nicht mehr näher eingehen und uns auf die Feststellung beschränken, daß auch dort der Charakter der beiden im Sinne abnehmender η-Werte ersten Zweige des Resonanzdiagramms derselbe ist wie bei harmonischer Zwangskraft.

Die Resonanzkurven lassen sich exakt berechnen. Hierzu ist lediglich die Auswertung des elliptischen Integrals (12) nötig, die sich — wenn auch etwas mühsam — mit Hilfe einer Tafel elliptischer Normalintegrale stets durchführen läßt.

Für den durch U laufenden Zweig der Resonanzkurve ist die Amplitude X die Abszisse des Schnittpunkts D derjenigen geschlossenen Phasenkurve mit der x-Achse, welche die Gleichung

$$(x + p_0)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x^4 + y^2 = r^2 \tag{14}$$

mit

$$r^2 = (X + p_0)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon X^4 \tag{15}$$

befolgt. Die zu X gehörige Zwangsfrequenz η ergibt sich aus der Tatsache, daß die zum Durchlaufen des Kurvenstücks von C bis D (Abb. 9) nötige Zeit $\tau''(X)$ gleich dem vierten Teil der Periode der Zwangsschwingung sein muß. Diese Zeit ist aber nach (12)

$$\tau''(X) = \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x + p_0)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x^4}}, \tag{16}$$

wobei r^2 nach (15) einzusetzen ist. Die nach η aufgelöste Gleichung für den Zweig der Resonanzkurve durch U lautet somit

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2\,\tau''(X)}. \tag{17}$$

Für den rechten Teil der durch V_1 laufenden Resonanzkurve gilt wörtlich dasselbe, wenn wir überall $+ p_0$ durch $- p_0$ und den Punkt D durch G ersetzen. Mit der entsprechend (16) berechneten Zeit

$$\tau'(X) = \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - p_0)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x^4}} \quad \text{mit} \quad r^2 = (X - p_0)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon X^4 \tag{18}$$

lautet die Gleichung für den rechten Teil des Resonanzkurvenzweigs durch V_1:

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2\,\tau'(X)}. \tag{19}$$

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß die Frequenz der freien Schwingung mit der gleichen Kennlinie als Funktion der Amplitude X durch eine ganz entsprechende Formel, nämlich

$$\bar{\eta}(X) = \frac{\pi}{2\,\bar{\tau}(X)}$$

geliefert wird, wobei $\bar{\tau}(X)$ mit $p_0 = 0$ aus

$$\bar{\tau}(X) = \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x^4}} \quad \text{mit} \quad r^2 = X^2 + \frac{1}{2}\varepsilon X^4$$

zu berechnen ist

Zur Ermittlung der weiteren Zweige des Resonanzdiagramms haben wir zunächst die Schwingungsdauer τ_0'' für eine Halbschwingung, etwa längs des Bogens *FCD* von Abb. 9, zu bestimmen. Ist X die Abszisse von D und X'' die Abszisse von F, so wird

$$\tau_0''(X) = \int_{X''}^{X} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x + p_0)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x^4}}, \tag{20}$$

wobei r^2 nach Gleichung (15) einzusetzen ist. Die Periode der Zwangsschwingung in der linken Hälfte des Zweigs der Resonanzkurve durch V_1 wird dann gleich $4\,[\tau''(X) + \tau_0''(X)]$, und die Gleichung dieses Zweigs lautet somit

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\tau''(X) + \tau_0''(X)}. \tag{21}$$

Für den rechten Zweig der Resonanzkurve durch V_2 berechnen wir nun ebenso die Schwingungsdauer mit Hilfe der Dauer τ_0' der Halbschwingung längs des Bogens *BCG* von Abb. 9. Ist jetzt X die Abszisse von G und X' die Abszisse von B, so wird

$$\tau_0'(X) = \int_{X'}^{X} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + (x - p_0)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x^4}}, \tag{22}$$

wobei r^2 nach Gleichung (18) einzusetzen ist. (Für gleiche Schwingweiten $X - X''$ bzw. $X - X'$ wird natürlich $\tau_0'' = \tau_0'$.) Die Gleichung für diesen Resonanzkurvenzweig lautet somit

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\tau'(X) + \tau_0'(X)}. \tag{23}$$

Entsprechende, anhand der Abb. 9 leicht durchführbare Überlegungen zeigen, daß der links vom Punkt V_k ($k = 2, 3, 4, \ldots$) verlaufende Resonanzkurvenzweig durch

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\tau''(X) + k\,\tau_0''(X)} \tag{24}$$

und der rechts vom Punkt V_{k+1} verlaufende Zweig durch

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\tau'(X) + k\,\tau_0'(X)} \tag{25}$$

beschrieben wird.

Über das Auftreten subharmonischer Zwangsschwingungen kann man sich jetzt folgendes überlegen: Der Fall der Abbildung 7 mit einem beliebigen Ausgangspunkt A_0 wird sich, wenn an die Stelle der Kreisbögen Stücke von Phasenkurven treten, nicht mehr verwirklichen lassen. Schreiben wir uns die Ordnung $1/n$ der Zwangsschwingung und die Zwangsfrequenz vor, so können wir, ausgehend von irgend einem Eckpunkt des Kurvenzugs in der Phasenebene, die weiteren Eckpunkte der Reihe nach bestimmen. Wenn eine subharmonische Zwangsschwingung möglich wäre, müßten wir so am Ende des $2n$-ten Kurvenstücks wieder im Ausgangspunkt angelangt sein, was natürlich, von Sonderfällen abgesehen, nicht mehr zutreffen wird. Man könnte nun den Wert von η offen lassen und, stets vom gleichen Anfangspunkt ausgehend, den geometrischen Ort der Endpunkte der $2n$-ten Kurvenstücke für alle η bestimmen. Dieser wird irgend eine Kurve sein, von der wir i. a. nicht erwarten können, daß sie durch den Anfangspunkt hindurchgeht. Diese Möglichkeit bleibt vielmehr nur noch dann bestehen, wenn wir den Spezialfall der zur x-Achse symmetrischen Kurvenstücke von Abb. 8 ins Auge fassen.

Gehen wir von irgend einem Punkt A_0 auf der x-Achse aus (Abb. 11), der zu $\tau = 0$ gehören möge, so können wir die Kurve bestimmen, die den geometrischen Ort der Endpunkte E aller Kurvenzüge durch A_0 darstellt, die für alle möglichen η-Werte zur Zeit $n\,\pi/\eta$ erreicht werden. Schneidet diese Kurve die x-Achse, was durchaus eintreffen kann, in einem Punkt E_0, so stellt der von A_0 nach E_0 laufende Kurvenzug, zusammen mit seinem Spiegelbild bezüglich der x-Achse, eine subharmonische Zwangsschwingung von der Ordnung $1/n$ dar, die sich bei einer ganz bestimmten Zwangsfrequenz η_0 mit einer bestimmten Amplitude einstellen wird. Zu verschiedenen Anfangspunkten A_0 werden i. a. auch verschiedene Werte von η_0 gehören, so daß wir jetzt, im Unterschied zum linearen Fall, subharmonische Zwangsschwingungen einer bestimmten Ordnung nicht nur für einzelne Werte von η, sondern jeweils für ganze Bereiche zu erwarten haben.

Die Berechnung der Resonanzkurven hat so zu erfolgen, daß man für jeden Punkt A_0 zu verschiedenen η-Werten eine hinreichende Anzahl von Endpunkten E auf beiden Seiten der x-Achse bestimmt und hieraus die Lage von E_0 samt dem zugehörigen η_0 durch Interpolation ermittelt. Obgleich das Rechenverfahren mit Hilfe der elliptischen Funktionen vollständig durchführbar ist, wird es doch ziemlich umständlich, weshalb wir hier auf eine eingehendere Darstellung verzichten wollen.

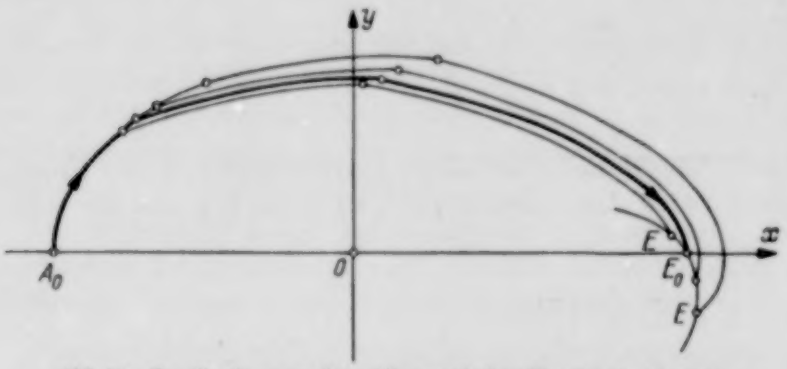


Abb. 11. Zur Bestimmung der subharmonischen Zwangsschwingungen im nichtlinearen Fall.

3. Erregung durch periodische Stöße. Unsere seitherigen Überlegungen vereinfachen sich noch, wenn wir uns die Schwingungen durch momentane Stöße von gleichem Betrag erregt denken, die, mit wechselnder Orientierung bei $t = 0$ bzw. $\tau = 0$ beginnend, in zeitlichen Abständen von π/γ bzw. π/η aufeinanderfolgen. Da die Trägheitsgröße a in Gleichung (1) als konstant angenommen wurde, so bewirken diese Stöße eine momentane Änderung der Geschwindigkeit $v = dq/dt$ um den Wert $\pm \Delta v$ bzw. der Größe $y = dx/d\tau$ um den Wert

$$\pm \delta = \pm \frac{\sqrt{a\,c}}{P} \Delta v \,. \tag{26}$$

Zwischen den Stößen verläuft die Bewegung als freie Schwingung.

Um die Bewegung zu beschreiben, hat man also, und zwar wieder am besten in der (x, y)-Ebene, für die freien Schwingungen die Schar der Phasenkurven zu zeichnen, deren Gleichung aus (11) mit $p_0 = 0$ zu

$$x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x^4 + y^2 = r^2 \tag{27}$$

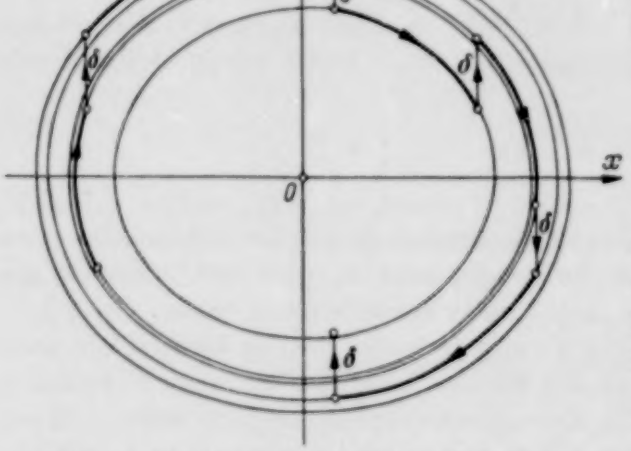


Abb. 12. Phasenkurve bei periodischer Stoßerregung.

folgt, wobei sich $\tau(x)$ aus (12) mit $p_0 = 0$ zu

$$\tau(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - \frac{1}{2}\varepsilon x^4}} \tag{28}$$

ergibt. Die Phasenkurven der durch die Stöße erzwungenen Bewegung verlaufen jetzt unstetig. Sie setzen sich aus lauter einzelnen Teilen von Phasenkurven der Form (8) zusammen, deren dimensionslose Durchlaufzeit jeweils π/η beträgt, und deren Ordinaten an ihren Anfangs- und Endpunkten sich abwechselnd um $+\delta$ und um $-\delta$ voneinander unterscheiden. Abb. 12 zeigt ein Beispiel für den Phasenkurvenzug einer erzwungenen Bewegung, das aus einer willkürlich gewählten Schar von Phasenkurven der konservativen Bewegung hervorgeht.

Man kann hier fragen, wie man den Geschwindigkeitssprung Δv bzw. δ zu wählen hat, um eine möglichst enge Analogie mit den harmonisch erregten Zwangsschwingungen der *Duffing*schen Differentialgleichung (1) herzustellen. Es liegt wieder nahe, zu verlangen, daß der Impuls $2\,P/\gamma$, den die Kraft $P \cos \gamma\, t$ über der Halbperiode von $t = -\pi/2\,\gamma$ bis $+\pi/2\,\gamma$ hervorbringt, mit dem Impuls $a\,\Delta v$ der Stoßerregung übereinstimmen soll. Dies führt auf die Gleichung

$$\Delta v = \frac{2\,P}{a\,\gamma} \tag{29}$$

oder, dimensionslos, auf

$$\delta = 2/\eta. \tag{30}$$

Betrachten wir zuerst wieder den *linearen Fall* mit $\varepsilon = 0$. Die Kurven (27) sind dann die Kreise um den Ursprung, die alle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der Zeit $\tau = 2\,\pi$ zu durch-

laufen sind. Die Phasenkurven der stoßerregten Zwangsschwingung bestehen somit aus lauter konzentrischen Kreisbögen mit gleichem Zentriwinkel. Suchen wir speziell wieder die periodischen Zwangsschwingungen auf, so müssen deren Phasenbilder geschlossene Kurven werden, wenn wir noch die Endpunkte der einzelnen Kurvenstücke durch Parallelen zur y-Achse von der Länge δ verbinden. Wie in Ziff. 2 können wir dann wieder je nach der Zahl $2n$ der Kurvenstücke die zur Zwangskraft harmonischen und die subharmonischen Zwangsschwingungen von der Ordnung $1/n$ definieren.

Die Abbildung 13 zeigt, analog zu Abb. 3, die möglichen Formen der Phasenkurven für harmonische Zwangsschwingungen. Der Linienzug $ABCDEFA$ stellt eine Phasenkurve für $\eta > 1$ dar, wobei $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = \delta/2$ ist. Für $\eta \to 1$ müssen die Zentriwinkel der Kreisbögen gegen den Wert π streben, und dies ist, da δ einen endlichen Wert behalten muß, nur möglich, wenn der Kreis unbeschränkt wächst, was wieder auf die Resonanzstelle bei $\eta = 1$ führt. Die Schwingung verläuft in Gegenphase in dem Sinn, daß im Bereich der negativen x-Werte ein positiver Sprung der y-Werte eintritt und umgekehrt. Die Amplitude X ist hier gleich der Abszisse von B. Für $1/2 < \eta < 1$ liegen die Zentriwinkel der beiden Kreisbögen zwischen π und 2π. Die Phasenkurve läuft jetzt etwa von D aus auf dem Bogen über $HFAG$ nach C, dann kommt der Sprung zurück über B nach A, anschließend das Bogenstück $AGCDHF$ und hierauf wieder ein Sprung über E zurück nach D. Die Schwingung ist in Phase mit der Erregung, und die Amplitude X ist nun, wie auch weiterhin, gleich der Abszisse von G. Für $\eta \to 1/2$ rücken die Sprungstrecken FED und CBA gegen die y-Achse und fallen für $\eta = 1/2$ mit ihr zusammen, so daß hier $X = \delta/2$ und, falls (30) gilt, $X = 2$ werden muß. Liegt η zwischen $1/3$ und $1/2$, so ist eine geschlossene Phasenkurve durch die Punktfolge bestimmt: Bogen $CDHFAGCD$, Sprung DEF, Bogen $FAGCDHFA$, Sprung ABC. Für $\eta \to 1/3$ müssen die Zentriwinkel der Bögen gegen 3π gehen, was nur möglich ist, wenn der Kreis unbeschränkt wächst. Wir erhalten also wieder eine Resonanzstelle für $\eta = 1/3$.

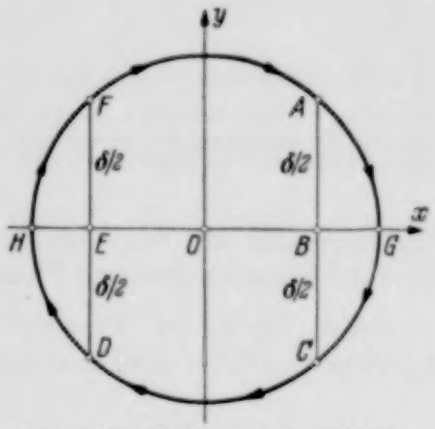


Abb. 13. Zur Erklärung der periodischen Zwangsschwingungen im linearen Fall.

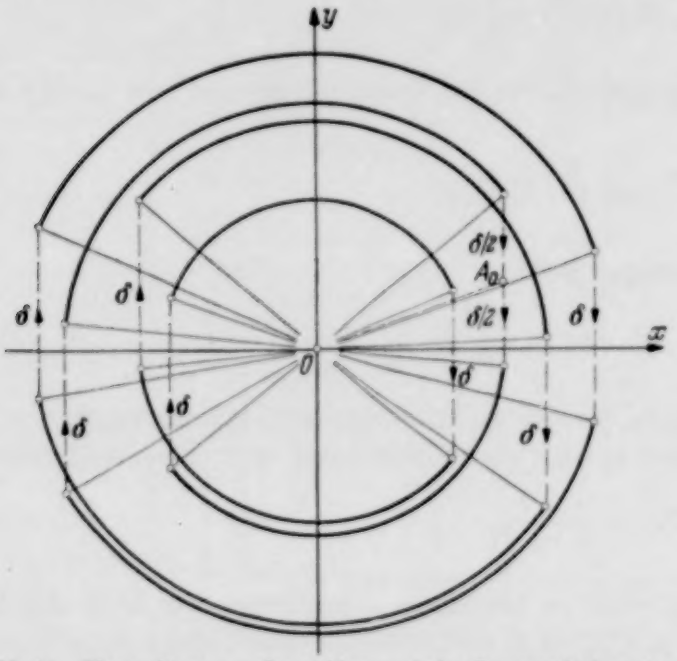


Abb. 14. Phasendiagramm für subharmonische Zwangsschwingungen von der Ordnung 1/4. Linearer, allgemeiner Fall.

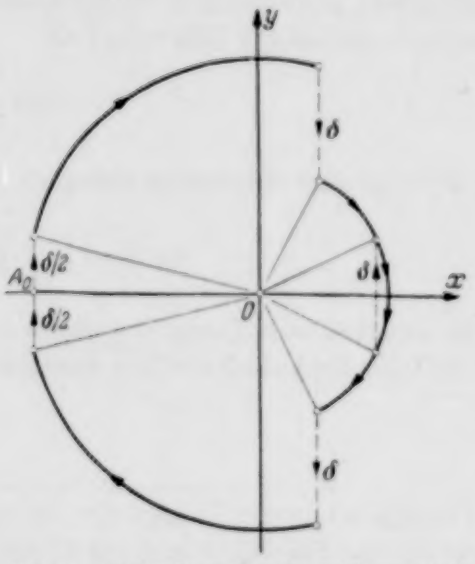


Abb. 15. Phasendiagramm für subharmonische Zwangsschwingungen von der Ordnung 1/2. Linearer, symmetrischer Fall.

Die weitere Untersuchung für $\eta < 1/3$ ist leicht durchführbar und liefert, genau wie in Ziff. 2, Resonanzen für alle $\eta = 1/k$ mit ungeradem k. Man erhält so ein ähnliches Resonanzdiagramm wie in Abb. 5, jedoch, falls man $\delta = 2/\eta$ setzt, mit dem Unterschied, daß die Tiefpunkte der Kurvenzweige für $\eta = 1/2\,m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) nicht mehr in gleicher Höhe liegen, sondern die Ordinaten $X = 2\,m$ erhalten.

Auch die Aussagen von Ziff. 2 über die subharmonischen Schwingungen ändern sich qualitativ nicht. Man erhält wieder von jedem Anfangspunkt A_0 aus subharmonische Schwingungen von der Ordnung $1/n$, wenn $\eta = n/m$ rational ist. Ein der Abbildung 7 entsprechendes Beispiel für $\eta = 4/3$

zeigt Abb. 14, und ein Gegenstück zu dem symmetrischen Fall der Abbildung 8 für $n = 2$ gibt Abb. 15 wieder.

Im *nichtlinearen Fall* mit $\varepsilon \neq 0$ treten nun an die Stelle der konzentrischen Kreise um O die zu beiden Achsen symmetrischen geschlossenen Phasenkurven (27), an denen sich hinsichtlich der zur Erregung harmonischen Schwingungen ganz entsprechende Überlegungen wie an Hand des Kreises von Abb. 13 durchführen lassen, jedoch natürlich wieder mit dem Unterschied, daß jetzt für endliche η-Werte keine unendlich großen Ausschläge mehr zustandekommen können und somit für $\varepsilon > 0$ wieder „abgebogene" Resonanzkurven von der Art der in Abb. 10 wiedergegebenen erscheinen müssen. Diese Resonanzkurven lassen sich ebenfalls exakt berechnen, und zwar mit wesentlich weniger Rechenaufwand als bei der Erregung nach Ziff. 2. Wir gehen hierbei am besten so vor, daß wir uns zuerst einen festen Wert von δ für alle η vorschreiben und die Durchlaufzeit für die im ersten Quadranten liegenden Kurvenstücke der Phasenkurven der freien Schwingung berechnen, die in irgend einem Punkt Q mit der Ordinate Y auf der y-Achse beginnen und auf der Parallelen zur x-Achse im Abstand $\delta/2$ im Punkt A endigen (Abb. 16). Die über A hinaus fortgesetzte Phasenkurve möge die x-Achse im Punkt G schneiden.

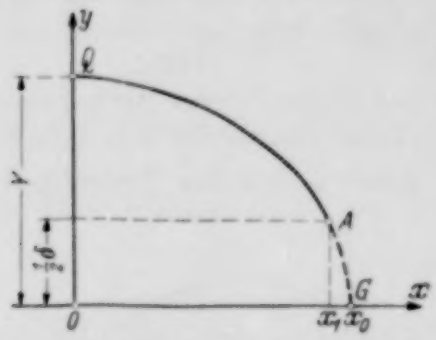


Abb. 16. Zur Berechnung der harmonischen Zwangsschwingungen im nichtlinearen Fall.

Nach (27) ist der Wert von r, der die durch Q gehende Kurve bestimmt, gleich Y. Ist x_0 die Abszisse von G, so muß demnach

$$x_0^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x_0^4 = Y^2 \tag{31}$$

oder

$$x_0^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{1 + 2\varepsilon Y^2} - 1\right] \tag{32}$$

werden. Die Abszisse x_1 von A berechnet sich dann, ebenfalls nach (27), aus

$$x_1^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{1 + 2\varepsilon\left(Y^2 - \frac{1}{4}\delta^2\right)} - 1\right]. \tag{33}$$

Hiermit liefert aber (für $\varepsilon > 0$) die Gleichung (28) die für das Durchlaufen der Strecke QA auf der Phasenkurve benötigte Zeit $\tau_1(x_1)$ zu

$$\tau_1(x_1) = \frac{x_0}{Y}\cos\Theta \cdot F(\Theta, \varphi)\,, \tag{34}$$

wobei $F(\Theta, \varphi)$ das elliptische Integral 1. Gattung[1] mit

$$\operatorname{tg}\Theta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{x_0^2}{Y}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\cos\Theta}\frac{x_1}{\sqrt{x_0^2 - x_1^2}} \tag{35), (36}$$

ist. Für den äußeren Zweig der Resonanzkurve (der in Abb. 10 durch U hindurchgeht) ist τ_1 der vierte Teil der Periode $2\pi/\eta$ der Erregung, und x_1 wird gleich der Amplitude X, so daß dort

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tau_1(X)} \tag{37}$$

wird. Um die weiteren Zweige der Resonanzkurve zu bestimmen, brauchen wir noch die Durchlaufszeit für die Strecke von Q bis G, die sich mit $x_1 = x_0$ und somit [wegen (36)] $\varphi = \pi/2$ zu

$$\tau_1(x_0) = \frac{x_0}{Y}\cos\Theta \cdot K(\Theta) \tag{38}$$

ergibt, wobei Θ wieder nach (35) zu berechnen ist und $K(\Theta)$ das vollständige elliptische Integral 1. Gattung bedeutet. Für die rechte Hälfte des zweiten Zweigs der Resonanzkurve wird aber die Länge der Periode

$$\frac{2\pi}{\eta} = 4\left[2\tau_1(x_0) - \tau_1(x_1)\right].$$

[1] Dargestellt in der Schreibweise von *A. M. Legendres* Tafeln der Elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung, hrsg. von *Fritz Emde*. Stuttgart 1931.

Da jetzt die Amplitude X der Schwingung gleich x_0 ist, so wird

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\,\tau_1(X) - \tau_1(x_1)}. \tag{39}$$

Für die weiteren Zweige erhalten wir allgemein die Gleichungen

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\,n\,\tau_1(X) + \tau_1(x_1)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40}$$

(entsprechend dem Stück links von V_n in Abb. 10) und

$$\eta(X) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\,n\,\tau_1(X) - \tau_1(x_1)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{41}$$

(entsprechend dem Stück rechts von V_n in Abb. 10).

In Abb. 17 sind für $\varepsilon = 1/8$ die ersten Zweige des Resonanzdiagramms für $\delta^2 = 1{,}6$ und $\delta^2 = 16$ gezeichnet. Schreibt man sich $\delta = 2/\eta$ gemäß Gleichung (30) vor, so kann man die hierzu gehörige Resonanzkurve punktweise dadurch bestimmen, daß man sich die Schar der Resonanzkurven für

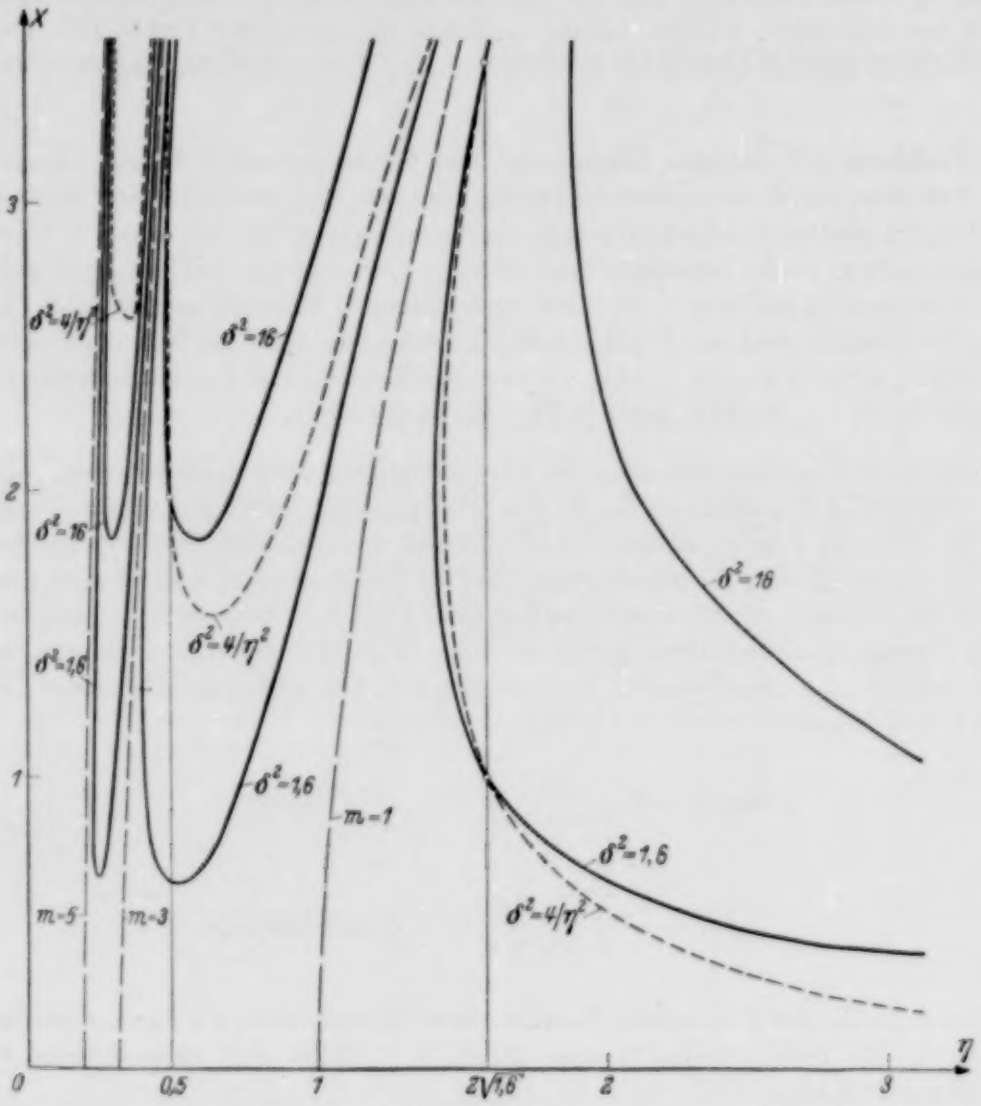


Abb. 17. Resonanzdiagramme für harmonische Zwangsschwingungen bei Stoßerregung im nichtlinearen Fall.

verschiedene feste δ-Werte zeichnet und sodann diejenigen Punkte auf jeder Kurve der Schar markiert, deren Abszisse η jeweils gleich $2/\delta$ ist. Die Kurve, die diese Punkte verbindet, stellt dann die Resonanzkurve für $\delta = 2/\eta$ dar. Sie ist ebenfalls in Abb. 17 eingetragen. Außerdem enthält Abb. 17 auch noch die (mit $m = 1, 3, 5$ bezeichneten) Kurven, die den Zusammenhang zwischen den ungeraden Bruchteilen der Frequenz η_0 der freien Schwingung und der Amplitude X gemäß der Gleichung

$$\eta_0(X) = \frac{1}{m} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_1(X)} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots) \tag{42}$$

herstellen. Diese Kurven werden von sämtlichen Resonanzkurven asymptotisch angenähert.

Für die subharmonischen Schwingungen von der Ordnung $1/n$ gilt das unter Ziff. 2 Gesagte sinngemäß. Es kommen auch hier nur diejenigen Schwingungsformen in Frage, deren Phasenbild zur x-Achse symmetrisch ist. Sie können wieder ähnlich wie in Ziff. 2 bestimmt werden: Man geht von einem Punkt A_0 der x-Achse aus und schreibt sich einen Wert von η und dazu einen Wert von δ (etwa $\delta = 2/\eta$) vor. Von A_0 aus wandert man zuerst um die Strecke $\delta/2$ aufwärts nach B_1, berechnet sodann den Endpunkt C_1 des Phasenkurvenstücks durch B_1 mit der Durchlaufzeit π/η, springt von C_1 aus um δ abwärts bis B_2, setzt hier das nächste Phasenkurvenstück an bis C_2, springt sodann von C_2 aus um δ aufwärts bis B_3 usw. Von dem zur Zeit $n\,\pi/\eta$ erreichten Kurvenpunkt C_n aus geht man schließlich, je nachdem n gerade oder ungerade ist, um die Strecke $\delta/2$ aufwärts oder abwärts und gelangt so zum Endpunkt des Streckenzugs, der, wenn η richtig gewählt worden wäre, wieder auf der x-Achse liegen müßte (Abb. 18). Der richtige Endpunkt E_0 ist samt dem zugehörigen Wert η_0 wieder durch Interpolation zu bestimmen.

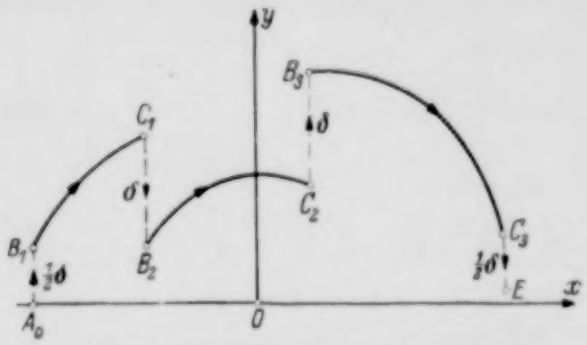


Abb. 18. Zur Bestimmung der subharmonischen Zwangsschwingungen im nichtlinearen Fall.

4. Weitere Probleme mit exakten Lösungen. Der Grundgedanke dieser Untersuchungen, der darin besteht, daß man einen heteronomen Bewegungsvorgang, der sich nur noch näherungsweise berechnen läßt, durch geeignete Abwandlung der zeitabhängigen Glieder seiner Differentialgleichung in eine Folge autonomer, exakt berechenbarer Bewegungsvorgänge auflöst, läßt zahlreiche weitere Anwendungsmöglichkeiten auf dem Gebiet der nichtlinearen Schwingungen zu. So kann man z. B., wenn man den Rechenaufwand nicht scheut, der Lösung der eigentlichen *Duffing*schen Gleichung noch näherkommen, wenn man die Zahl der Sprungstellen bei stückweise konstanter Erregerkraft bzw. die Zahl der Stöße bei Stoßerregung je Periode vergrößert.

Statt der kubischen Parabel kann man für den Schwinger auch jede beliebige andere Kennlinie vorschreiben. Man hat dann allerdings i. a. den Mißstand in Kauf zu nehmen, daß die Integralausdrücke für die Zeit als Funktion des Ausschlags nur noch durch numerische Quadratur zu berechnen sind. Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß es eine ganze Klasse von Kennlinien gibt, die, ebenso wie die kubische Parabel, jede zum Ursprung symmetrische Kennlinie bis zur vierten Ordnung anzunähern gestatten, zur Berechnung des Bewegungsablaufs jedoch lediglich die Kenntnis der elementaren transzendenten Funktionen erfordern. Die Kennlinien haben mit den freien Konstanten $\varkappa^2$ und β die Gleichungen[1]

$$w_0(q) = \varkappa^2 \frac{1}{\beta} \frac{\operatorname{tg} \beta q}{\cos^2 \beta q} \qquad \text{(überlinear)} \tag{43}$$

oder

$$w_0(q) = \varkappa^2 \frac{1}{\beta} \frac{\mathfrak{Tg}\, \beta q}{\mathfrak{Cof}^2 \beta q} \qquad \text{(unterlinear)}. \tag{44}$$

Verwendet man an Stelle der kubischen Parabel diese Kennlinien, so kann man bei periodischer Stoßerregung auch die Resonanzdiagramme allein mit Hilfe der elementaren transzendenten Funktionen exakt berechnen.

Auch die durch ein kubisches Glied erweiterte *Mathieu*sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2q}{dt^2} + (\lambda + \mu \cos t)\,(q + \vartheta\, \mu\, q^3) = 0\,, \tag{45}$$

die sich bisher nur durch Näherungsverfahren für kleine Werte von ϑ behandeln ließ, läßt sich exakt lösen, wenn man die Kosinusfunktion durch eine stückweise konstante periodische Funktion ersetzt, und diese Lösung ist sogar mit Hilfe elementarer Funktionen allein bestimmbar, wenn man statt der zweiten Klammer in (45) einen der Ausdrücke (43) oder (44) benützt[2].

[1] Näheres hierüber etwa bei *H. Kauderer*, Nichtlineare Mechanik, S. 224. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
[2] *H. Kauderer*, a. a. O., S. 585.

Auch erzwungene Schwingungen mit Dämpfung lassen sich noch exakt behandeln. Man hat hierbei allerdings darauf zu achten, daß man die Dämpfungsfunktion so wählt, daß die zugehörigen freien Schwingungen noch exakt (oder wenigstens durch numerisch ausführbare Quadraturen) zu berechnen sind. Dies trifft für nichtlineare Kennlinien zwar nicht bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung zu, wohl aber immer dann, wenn Dämpfungskräfte von der Form

$$D(q, v) = -\frac{v}{|v|} R(q) - a(q)\, v \cdot |v|$$

vorliegen, wobei $v = dq/dt$ ist und R sowie a Konstanten oder auch beliebige Funktionen von q sind. Da sich bei geeigneter Wahl der Funktionen $R(q)$ und $a(q)$ auch selbsterregte Schwingungen exakt berechnen lassen, so wird es schließlich auch möglich sein, für das besonders in der Elektrotechnik wichtige und ziemlich komplizierte Problem der periodischen Zwangsschwingungen mit Selbsterregung, das ebenfalls bisher nur näherungsweise lösbar war, exakte Lösungen anzugeben.

(Eingegangen am 15. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *H. Kauderer*, Hannover, Technische Hochschule.

An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet

By W. T. Koiter

1. Introduction. Research into the vibration characteristics of railway coaches, initiated at the Delft Laboratory of Applied Mechanics some years ago, has indicated the predominant effect of shear deformations in box beams whose shear webs are weakened by rectangular cutouts. In the higher modes of vibration bending deflections are always negligible compared to shear deflections, and the latter may even exceed the bending deflections in the fundamental mode. The accuracy of frequencies and vibration modes, obtained by calculations, therefore depends essentially on the accuracy by which the shear flexibility is determined. Unfortunately no satisfactory rational method is available to estimate the shear flexibility of webs with a row of rectangular cutouts, and an appeal to „sound engineering judgement" has to be made in order to obtain a reasonable approximation. It is therefore hardly surprising, and experience has confirmed this expectation, that considerable differences may occur between estimates made by different engineers. This unsatisfactory state of affairs led to the initiation of a research program on the effect of an infinite row of rectangular holes in an infinite elastic sheet. A satisfactory solution of this problem would provide a firmer basis for the estimation of shear flexibilities for webs with such cutouts.

There is of course little hope that the problem of a plane with a row of rectangular cutouts would be capable of a rigorous solution. On the other hand, an approximate solution is entirely adequate if its error is not too large, say less than 5 percent, and it is hoped that such accuracy may be achieved without excessive effort. The investigation has not yet been completed, but some preliminary results have been obtained for the limiting cases of extremely low holes (collinear horizontal cracks) and extremely narrow holes (a horizontal row of vertical cracks). Although the primary purpose of these limiting cases is to serve as checks on the methods under development for rectangular holes of arbitrary dimensions, they may be of some interest on their own account. The present paper is confined to the problem of an infinite row of collinear cracks. The surprisingly simple solution in closed form is based on *Muskhelishvilis* general theory for the plane with a finite number of straight cuts along one and the same straight line[1,2].

2. Muskhelishvilis theory for the plane with straight cuts[1,2]. If the region S, occupied by the sheet, is the entire plane, cut along n segments L_k of the x-axis ($a_k < x < b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$), the single-valued displacements u, v may be expressed in two analytic functions $\varphi(z)$, $\omega(z)$ of the complex variable $z = x + i\,y$

$$2\,G\,(u + i\,v) = \varkappa\,\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\varphi'(z)}\,, \tag{1}$$

where in the case of generalized plane stress

$$\varkappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}\,, \tag{2}$$

G is the shear modulus, ν is *Poissons* ratio, a dash denotes differentiation with respect to the complex variable z, and a bar indicates the conjugate value of the quantity unter the bar. The stresses are expressed in the derived functions

$$\Phi(z) = \varphi'(z)\,, \qquad \Omega(z) = \omega'(z) \tag{3}$$

by means of the formulae

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]\,, \tag{4}$$

$$\sigma_y - i\,\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}\,. \tag{5}$$

The derived functions (3) are holomorphic in S, i. e. both analytic and single-valued; likewise, the functions $\varphi(z)$ and $\omega(z)$ are also single-valued and hence holomorphic if the resulting force of the surface tractions along any cut vanishes.

[1] *N. I. Muskhelishvili*, The fundamental boundary problems of the theory of elasticity for the plane with straight cuts (in Russian). Soobshcheniya A. N. Gruz. S. S. R., 3 (1942) p. 413.

[2] *N. I. Muskhelishvili*, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Translated from the 3rd Russian edition by J. R. M. Radok, Noordhoff, Groningen (1953) par. 120.

It should be emphasized that the representation of the stresses and displacements by means of the functions $\varphi(z)$ and $\omega(z)$ and their derivatives holds only for the plane cut along segments of the real axis. The advantage of this rather special representation is that the last terms in (1) and (5) vanish along the cuts.

Let σ_1, σ_2 and τ denote the stresses at infinity, and let the rotation vanish at infinity. Introducing the function

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2}, \tag{6}$$

where for all square roots the positive branch on $x > b_k$ is taken, the solution for vanishing surface tractions along the cuts, i. e. the solution for the sheet weakened by cracks from a_k to b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ has the form

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} i \tau, \tag{7}$$

$$\Omega(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2} i \tau, \tag{8}$$

where $P_n(z)$ is a polynomial of degree n

$$P_n(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau) z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \ldots + C_n, \tag{9}$$

and the coefficients $C_1, \ldots C_n$ are determined by the conditions for single-valued displacement

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{P_n(t)}{X(t)}\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n. \tag{10}$$

It is immaterial here whether $X(t)$ is taken to be the value of $X(z)$ on the upper or lower side of the real axis.

In the case of a single crack from $-c$ to $+c$ the solution takes the particularly simple form

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau) \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} i \tau, \tag{11}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau) \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2} i \tau. \tag{12}$$

Omitting the immaterial constants of integration

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau)\sqrt{z^2 - c^2} + \left[\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} i \tau\right] z, \tag{13}$$

$$\omega(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau)\sqrt{z^2 - c^2} - \left[\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} i \tau\right] z. \tag{14}$$

As should have been expected a uni-axial state of stress parallel to the crack ($\sigma_2 = \tau = 0$) is not affected by the presence of the crack.

In order to calculate the increase in strain energy due to the presence of the crack it is convenient to calculate the discontinuity in the displacements across the crack. This discontinuity is obtained from (1), (13) and (14)

$$2G[u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)] = (\varkappa + 1)(i\sigma_2 + \tau)\sqrt{c^2 - x^2}, \tag{15}$$

where $-c < x < c$ and the positive square root has to be taken. Hence

$$u^+ - u^- = 4 \frac{\tau}{E} \sqrt{c^2 - x^2}, \tag{16}$$

$$v^+ - v^- = 4 \frac{\sigma_2}{E} \sqrt{c^2 - x^2}, \tag{17}$$

where $E = 2(1 + \nu) G$ is *Youngs* modulus. The increase in strain energy per unit thickness, due to the presence of the crack, is now given by

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_{-c}^{c} [\tau (u^+ - u^-) + \sigma_2 (v^+ - v^-)]\, dx = \pi c^2 \left(\frac{\tau^2}{E} + \frac{\sigma_2^2}{E}\right). \tag{18}$$

3. An infinite row of collinear cracks. In order to obtain the solution for an infinite row of equal cracks of length $2c$ along the x-axis and spaced at constant intervals $2b$ along this axis ($b > c$), *Muskhelishvili*'s function (6) is rewritten for $(2n+1)$ equal cracks at constant intervals $2b$ by writing[1]

$$a_k = 2kb - c\,, \qquad b_k = 2kb + c\,, \qquad k = -n\,, \ldots -1, 0, 1, \ldots, n\,. \tag{19}$$

The result is

$$X(z) = (-1)^n (2b)^{2n} (n!)^2 \left\{(z+c) \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{z+c}{2kb}\right)^2\right] \cdot (z-c) \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{z-c}{2kb}\right)^2\right]\right\}^{1/2}. \tag{20}$$

In the solution (7), (8) the polynomial $P_n(z)$ is now a polynomial of degree $2n+1$.

If n tends to infinity the expression between colons in (20) may be evaluated by means of the formula[2]

$$z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = \sin z\,.$$

Hence in the limit the expression between colons is

$$\frac{4b^2}{\pi^2} \sin\frac{\pi(z+c)}{2b} \sin\frac{\pi(z-c)}{2b} = \frac{2b^2}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi c}{b} - \cos\frac{\pi z}{b}\right) = \frac{4b^2}{\pi^2}\left(\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right). \tag{21}$$

An obvious „guess" for the solution of the problem for an infinite row of equal cracks is now

$$\Phi(z) = P(z)\left[\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right]^{-1/2} + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} i\tau\,, \tag{22}$$

$$\Omega(z) = P(z)\left[\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right]^{-1/2} - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2} i\tau\,, \tag{23}$$

where the positive branch of the square root in $z = b$ is taken, and $P(z)$ is the „analogue" of the polynomial $P_n(z)$ in (7) and (8) for $n \to \infty$, i. e. an integral function. The tentative solution (22), (23) satisfies the condition that the boundary tractions along the cracks vanish [cf. (5)], and it is therefore correct if an integral function $P(z)$ can be found satisfying the following requirements:

(a) $\Phi(z)$ and $\Omega(z)$ are periodic with period $2b$;

(b) $\Phi(z) \to \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)$ and $\Omega(z) \to -\frac{1}{4}\sigma_1 + \frac{3}{4}\sigma_2 - i\tau$ for $|y| = |\mathrm{Im}\, z| \to \infty$ [cf. (4) and (5)];

(c) $\varphi(z)$ and $\omega(z)$ are single-valued in S, i. e. $\int_{-c}^{c} P(t)\left[\sin^2\frac{\pi t}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right]^{-1/2} dt = 0\,.$

Examination of the function

$$\left[\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right]^{-1/2} \tag{24}$$

reveals that it is multiplied by -1 if z is increased by $2b$. In order that $\Phi(z)$ and $\Omega(z)$ are periodic with period $2b$ [condition (*a*)], the integral function $P(z)$ must therefore have the form

$$P(z) = e^{\pi i z/2b} f(z)\,, \tag{25}$$

where $f(z)$ is an integral periodic function with period $2b$. In order that $\Phi(z)$ and $\Omega(z)$ are bounded for $|\mathrm{Im}\, z| \to \infty$ [condition (*b*)] the function (25) must necessarily have the form

$$P(z) = A \sin\frac{\pi z}{2b} + B \cos\frac{\pi z}{2b}, \tag{26}$$

where A and B are arbitrary complex constants. Condition (*c*) is now easily seen to be satisfied if and only if $B = 0$, and conditions (*b*) are both satisfied by taking $A = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau)$. Hence the solution to the problem of an infinite row of equal cracks is

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau) \sin\frac{\pi z}{2b}\left[\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right]^{-1/2} + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2} i\tau\,, \tag{27}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2 - i\tau) \sin\frac{\pi z}{2b}\left[\sin^2\frac{\pi z}{2b} - \sin^2\frac{\pi c}{2b}\right]^{-1/2} - \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2) - \frac{1}{2} i\tau\,. \tag{28}$$

[1] A related problem (a periodic array of frictionless stamps on a half-plane) was solved by *I. Ya. Shtaerman*, The contact problems of the theory of elasticity (in Russian). Moscow-Leningrad (1949), chapter II, par. 5, in a somewhat similar but more complicated manner.

[2] *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, Modern analysis, 4th ed., Cambridge (1927), par. 7.5.

The functions $q(z)$ and $\omega(z)$ are obtained by integrating (27) and (28). Omitting the immaterial constants of integration the result is

$$q(z) = (\sigma_2 - i\,\tau)\,\frac{i\,b}{\pi}\log\left[\cos\frac{\pi\,z}{2\,b} + \left\{\cos^2\frac{\pi\,z}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right\}^{1/2}\right] + \left[\frac{1}{4}\,(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}\,i\,\tau\right]z\,, \tag{29}$$

$$\omega(z) = (\sigma_2 - i\,\tau)\,\frac{i\,b}{\pi}\log\left[\cos\frac{\pi\,z}{2\,b} + \left\{\cos^2\frac{\pi\,z}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right\}^{1/2}\right] - \left[\frac{1}{4}\,(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}\,i\,\tau\right]z\,, \tag{30}$$

where the positive branch of the square root on the upper side of the cut $-c < x < c$ should be taken. It is easily verified explicitly that the logarithm is indeed single-valued in the region of the sheet. The result again confirms that uni-axial tension parallel to the cracks is unaffected by the cracks.

The discontinuity in the displacements across the crack $-c < x < c$ is now easily calculated from (1), (29) and (30)

$$u^+ - u^- = \frac{8}{\pi}\,\frac{\tau}{E}\,b\log\frac{\cos\frac{\pi\,x}{2\,b} + \left[\cos^2\frac{\pi\,x}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{1/2}}{\cos\frac{\pi\,c}{2\,b}}\,, \tag{31}$$

$$v^+ - v^- = \frac{8}{\pi}\,\frac{\sigma_2}{E}\,b\log\frac{\cos\frac{\pi\,x}{2\,b} + \left[\cos^2\frac{\pi\,x}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{1/2}}{\cos\frac{\pi\,c}{2\,b}}\,, \tag{32}$$

where the positive value of the square root should be taken. The increase in strain energy per crack and per unit thickness of the sheet is now given by

$$\Delta A = \frac{1}{2}\int_{-c}^{c}\left[\tau\,(u^+ - u^-) + \sigma_2\,(v^+ - v^-)\right]dx = \frac{4}{\pi}\,b\left(\frac{\tau^2}{E} + \frac{\sigma_2^2}{E}\right)J\,, \tag{33}$$

where J is the integral

$$J = \int_{-c}^{c}\log\frac{\cos\frac{\pi\,x}{2\,b} + \left[\cos^2\frac{\pi\,x}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{1/2}}{\cos\frac{\pi\,c}{2\,b}}\,dx\,. \tag{34}$$

Integrating by parts this integral may be reduced to

$$J = \frac{\pi}{2\,b}\int_{-c}^{c}\sin\frac{\pi\,x}{2\,b}\left[\cos^2\frac{\pi\,x}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{-1/2}x\,dx = -\frac{\pi}{4\,b}\int_{L}\sin\frac{\pi\,z}{2\,b}\left[\cos^2\frac{\pi\,z}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{-1/2}z\,dz\,, \tag{35}$$

where L is a contour in S around the crack $-c < x < c$, which does not enclose or cut any other crack. In order to evaluate this integral it is observed that

$$\sin\frac{\pi\,z}{2\,b}\left[\cos^2\frac{\pi\,z}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{-1/2} \to i \quad \text{for} \quad |y| = |\mathrm{Im}\,z| \to \infty\,. \tag{36}$$

Since $\int_L z\,dz = 0$, (35) may be rewritten as

$$J = -\frac{\pi}{4\,b}\int_{L}\left\{\sin\frac{\pi\,z}{2\,b}\left[\cos^2\frac{\pi\,z}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{-1/2} - i\right\}z\,dz\,. \tag{37}$$

Deforming L into the rectangle $z_1\,z_2\,z_3\,z_4$, where $z_1 = b - i\,\eta$, $z_2 = b + i\,\eta$, $z_3 = -b + i\,\eta$, $z_4 = -b - i\,\eta$, the contributions of the sides $z_2\,z_3$ and $z_4\,z_1$ tend to zero for $\eta \to \infty$. Because the cofactor of z in (37) is periodic with period $2\,b$, the integral may be replaced by

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\pi}{2}\int_{b-i\,\infty}^{b+i\,\infty}\left\{\sin\frac{\pi\,z}{2\,b}\left[\cos^2\frac{\pi\,z}{2\,b} - \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{-1/2} - i\right\}dz \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\cosh\frac{\pi\,y}{2\,b}\left[\sinh^2\frac{\pi\,y}{2\,b} + \cos^2\frac{\pi\,c}{2\,b}\right]^{-1/2} - 1\right\}dy\,. \end{aligned} \tag{38}$$

By means of the substitution $\sinh \frac{\pi y}{2b} = t$, the integral (38) may be evaluated by standard formulae. The result is

$$J = -2b \log \cos \frac{\pi c}{2b}, \tag{39}$$

and the final formula for the increase in strain energy per crack is

$$\Delta A = -\frac{8b^2}{\pi}\left(\frac{\tau^2}{E} + \frac{\sigma_2^2}{E}\right) \log \cos \frac{\pi c}{2b}. \tag{40}$$

It is of some interest to compare this result to the result for a single crack, given by (18). It is easily seen that for $c/b \to 0$ the result (40) is indeed equivalent to (18). The ratio of (40) and (18) is given by

$$\frac{\Delta A(c/b)}{\Delta A(0)} = -\frac{8b^2}{\pi^2 c^2} \log \cos \frac{\pi c}{2b}. \tag{41}$$

This ratio is plotted in Fig. 1, and it appears that an appreciable interference between the cracks does not occur unless the crack width $2c$ exceeds approximately half the period $2b$.

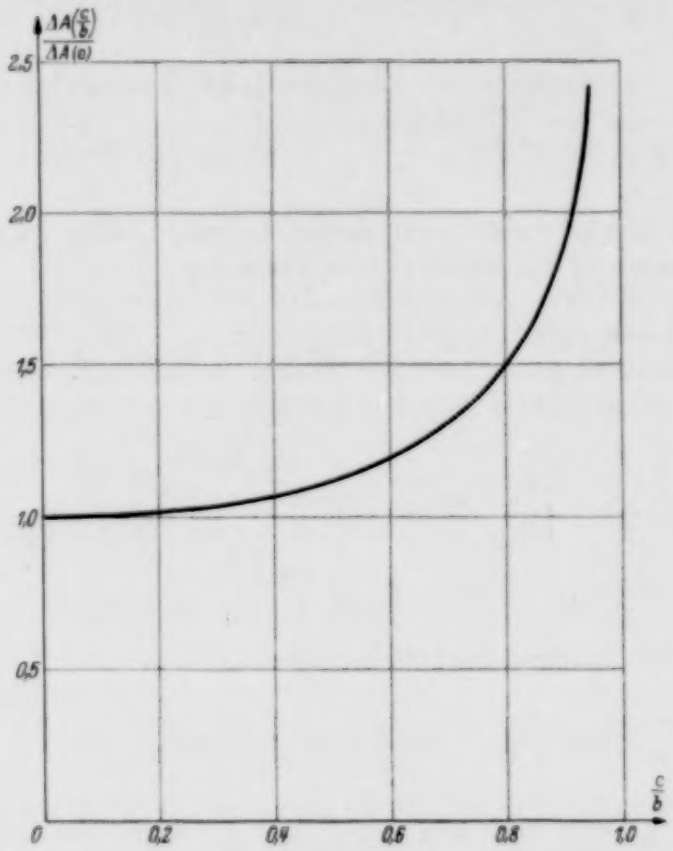


Fig. 1. The ratio of the increase in strain energy per crack of width $2c$, in the case of periodic cracks with period $2b$, to the increase in strain energy due to a single crack of width $2c$.

Another interesting feature of the solution is that the (absolute) increase in strain energy is the same for shear and transverse tension if the corresponding stresses at infinity are numerically equal. The relative increase in strain energy is for transverse tension a factor $E/G = 2(1 + \nu)$ higher than for shear.

(Eingegangen am 20. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *W. T. Koiter*, Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der Techn. Hogeschool Delft (Holland) Prof. Mekelweg 2.

Die Durchbiegung stark belasteter, einseitig eingespannter Biegungsfedern

Von **Helmut Leinß**

1. Übersicht. Formeln für die elastische Durchbiegung verschiedenartig eingespannter und unterstützter Träger oder Biegungsfedern findet man in jedem technischen Handbuch. Man weiß, daß sie nur für geringe Durchbiegungen gültig sind, aber man kennt gewöhnlich nicht die Gültigkeitsgrenze. Sie ist im Gebiet des Hochbaus belanglos, wo die Durchbiegungen nur winzigen Bruchteilen der Trägerlängen gleichkommen; aber in der Feinwerktechnik gibt es da und dort — an sehr dünnen Federbändern — Durchbiegungen, die noch elastisch sind, aber erhebliche Bruchteile der Längen darstellen (z. B. $^1/_5 \cdots {}^1/_3$ der Länge). Man hat z. B. ein dünnes Federblatt an einem Ende eingespannt und hängt ans andere Ende verschiedene Gewichte, um die Federkennlinie und daraus den Elastizitätsmodul des Werkstoffes zu bestimmen. Man wird dann finden, daß mit wachsender Last die Kennlinie (d. h. Last abhängig von der Durchbiegung aufgetragen) sich von ihrer anfänglichen Richtung aufkrümmt (Abb. 1); die Durchbiegung nimmt langsamer als anfangs mit der Last zu.

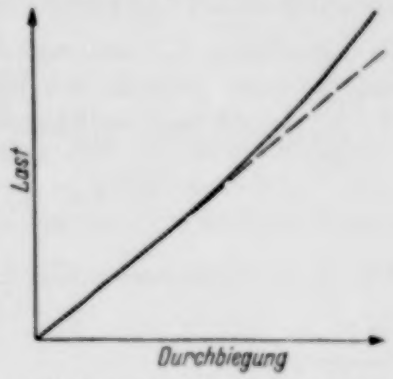


Abb. 1. Aufgebogene Federkennlinie.

„Das sind eben Ablesungsfehler" ist man zu sagen geneigt und zieht eine vermittelnde Gerade durch die aufgezeichneten Versuchswerte, ohne sich darüber klar zu sein, daß die Abweichung gesetzmäßig ist und man mit der „mittleren" Geraden eine unnötige Ungenauigkeit begeht. Man wertet gute Meßergebnisse vergröbert aus, was im Hinblick auf den Versuchsaufwand schade ist.

Der zunehmende Anstieg der Kennlinie ist bei größeren, aber noch rein elastischen Durchbiegungen eine Folge von zwei merkbar werdenden Einflüssen, die an der Grundgleichung der elastischen Durchbiegung

$$1/\varrho = M/EJ \tag{1}$$

darzulegen sind: Einmal nimmt der Hebelarm der Last (senkrecht auf deren Wirkungslinie) wegen des starken Durchhangs merklich ab (Abb. 2) — so wird M kleiner und mit ihm die Krümmung ϱ, also auch Durchbiegung —; zum anderen sind alle Formeln der Handbücher mit der für kleine Durchbiegungen y statthaften Näherung

$$1/\varrho \approx y'' \quad (\text{statt } = y''/(1+y'^2)^{3/2})$$

gewonnen. Im vorliegenden Fall aber ist die Neigung des Trägers ansehnlich, so daß gegenüber der üblichen Rechnung hier auf der linken Seite der Grundgleichung ein merkbarer Wert > 1 im Nenner steht. Bringt man diesen Wert auf die rechte Seite, so ist das Moment gleichsam um einen Faktor vergrößert und damit die Durchbiegung erhöht. Die beiden Einflüsse heben sich also teilweise auf, was günstig ist.

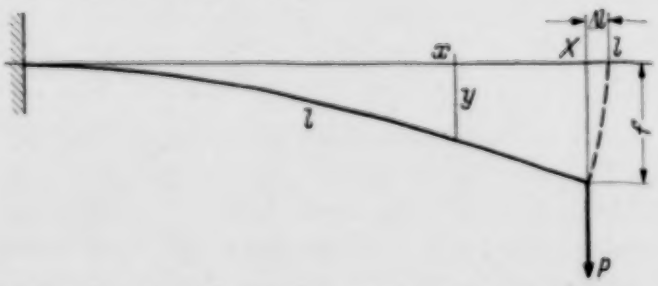


Abb. 2. Verkürzung des Hebelarms an der durchgebogenen Feder.

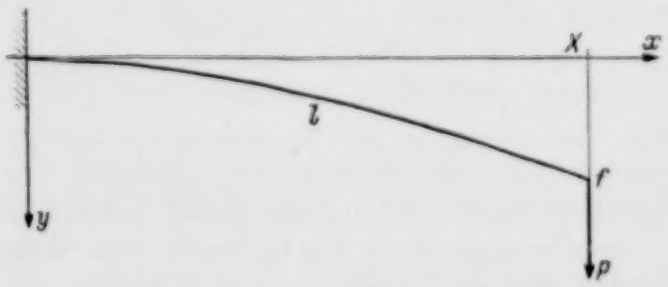


Abb. 3. Ausgangsfigur für die Berechnung.

2. Der Ort des Federendes bei starkem Durchhang. Die Verhältnisse seien am einfachsten Fall, der einseitig eingespannten Feder, studiert: Wie auch die Feder durchhängen mag, immer bleibt ihre Länge l, gemessen in der neutralen Faser, praktisch unverändert. Sie ist bekanntlich (Abb. 3)

$$l = \int_0^X \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{2}$$

X ist die Abszisse des Trägerendes, $l - X$ ist die Verkürzung des Lasthebelarms. Mangels genauer Daten nehmen wir als vorläufige elastische Linie des Trägers die für kleine Durchbiegungen an („Handbuchformel"):

$$y = \frac{P l x^2}{2 E J}\left(1 - \frac{x}{3l}\right), \tag{3}$$

die wir bei unserer Unterscheidung zwischen l und X exakter schreiben (l rührt von der Einsetzung eines Momentes $P l$, das exakt $P X$ ist):

$$y = \frac{P X x^2}{2 E J}(1 - x/3 X). \tag{3'}$$

Die Ableitung

$$y' = \frac{P X}{E J}\left(x - \frac{x^2}{2 X}\right) \tag{3''}$$

in Gleichung (2) einsetzend, in eine Reihe entwickelnd und integrierend erhält man, nachdem zuletzt noch mittels der Beziehung am Trägerende $f = P X^3/3 E J$ die Konstante $P/E J$ durch $3 f/X^3$ ersetzt und verhältnismäßige Durchhänge f/X eingesetzt wurden,

$$l = X\left(1 + \frac{3}{5}(f/X)^2 - \frac{9}{35}(f/X)^4 + \frac{243}{1001}(f/X)^6 - + \cdots\right). \tag{4}$$

Für die 3 verhältnismäßigen Durchhänge

	$f/X = 0{,}1$	0,2	0,3
findet man	$X/l = 0{,}994$	0,977	0,951 .

Diese Werte decken sich bis auf wenige v. T. mit denen eines Kreisbogens, einer Parabel 2. Ordnung und den z. B. in Hütte I 28. Aufl. S. 142 angegebenen Näherungswerten für einen beliebigen flachen Bogen.

3. Die Verkürzung des Hebelarms der Last P bei Durchhang. Wir führen statt des Hebelarms X, der aus Gleichung (4) nicht explizit angeschrieben werden kann, seine Verkürzung

$$\Delta l = l - X$$

ein, die als kleiner Wert ihre Glieder höheren Grades ohne Schaden streichen lassen wird. So mag die Formel am Ende einfach werden. Ersetzt man also X durch $l - \Delta l$, geht auf Verhältniswerte $\Delta l/l$ und f/l über und streicht alle Glieder $\Delta l/l$ höher als 2. Grades und alle Glieder f/l höher als 4. Grades als unwichtige Brüche, dann kommt zuletzt aus einer quadratischen Gleichung die verhältnismäßige Verkürzung des Hebelarms der Last

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l} = \frac{3}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^2\left(1 + \frac{6}{35}\left(\frac{f}{l}\right)^2\right), \tag{5}$$

wo man nach Belieben das letzte Glied auch noch streichen kann, da es selbst bei $f/l = 0{,}3$ nur 1,5% zum Wert beiträgt:

$f/l = 0{,}1$	0,2	0,3
$\lambda = 0{,}006\ (1 + 0{,}0017)$	$0{,}024\ (1 + 0{,}0069)$	$0{,}054\ (1 + 0{,}0154)$
$= 0{,}006$	0,024	0,055 .

Die Verkürzung beträgt immerhin reichlich 5% bei einem verhältnismäßigen Durchhang $f/l = 0{,}3$. Diesen, dem eine größte Biegespannung $\sigma_b = 0{,}45\ E\ h/l$ entspricht[1], erträgt z. B. ein hartgewalztes Stahlfederband von 0,2 mm Dicke statisch völlig elastisch, wenn die freie Länge l mindestens 11 mm beträgt ($\sigma_b = 160$ kg/mm²). Bei längeren Federn darf der verhältnismäßige Durchhang noch größer als 0,3 sein.

Ich erinnere daran, daß Gleichung (5) auf der vorläufigen Annahme (3) der elastischen Linie nach der Handbuchformel aufgebaut ist. Die nach Gleichung (4) feststellbare geringe Abweichung der Bogenlänge der vorläufigen elastischen Linie, der Parabel 2. Ordnung, des Kreisbogens und der allgemeinen Näherungslinie voneinander legt nahe, daß Gleichung (5) für alle weiteren Verfeinerungen schon ausreichend genau ist. Vom Nachweis sei hier abgesehen.

[1] $\sigma_b = M/W = P l/W$ und die Handbuchformel $f = P l^3/3 E J$ zusammengenommen ergeben für rechteckigen Federquerschnitt $\sigma_b = 3 E h f/2 l^2$ und für $f/l = 0{,}3$ diese Formel.

4. Der Durchhang des freien Trägerendes. Wir schreiben jetzt Gleichung (1) für den vorliegenden Fall

$$E J \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = P(l - \Delta l - x),$$

oder mit $a = E J / P l$ und Näherungswert für die Nennerwurzel

$$a \frac{y''}{1+\frac{3}{2}y'^2} \approx 1 - \lambda - \frac{x}{l}. \tag{6}$$

Integriert ergibt das

$$y' = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3/2}}{a}\left[(1-\lambda)x - \frac{x^2}{2l}\right]\right). \tag{7}$$

Wir vergleichen diesen neuen Wert y' mit dem anfänglichen y' nach Gleichung (3″) und finden

$$\text{neues } y' = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \text{anfängliches } y'\right).$$

Der Unterschied der beiden y' ist für Werte y' bis 0,5 offenbar so gering, daß er für das Folgende außer Betracht bleiben kann. Wird nun in Gleichung (7) der tg in eine Reihe entwickelt und diese nach dem 3. Gliede abgebrochen und von $x = 0$ bis $x = l(1-\lambda)$ integriert, so findet man für $x = X = l(1-\lambda)$ den Durchhang

$$f = \frac{(1-\lambda)^3 l^2}{a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35}\frac{(1-\lambda)^4 l^2}{a^2} + \frac{4}{1155}\frac{(1-\lambda)^8 l^4}{a^4}\right). \tag{8}$$

Ist $(1-\lambda) l/a \lessgtr 1$, so trägt das letzte Glied weniger als 1% zum Ergebnis bei, so daß es ohne Schaden fortbleibt. Mittels der Beziehung $\sigma_{max} = M_b/W_b$ und $W_b = J/(h/2)$ kann man weiterhin

$$(1-\lambda)\, l/a = \frac{2l}{h}\frac{\sigma_{max}}{E} \tag{9}$$

setzen.

Dieser Ausdruck bleibt < 1, wenn das Verhältnis Trägerhöhe zu doppelter Trägerlänge $h/2l > \sigma_{max}/E$ ist. σ_{max}/E aber ist im Fall höchster Beanspruchung (bis an die Streckgrenze heran) bei harten Federbändern aus Stahl und Tombak höchstens $9 \cdot 10^{-3}$. Deshalb ist das letzte Glied zu streichen, sobald (ungefähr)

$$l > 50\, h,$$

was wir von jetzt ab voraussetzen wollen, und der Durchhang ist dann

$$f = \frac{(1-\lambda)^3 l^2}{a}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35}(1-\lambda)^4\left(\frac{l}{a}\right)^2\right) \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{E J}{P l}. \tag{8'}$$

Das erste Glied $^1/_3$ in der Klammer steht schon in der Handbuchformel; das zweite Glied zusammen mit $(1-\lambda)^3$ vorn gibt die Korrektur bei starkem Durchhang.

Das Gegeneinanderwirken zweier Einflüsse, am Schluß der Übersicht besprochen, drückt sich in Gleichung (8′) deutlich aus: der eine den Durchhang mildernde wirkt in $(1-\lambda)^3$, der andere ihn mehrende wirkt als 2. Glied der Klammer. Bei einem Durchhang $f/l = 0{,}3$ ist der erste Einfluß etwa −16%, bei $l = 55\, h$ der 2. etwa +9%; bei ihrem Gegeneinanderwirken bleibt noch eine Abweichung um −8% vom Handbuchformelwert: eben jene scheinbare Versteifung der Feder bei größerer Durchbiegung.

Die nächste Frage ist, wann man von der Handbuchformel (Gleichung (3) für $x = l$) auf die verfeinerte Formel (8′) übergehen soll. Als Verhältnis der Durchbiegungen, verfeinert und einfach, wird berechnet:

$$f/f_0 = (1-\lambda)^3\left(1 + \frac{27}{35}(1-\lambda)^4 (f_0/l)^2\right). \tag{10}$$

Daraus folgt, daß die einfache Handbuchformel (3) für $x = l$

bis $f/l = 0{,}1$ mit einem Fehler unter 1%
bis $f/l = 0{,}15$ mit einem Fehler unter 2,5%

die Durchbiegung f gibt, also in diesen Bereichen unbedenklich ist bzw. noch gebraucht werden kann.

5. Elimination der Zwischengröße λ. Gleichung (8′) ist noch nicht direkt anwendbar, weil sie die Zwischengröße λ enthält. Wir entfernen λ, indem wir das mit (5) aufgestellte $1-\lambda$ in (8′) einsetzen. Dabei lassen wir alle Glieder ab $(f/l)^6$ weg, weil sie ja schon in (5) und (8′) fehlen, und erhalten

$$f=\frac{l^2}{a}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{9}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^2+\frac{27}{35}\left(\frac{f}{l}\right)^4\right)+\frac{(l/a)^2}{35}\left(1-\frac{21}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^2+\frac{171}{25}\left(\frac{f}{l}\right)^4\right)\right]. \tag{8″}$$

Um zur geschlossen lösbaren quadratischen Gleichung für f zu kommen, müssen wir auf die Glieder mit $(f/l)^4$ verzichten (sie tragen höchstens wenige v. H. zum Ergebnis bei) und finden

$$f=\frac{5}{6}a\,\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{5}(l/a)^2\left[1+\frac{2}{7}(l/a)^2+\frac{1}{58}(l/a)^4\right]}}{1+(l/a)^2/5} \qquad \text{mit} \qquad a=\frac{EJ}{Pl}, \tag{8‴}$$

wobei das praktisch unerhebliche 3. Glied in der Klammer wegbleiben kann.

6. Eine Näherungsformel. Versuchsergebnisse. Folgender Weg führt auf eine einfachere, genäherte Formel für f: Das Zusatzglied 1/35 ... in Gleichung (8′) ist klein gegen 1/3; deshalb können wir ohne es aus (8′) den Wert l/a genügend genau berechnen, um ihn hernach in das Zusatzglied einzusetzen.

Man erhält so

$$l/a\approx\frac{3\,f/l}{(1-\lambda)^3}$$

und das Zusatzglied

$$1/35\ldots\approx\frac{9}{35}\frac{(f/l)^2}{(1-\lambda)^2}.$$

Mit diesem Wert in Gleichung (8′) errechnen wir nochmals l/a und erhalten damit, indem wir gemäß Gleichung (5) $(f/l)^2$ durch $5/3\cdot\lambda$ ersetzen, nach einiger Zwischenrechnung

$$f=\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{7}\lambda\right)\frac{l^2}{a}. \tag{11′}$$

$\lambda\approx 3/5\cdot(f/l)^2$ gemäß Gleichung (5) ist noch einzusetzen, und es ergibt sich

$$f\approx\left(\frac{1}{3}-\frac{12}{35}(f/l)^2\right)\frac{l^2}{a}$$

oder, wenn wir im Zusatzglied statt 35 genähert 36 schreiben,

$$f\approx(1-(f/l)^2)\frac{l^2}{3\,a}. \tag{11″}$$

Schreiben wir dies als quadratische Gleichung, so kommt daraus

$$f\approx\frac{3}{2}a\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\,\frac{l}{a}\right)^2}\right) \qquad \text{mit} \qquad a=\frac{EJ}{Pl}. \tag{11‴}$$

Nun interessiert, wie sich Theorie und Wirklichkeit zueinander verhalten. Dazu wurde eine Blattfeder aus Stahl vom Querschnitt $0{,}584\times 12{,}90$ mm (Durchschnitte aus Messungen an verschiedenen Stellen), also $J=0{,}214$ mm⁴, und mit der freien Länge $l=150$ mm eingespannt und am freien Ende in Stufen von 5, dann 10, nachher 20, zuletzt 50 g belastet bis zu $P=400$ g und einer Durchbiegung $f=76{,}3$ mm. (Da war f/l über 0,5 bei einer geringen bleibenden Durchbiegung von 0,2 mm!). Aus der Anfangstangente der mit 23 Meßpunkten belegten Kennlinie ergab sich $E=20200$ kg/mm². Damit waren alle Bestandteile der Größe a vorhanden und ich erhielt folgende Vergleichswerte:

P =	0,070	0,140	0,210	0,280	0,350	0,420 kg
$a=EJ/Pl$ =	412,7	206,3	137,6	103,2	82,5	68,8 mm
f aus (8‴) =	17,89	34,24	47,75	58,02	65,26	70,05 mm
f aus (11‴) =	17,92	34,44	48,75	60,77	70,69	78,88 mm
f gemessen =	18,0	34,7	49,0	60,6	70,4	78,5 mm
hierbei f/l ≈	0,12	0,23	0,33	0,40	0,47	0,52

Bis $f/l \approx 0{,}25$ unterscheiden sich gemessener und (sowohl nach Gleichung (8‴) wie (11‴)) gerechneter Durchhang praktisch nicht; bei $f/l = 0{,}33$ gehen sie, wenn mit der streng hergeleiteten Gleichung (8‴) gerechnet wird, um 2,5% und weiterhin zunehmend auseinander. Dagegen folgt die Näherungsformel (11‴) den wirklichen Durchhängen hier bis zuletzt erstaunlich gut. Das kann ein Zufall bei der einen untersuchten Blattfeder sein. Deshalb möchte ich mit der Mitteilung der Formel (11‴) auch anregen, daß gelegentlich bei Durchbiegungsmessungen geprüft werde, ob sie immer genauer als (8‴) den tiefsten Durchhängen folgt.

Diese Untersuchung galt der Erprobung der Rechenformeln; die folgenden beiden Beispiele bringen eine praktische Fragestellung: Ein Bimetallstreifen von $0{,}2 \times 5{,}5$ mm Querschnitt, mit dem Trägheitsmoment $J = 3{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm⁴ und der freien Länge $l = 50$ mm wies bei $P = 5$ g Belastung am Ende eine Durchbiegung $f = 5{,}0$ mm, bei $P = 15$ g Belastung $f = 14{,}3$ mm auf. Ein anderer Bimetallstreifen mit $J = 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ mm⁴ und $l = 50$ mm ergab für $P = 5$ g $f = 4{,}7$ mm, für $P = 15$ g $f = 13{,}3$ mm. Wie groß ist der Elastizitätsmodul der beiden Streifen?

Um verläßlich zu treffen, würde man für die Handbuchformel $f = P l^3/3 E J$ nur die Durchbiegungen bei 5 g Belastung verwenden ($f/l \approx 0{,}1$), müßte jedoch bei der Meßgenauigkeit $\pm 0{,}1$ mm eine Toleranz von $\pm 0{,}1/5{,}0 = \pm 2\%$ für f von vorn herein in Kauf nehmen (bei $f = 14$ mm nur noch $\pm 0{,}7\%$). Es ergäbe sich dann

$$E = P l^3/3 J f = 10\,700 \text{ kg/mm}^2 \text{ für den einen,}$$
$$= 12\,000 \text{ kg/mm}^2 \text{ für den anderen Streifen.}$$

(Bei den Durchbiegungen zu $P = 15$ g ergäben sich $E = 11\,200$ bzw. $12\,700$ kg/mm²).

Rechnet man in der hier entwickelten Weise, so wird man aus der bei $f/l \approx 0{,}28$ mit (8‴) noch fast gleichwertigen, einfacheren Formel (11‴) zunächst a und daraus E herausstellen in der Auswertungsgleichung

$$E = \frac{P l}{3 J} \frac{l^2 - f^2}{f}. \tag{12}$$

Hiermit ergibt sich für

	$P =$ 5	15 g	Mittel	Abweichung
1. Streifen	$E =$ 10580	10290	10435 kg/mm²	$\pm 1{,}4\%$
2. Streifen	$E =$ 11875	11800	11840 kg/mm²	$\pm 0{,}3\%$

Obwohl bei diesen Bimetallstreifen alle Maße kleiner sind als bei der Erprobungsfeder und daher Meßfehler sich stärker auswirken, ist die Genauigkeit der ermittelten Elastizitätsmodule offenbar recht gut.

Hier wurde nur der einfachste Fall einer Biegungsfeder, die einseitig eingespannte Feder untersucht. Bei anderen Biegungsfedern müßten sich ähnliche Korrekturen bei tiefer Durchbiegung ergeben; freilich sind sie durch ihre mehrfache Einspannung weniger beweglich und können sich deshalb in ihrer Durchbiegung günstigerweise noch weniger von der „Handbuchformel" entfernen.

(Mitteilung aus der Stoffentwicklung der Robert Bosch GmbH., Stuttgart).

(Eingegangen am 11. Dezember 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Helmut Leinß*, Stuttgart-Vaihingen, Kirschblütenweg 25a.

Zur Thermo-Gasdynamik der Strömung im zylindrischen Rohr

Von **O. Lutz**

1. Einleitung. Strömungen in Rohren sind bislang entweder nur gasdynamisch behandelt worden — Strömungsvorgänge in Düsen, Verdichtern, Turbinen— oder aber nur thermisch bezüglich des Wärmetausches mit der Wand. Viele neuere Probleme — bei Gasturbinen, in Flugzeugtriebwerken, in Windkanälen, in der Reaktortechnik — dürfen aber weder die eine noch die andere Erscheinung vernachlässigen.

Nun besteht zwischen dem Wärmeaustausch und dem Turbulenzvorgang in ausgebildeten Strömungen eine Analogie, auf die wohl zuerst *Reynolds*, später unabhängig davon *Prandtl* hingewiesen hat. Nach ihr ist das Verhältnis der in einer Rohrstrecke ausgetauschten Wärmemenge zum befördernden Temperaturgefälle zwischen Gas und Wand proportional dem Verhältnis des Druckverlustes auf dieser Strecke zum dynamischen Druck, und zwar gilt

$$2\,\frac{\Delta T}{T_{g,w}-T_w}=\frac{\Delta p}{\frac{\varrho}{2}\,w^2}\,, \tag{1}$$

wobei ΔT und Δp der Temperatur- und Druckverlust in der Rohrstrecke (im Grenzfall dem Strekkenelement dx), $T_{g,w}$ die Gastemperatur an der Wand, T_w die Wandtemperatur und $\frac{\varrho}{2}\,w^2$ der dynamische Druck in der Strömung sind. Gleichung (1) ist im Unterschallgebiet bereits gut bestätigt; im Überschallgebiet zeigen erste Messungen ebenfalls ihre grundsätzliche Richtigkeit[1].

Nachstehend wird nun die Strömung im zylindrischen Rohr — isoplane Strömung — unter der Annahme behandelt, daß Gleichung (1) sowohl im Unterschall- als auch im Überschallgebiet zutrifft. Es zeigt sich, daß das Problem so normiert werden kann, daß nur zwei Veränderliche — eine Temperaturfunktion und eine Geschwindigkeitsfunktion — auftreten, für welche die resultierende Differentialgleichung schrittweise gelöst werden kann.

Eine besondere Diagrammform, die diesen Funktionen angepaßt ist, bringt eine gute Übersicht über das gesamte Feld der Erscheinungen und erlaubt eine allgemeine Diskussion.

2. Ableitung und Normierung. Für die Rohrströmung mit dem Druckverlust Δp gilt

$$\varrho\,w\,dw+\Delta p=-dp\,, \tag{2}$$

also mit (1)

$$\varrho\,w\,dw-\varrho\,w^2\,\frac{dT}{T_{g,w}-T_w}=-dp\,. \tag{2a}$$

Für die isoplane Strömung — konstanter Querschnitt — muß die Stromdichte $\varrho\,w$ konstant bleiben:

$$\varrho\,w=\varrho_0\,w_0\,. \tag{3}$$

Die Gastemperatur an der Wand $T_{g,w}$ ist nicht gleich der statischen Temperatur T des Gases, sondern um 83 bis 90% des gasdynamischen Anteils $\frac{w^2}{2\,g\,c_p}$ höher.

In Näherung wird der ganze Anteil $\frac{w^2}{2\,g\,c_p}$ zugeschlagen, es wird also mit der Gesamttemperatur

$$T_0=T+\frac{w^2}{2\,g\,c_p} \tag{4}$$

gerechnet — der mögliche Fehler verschwindet bei größeren Temperaturunterschieden und ist auch bei geringen Unterschieden erträglich wegen der Unsicherheit des Faktors 2 in Gleichung (1). Damit geht (2a) über in

$$dw-w\,\frac{dT_0}{T_0-T_w}=-\frac{dp}{\varrho_0\,w_0}\,. \tag{2b}$$

[1] Vgl. *A. H. Shapiro*, Compressible Fluid Flow, New York 1953, Bd. 1, S. 243ff. und die dort angegebene Literatur.

Berücksichtigt man noch die Gasgleichung für die Isoplane:

$$p = g\,\varrho\,R\,T \qquad \text{oder} \qquad \frac{p}{\varrho_0\,w_0} = \frac{g\,R\,T}{w}\,, \tag{5}$$

so kann man aus (2b), (4) und (5) eine Beziehung zwischen w und T_0 herstellen. Folgende Normierung empfiehlt sich dabei, wenn die Wandtemperatur T_w als konstant betrachtet werden darf:

$$\mathfrak{W} = \frac{w^2}{g\,R\,T_w}\,, \tag{6}$$

$$\delta_0 = \frac{T_0}{T_w}\,, \tag{7}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{p}{\varrho_0\,w_0\sqrt{g\,R\,T_w}}\,. \tag{8}$$

Zunächst folgt aus (2b)

$$d\mathfrak{W} - 2\,\mathfrak{W}\frac{d\delta_0}{\delta_0 - 1} = -\,2\sqrt{\mathfrak{W}}\cdot d\mathfrak{P}\,, \tag{2c}$$

und aus (5) mit Hilfe von (4), (7) und (8):

$$\mathfrak{P} = \frac{\delta_0}{\sqrt{\mathfrak{W}}} - \frac{\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\sqrt{\mathfrak{W}}\,. \tag{9}$$

Eliminiert man schließlich $\mathfrak{P}$ aus (2c) und (9), so kommt

$$\frac{d\delta_0}{d\mathfrak{W}} = \frac{(\delta_0 - 1)\left(\frac{\varkappa + 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} - \delta_0\right)}{2\,\mathfrak{W}\,(\mathfrak{W} - \delta_0 + 1)}\,. \tag{10}$$

Die Differentialgleichung ist vom *Abel*schen Typ zweiter Art[1]; eine geschlossene Lösung scheint nicht möglich. Die Gleichung ist deshalb numerisch gelöst worden[2].

3. Darstellung der Ergebnisse. Die anschaulichste und dabei einfachste Form der Darstellung ergibt das $\delta_0, \mathfrak{W}$-Diagramm, dessen grundsätzlichen Aufbau die Abbildung zeigt. Nach (4) und der vorgenommenen Normierung gilt für die statischen Temperaturen — normiert durch

$$\delta = \frac{T}{T_w} \tag{11}$$

die lineare Beziehung

$$\delta = \delta_0 - \frac{\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W}\,; \tag{4a}$$

die Isothermen $\delta = \text{const}$ sind also Geraden im $\delta_0, \mathfrak{W}$-Diagramm mit der Neigung $\frac{\varkappa - 1}{2\,\varkappa}$.

Die Isobaren $\mathfrak{P} = \text{const}$ sind nach

$$\delta_0 = \mathfrak{P}\sqrt{\mathfrak{W}} + \frac{\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} \tag{9a}$$

Parabeln, die sich auf den Isothermen aufbauen. Die Gerade $\delta_0 = \frac{\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W}$ begrenzt das Diagramm nach unten ($\mathfrak{P} = 0$).

Die nach (10) zu findenden Isoplanen müssen sowohl für

$$\delta_0 = 1 \tag{12}$$

als auch für

$$\delta_0 = \frac{\varkappa + 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} \tag{12a}$$

horizontale Tangenten aufweisen. Der erste Fall ist trivial: für $\delta_0 = 1$ ist die Gesamttemperatur T_0 gleich der Wandtemperatur, nach unserer Voraussetzung findet also kein Wärmeaustausch statt. Die Linie $\delta_0 = 1$ trennt also das „Abkühlgebiet" (oben, $T_0 > T_w$) von dem „Aufheizgebiet" (unten, $T_0 < T_w$). Für kleine Abweichungen $\Delta\delta$ von dieser Grenze, also

$$\delta_0 = 1 + \Delta\delta \tag{13}$$

[1] Vgl. etwa *E. Kamke*, Differentialgleichungen, Bd. 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Aufl. S. 26.

[2] Eine graphische Tafel wird z. Zt. im Institut für Strahltriebwerke der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt, Braunschweig, erstellt. Herrn Dipl.-Ing. *Alvermann* und Frau *Müller* bin ich für die Auswertung zu Dank verpflichtet.

wird aus (10) zunächst

$$\frac{d\Delta\delta}{d\mathfrak{W}} = \frac{\Delta\delta}{2\,\mathfrak{W}^2}\left(\frac{\varkappa+1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} - 1\right) \tag{10a}$$

mit der Lösung

$$\Delta\delta^2 = C\,\mathfrak{W}^{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\,e^{\frac{1}{\mathfrak{W}}}. \tag{14}$$

Bei kleinen Temperaturunterschieden zwischen Gas und Wand liegen die Isoplanen demnach symmetrisch zur „neutralen" Linie $\delta_0 = 1$. Sie besitzen bei

$$\mathfrak{W} = \frac{2\,\varkappa}{\varkappa+1} \tag{15}$$

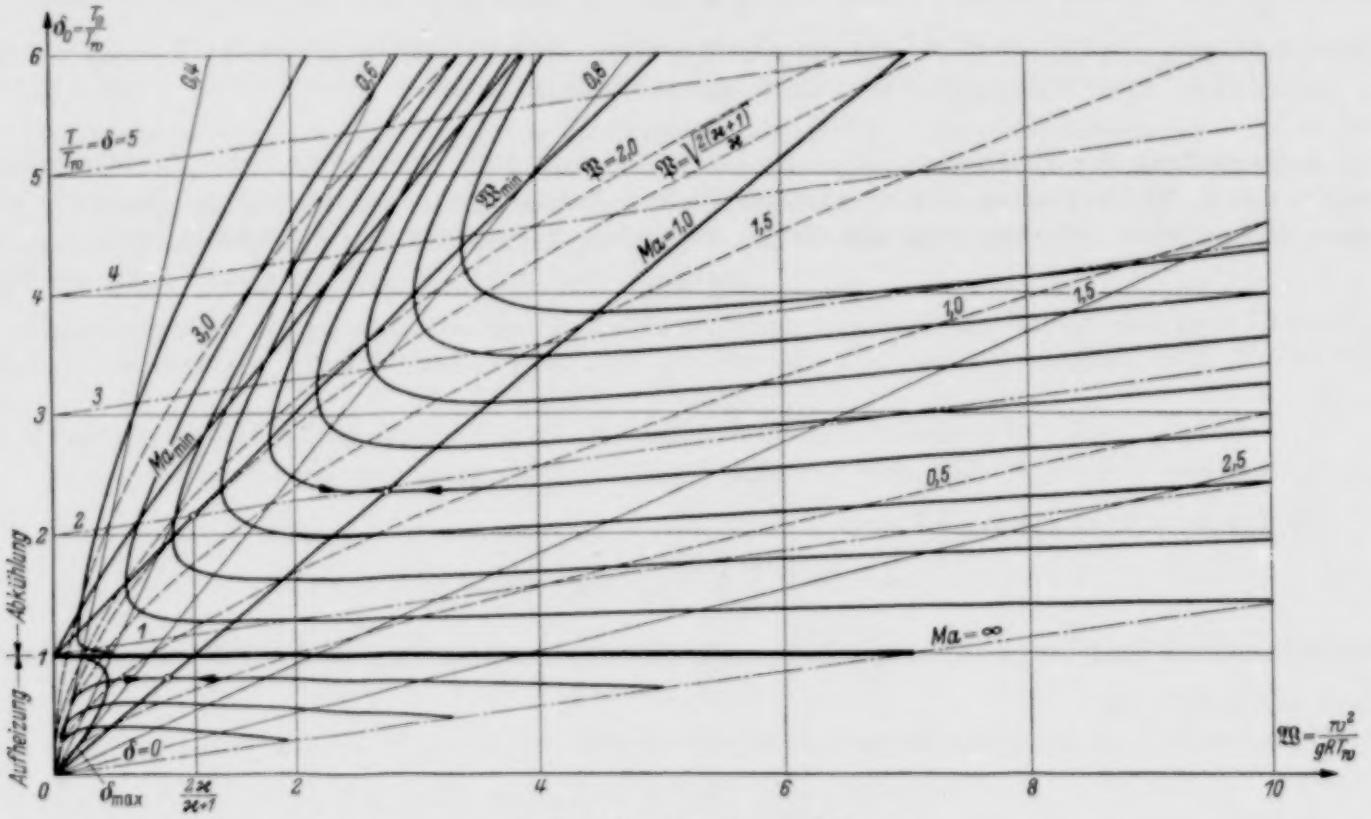
ein Minimum (Abkühlgebiet) bzw. ein Maximum (Aufheizgebiet), denn hier ist $\Delta\delta' = 0$. Für beliebige Temperaturunterschiede tritt das Gleiche längs der Geraden $\left(\text{vgl. (10) mit } \frac{d\delta}{d\mathfrak{W}} = 0\right)$

$$\frac{\varkappa+1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W}_k = \delta_{0,k} \tag{15a}$$

auf. Geht man von den normierten Werten auf die ursprünglichen zurück, so findet man hierfür

$$w_k^2 = \varkappa\, g\, R\, T_k, \tag{15b}$$

d. h. längs dieser Geraden tritt Schallgeschwindigkeit im Gas auf, bei der Rohrströmung also gleichzeitig die kritische Geschwindigkeit. Da bei Abkühlung δ_0 nur abnehmen kann, trennt diese



$\delta_0, \mathfrak{W}$ ÷ Diagramm (für $\varkappa = 1{,}4$).

Gerade den Durchlaufungs-Sinn der Isoplanen: links oberhalb steigen die Geschwindigkeiten bis zu dem durch (15a) gegebenen Betrag an, und zwar sowohl bei Abkühlung als auch bei Aufheizung, rechts unterhalb fallen die Geschwindigkeiten — ebenfalls im Aufheiz- und Abkühlgebiet — auf diesen Betrag ab. An diesen Stellen tritt „Verblocken" oder „Choking" auf.

Besonders interessant ist dieses „thermische Verblocken" oder „thermal choking" im Unterschallgebiet bei Abkühlung: ist eine bestimmte Geschwindigkeit erreicht — etwa im Gebiet der starken Krümmung der Isoplanen — so nimmt die Geschwindigkeit schon bei geringer Abkühlung sehr stark zu bis zur Schallgeschwindigkeit. Insbesondere bei heißen Verbrennungsgasen, die immer in Rohren mit geringerer Temperatur strömen, können bisher unbeachtete Verblockungseffekte auftreten.

Im Abkühlgebiet gibt es eine weitere Grenzlinie: nach (10) weisen die Isoplanen für

$$\mathfrak{W}_{min} = \delta_0 - 1 \tag{16}$$

eine senkrechte Tangente auf. Hier werden die jeweils kleinsten Geschwindigkeiten beim Abkühlen erreicht; bei weiterer Abkühlung nehmen die Geschwindigkeiten wieder zu. Geht man wieder auf die ursprünglichen Werte zurück, so kommt

$$w_{min}^2 = g\, R\, (T_0 - T_w) \tag{16a}$$

und auch

$$w_{min}^2 = \frac{2\,\varkappa}{\varkappa + 1}\, g\, R\, (T - T_w)\,. \tag{16b}$$

Es gibt also für jede Temperaturdifferenz Gas—Wand eine bestimmte Geschwindigkeit w_{min} nach (16a) oder (16b), welche bei weiterer Wärmeabfuhr nicht verringert — obwohl es sich um eine Unterschallgeschwindigkeit handelt — sondern vergrößert wird. Es ist interessant, diese Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit w_0 zu vergleichen, die adiabatisch diesem Temperaturgefälle entspräche: zunächst ist

$$w_0^2 = 2\, g\, c_p\, (T - T_w)\,,$$

es wird also

$$\frac{w_{min}^2}{w_0^2} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\,, \tag{17}$$

d. h. w_{min} verhält sich zu der adiabatischen Geschwindigkeit w_0 wie die kritischen Geschwindigkeit in einer Rohrströmung zu der maximalen Geschwindigkeit beim Ausströmen ins Vakuum.

Das Gleiche gilt für die Geschwindigkeiten längs der Schallgeschwindigkeitsgeraden einerseits, jenen längs der Geraden $\mathfrak{P} = 0$ andererseits, wenn man diese für gleiche δ_0-Werte vergleicht.

Für kleine Geschwindigkeiten wird aus (10)

$$\frac{d\delta_0}{d\mathfrak{W}} = \frac{\delta_0}{2\,\mathfrak{W}} \tag{18}$$

oder, integriert

$$\mathfrak{W} = C\,\delta_0^2\,. \tag{18a}$$

Geht man wieder auf die ursprünglichen Werte zurück, so findet man

$$w = C'\,T_0\,, \tag{18b}$$

also Proportionalität zwischen Geschwindigkeit und Gesamttemperatur.

Die bei Abkühlung bzw. Aufheizung zu erreichenden tiefsten bzw. höchsten statischen Gastemperaturen erhält man, wenn man auf den Isoplanen die Stellen mit den Neigungen der statischen Isothermen aufsucht; dort muß aber nach (4a)

$$\frac{d\delta_0}{d\mathfrak{W}} = \frac{\varkappa - 1}{2\,\varkappa} \tag{4b}$$

sein, und mit (10) erhält man für den Ort dieser Punkte

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\mathfrak{W}^2 - \frac{3\,\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\,\delta_0\,\mathfrak{W} + \delta_0^2 + \frac{3\,\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} - \delta_0 = 0\,. \tag{19}$$

Eine kurze Diskussion läßt erkennen, daß es sich um eine sehr schlanke Hyperbel handelt, deren Scheitel so weit voneinander entfernt liegen, daß im praktisch interessierenden Bereich des δ_0, $\mathfrak{W}$-Diagramms die Hyperbel nicht existent ist. Nur in einem kleinen Bereich der Aufheizzone dicht an der Ordinate läßt sich beim Aufheizen eine maximale statische Gastemperatur nicht überschreiten. Der Scheitel des zweiten Hyperbelastes liegt bei δ_0-Werten von etwa 8 (d. h. die Gesamttemperatur des Gases beträgt das Achtfache der Wandtemperatur) und bei $\mathfrak{W} \approx 13$, was bei einer Wandtemperatur von etwa 300° K einer Strömungsgeschwindigkeit von rd. 1100 m/s entspricht. In dem außerhalb der Hyperbeläste liegenden Bereich sind bei konstanter Wandtemperatur keine Grenzen für die statische Gastemperatur gegeben.

Führt man noch die *Machzahl* $Ma = \dfrac{w}{\sqrt{g\,\varkappa\,R\,T}}$ ein, so ergibt sich in der dimensionslosen Darstellung

$$\mathfrak{W} = \varkappa \cdot \delta \cdot Ma^2 = \frac{\varkappa\, Ma^2}{1 + \dfrac{\varkappa - 1}{2}\, Ma^2}\,\delta_0\,, \tag{20}$$

d. h. eine vom Ursprung ausgehende Geradenschar. Die Gerade für $Ma = 1$ fällt mit der oben bereits erwähnten Linie der horizontalen Tangenten zusammen, während $Ma = \infty$ mit der Linie

$\delta = 0$ identisch ist. Die gewählte $\delta_0, \mathfrak{W}$-Darstellung ist also auch für Überlegungen in *Mach*zahlen[1] — die aber für Rohrströmungen nicht so anschaulich sind wie etwa für die Umströmungs-Aerodynamik — von bildhaftem Vorteil.

Aus dem Verlauf der Isoplanen im Abkühlgebiet kann man bereits erkennen, daß bei jeder Isoplanen im Unterschallgebiet ein Zustand kleinster *Mach*zahlen vorhanden sein muß, der beim Abkühlen erreicht wird; bei stärkerem Abkühlen steigt die *Mach*zahl wieder an — wobei allerdings die wirkliche Geschwindigkeit zunächst noch abnimmt, bis der Zustand $\delta_0 = \mathfrak{W}$ erreicht ist.

Auch diese Zustände kleinster *Mach*zahlen liegen auf einer Hyperbel; alle Zentral-Geraden — also die *Mach*linien — gehorchen der Differentialgleichung

$$\frac{d\delta_0}{d\mathfrak{W}} = \frac{\delta_0}{\mathfrak{W}}\,; \tag{21}$$

zusammen mit (10) ergibt sich als Ort für die Zustände kleinster *Mach*zahlen — Tangenten der *Mach*linien an die Isoplanen —

$$2\,\delta_0\,(\mathfrak{W} - \delta_0 + 1) = (\delta_0 - 1)\left(\frac{\varkappa + 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} - \delta_0\right)$$

oder

$$\delta_0^2 - \frac{3\,\varkappa - 1}{2\,\varkappa}\,\delta_0\,\mathfrak{W} - \delta_0 - \frac{\varkappa + 1}{2\,\varkappa}\,\mathfrak{W} = 0\,. \tag{21a}$$

Der im Zustandsfeld liegende Hyperbelast ist in die Abbildung aufgenommen. Je höher die δ_0-Werte, also die Gastemperaturen im Verhältnis zur Wandtemperatur sind, desto mehr sinken die Gasgeschwindigkeiten nach Erreichen der kleinsten *Mach*zahl noch weiter ab.

Auch für die Drücke gibt es einen besonderen Wert, nämlich jenen, bei dem die $\mathfrak{W}_{min}$-Gerade tangiert wird. Aus der Beziehung (16) für die $\mathfrak{W}_{min}$-Gerade, der Isobarengleichung (9a) und der Tangentenbedingung leitet man für diesen besonderen Wert ab

$$\mathfrak{P} = \sqrt{\frac{2\,(\varkappa + 1)}{\varkappa}}\,, \tag{22}$$

oder mit den absoluten Größen

$$p = \varrho_0 w_0 \sqrt{\frac{2\,(\varkappa + 1)}{\varkappa}\,g\,R\,T_w}\,. \tag{22a}$$

Für Drücke, die kleiner sind als (22) bzw. (22a) wächst im Unterschallbereich die Geschwindigkeit bei Abkühlung an. Bei Drücken, die größer sind, wächst die Geschwindigkeit in den beiden Bereichen (ergeben sich als Schnittpunkte der Isobaren mit der $\mathfrak{W}_{min}$-Geraden)

$$0 < \sqrt{\mathfrak{W}} < \frac{\varkappa\,\mathfrak{P}}{\varkappa + 1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,(\varkappa + 1)}{\varkappa\,\mathfrak{P}^2}}\right) \tag{23}$$

und

$$\sqrt{\mathfrak{W}} > \frac{\varkappa\,\mathfrak{P}}{\varkappa + 1}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\,(\varkappa + 1)}{\varkappa\,\mathfrak{P}^2}}\right) \tag{23a}$$

ebenfalls an, wenn Abkühlung erfolgt; in dem Zwischenbereich

$$\frac{\varkappa\,\mathfrak{P}}{\varkappa + 1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\,(\varkappa + 1)}{\varkappa\,\mathfrak{P}^2}}\right) < \sqrt{\mathfrak{W}} < \frac{\varkappa\,\mathfrak{P}}{\varkappa + 1}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\,(\varkappa + 1)}{\varkappa\,\mathfrak{P}^2}}\right) \tag{23b}$$

nimmt die Geschwindigkeit bei Abkühlung jedoch zunächst ab, um anschließend — nach Durchschreiten der $\mathfrak{W}_{min}$-Geraden — wieder zuzunehmen.

Im Überschallbereich nimmt die Geschwindigkeit immer ab, wenn Wärme entzogen wird.

Die Trennungs-Isobare (22) berührt die $\mathfrak{W}_{min}$-Gerade bei einer ausgezeichneten Geschwindigkeit: aus (23) entnimmt man, daß dort

$$\sqrt{\mathfrak{W}_p} = \frac{\varkappa}{\varkappa + 1}\,\mathfrak{P}$$

oder mit (22):

$$\mathfrak{W}_p = \frac{2\,\varkappa}{\varkappa + 1} \tag{24}$$

[1] Vgl. hierzu *A. H. Shapiro* Fußnote S. 178, wo die entsprechende Differential-Gleichung entwickelt ist.

wird. Geht man auf die absoluten Werte zurück, so kommt

$$w_p = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} g R T_w}. \tag{24a}$$

Dies ist aber die kritische Geschwindigkeit einer Düsenströmung, deren Gesamttemperatur T_w ist. Vergleicht man dieses Ergebnis mit (16b), wo w_{min} längs der $\mathfrak{W}_{min}$-Geraden abgeleitet ist, so erkennt man unmittelbar, daß an der betrachteten Stelle $T = 2\,T_w$ oder $\delta = 2$ sein muß.

4. Zusammenfassung. Bei höheren Gasgeschwindigkeiten in zylindrischen Rohren dürfen die Wärme-Austauschvorgänge — auch wenn sie technisch unbeabsichtigt sind — nicht mehr vernachlässigt werden. Bei Abkühlvorgängen kann „thermisches Verblocken" oder „thermal choking" auftreten; die Geschwindigkeiten nehmen im Unterschallbereich teils zu, teils ab, wobei die gewählte Darstellung eine einfache Übersicht erlaubt.

(Eingegangen am 19. August 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *O. Lutz*, VDI, Technische Hochschule Braunschweig.

Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung

Von **K. Magnus**

1. Aufgabenstellung. *Lagrange* hat in seiner „Mécanique analytique" (1788) die Lösung des Kreiselproblems für einen Körper mit symmetrischem Trägheitsellipsoid angegeben, dessen Schwerpunkt auf der Symmetrieachse liegt. Die *Lagrange*sche Lösung ist in der Folgezeit von vielen Autoren dahingehend untersucht worden, welche Änderungen für das Bewegungsverhalten des Kreisels zu erwarten sind, wenn die bei der Durchführung von Versuchen stets vorhandenen störenden Einflüsse berücksichtigt werden. So hat man sich besonders intensiv mit den Auswirkungen der verschiedenartigen Reibungskräfte bei der Pfannenlagerung des Kreisels beschäftigt. Diese Arbeiten haben ihren Niederschlag z. B. in den Büchern von *Klein* und *Sommerfeld*[1] und *Grammel*[2] gefunden. Bei der Sorgfalt, die man auf die Erfassung des störenden Einflusses der Reibung verwendete, ist es erstaunlich, daß nicht schon von den Klassikern der Kreiseltheorie entsprechende Untersuchungen des störenden Einflusses einer kardanischen Aufhängung des Kreisels durchgeführt worden sind. Die kardanische Aufhängung für Kreisel war zumindest seit *Bohnenberger* (1817) bekannt und wurde seit *Foucauld* (1852) in steigendem Maße für physikalische und später auch für technische Kreiselgeräte verwendet. Erst seit etwa 15 Jahren sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, in denen der Einfluß der kardanischen Aufhängung behandelt wird (s. z. B. [3] und die dort angegebene Literatur, ferner[4, 5, 6]). Der Fall des schweren symmetrischen Kreisels in kardanischer Lagerung — also eine unmittelbare Erweiterung des von *Lagrange* behandelten Falles — scheint jedoch bisher nicht untersucht worden zu sein.

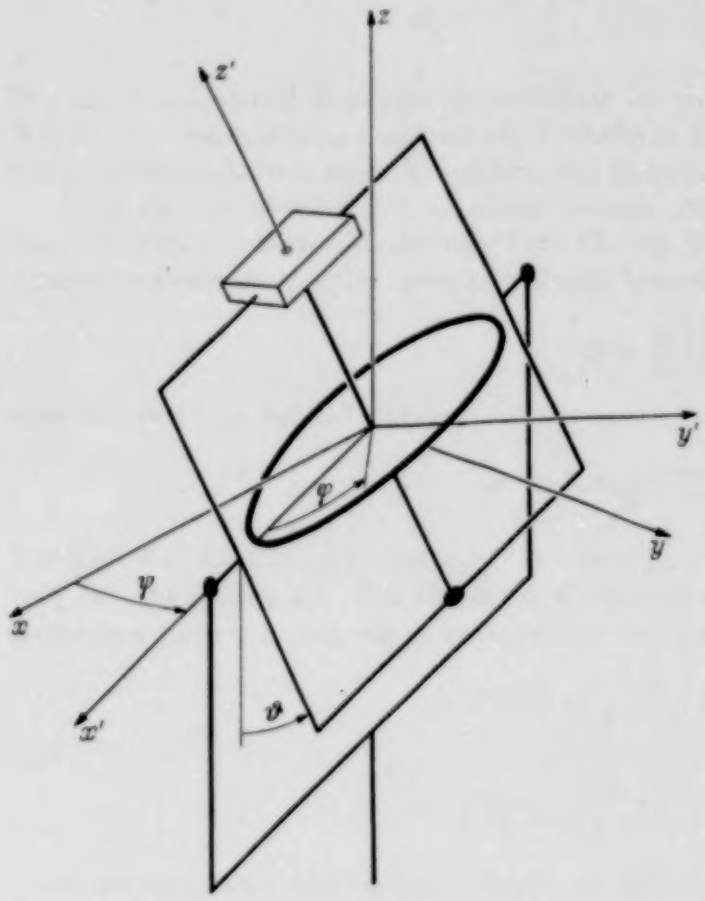


Abb. 1. Koordinatensysteme und *Eulersche* Winkel am kardanisch gelagerten Kreisel.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß für einen wichtigen Spezialfall eine strenge Lösung des erweiterten *Lagrange*-Falles durch Quadraturen gefunden werden kann. Wesentlich ist dabei die Berücksichtigung der Anteile, die die beiden Kardanringe zum Impuls des Gesamtsystems beitragen. Demgegenüber werden Reibungswirkungen in den Lagern der kardanischen Aufhängung vernachlässigt. Der Rotor wird als schwerer symmetrischer Kreisel im Sinne von *Lagrange* vorausgesetzt. Die beiden Kardanringe brauchen jedoch nicht symmetrisch zu sein. Allerdings müssen gewisse, unten näher zu definierende Forderungen bezüglich der Lage ihrer Hauptachsen gestellt werden.

Wenn man entsprechend der Skizze von Abb. 1 als Ausgangsstellung des Systems diejenige Lage ansieht, bei der die Ebenen der beiden Kardanringe zusammenfallen, dann läßt sich die Lage des Systems in eindeutiger Weise durch die bekannten drei *Euler*schen Winkel φ, ψ, ϑ kennzeichnen. ψ ist der Drehwinkel des äußeren Kardanringes um die raumfeste äußere Kardanachse (z-Achse),

[1] *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels insbesondere Bd. III, Leipzig 1903.
[2] *R. Grammel*, Der Kreisel, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.
[3] *K. Magnus*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) S. 23—34.
[4] *H. Poritsky*, J. appl. Mech. 75 (1953) S. 1—8.
[5] *R. Grammel* und *H. Ziegler*, Ing. Arch. 24 (1956) S. 351—372.
[6] *B. T. Plymall* and *R. Goodstein*, J. appl. Mech. 22 (1955) S. 365—366.

gemessen gegenüber einer senkrecht dazu stehenden x-Achse. ϑ ist der Drehwinkel des Innenringes um die innere Kardanachse (x'-Achse) also der Winkel, um den die Ebene des Innenringes gegenüber der Ebene des Außenringes verdreht ist. Die Lage des Rotors relativ zum Innenring kann durch den Winkel φ gekennzeichnet werden. In der Nullstellung $\psi = \vartheta' = 0$ seien die Achsen x, y, z eines raumfesten kartesischen Bezugssystems zugleich die Hauptachsen für den Innenring, sowie, wegen der vorausgesetzten Symmetrie des Rotors, auch bei beliebigem Winkel φ für den Rotor. Bezüglich der Hauptachsen des Außenringes braucht nichts vorausgesetzt zu werden. Wir müssen nur fordern, daß der Schwerpunkt des Außenringes auf der z-Achse liegt. Die Hauptträgheitsmomente sollen wie folgt bezeichnet werden:

für den Rotor:	$A_1 = B_1$,	C_1,
für den Innenring:	A_2,	B_2,	C_2,
für den Außenring:	—	—	C_3.

2. Die Bewegungsgleichungen und ihre ersten Integrale. Während es bei der Berechnung des *Lagrange*-Kreisels üblich ist, von den in einem körperfesten System angeschriebenen *Euler*schen Kreiselgleichungen auszugehen, empfiehlt sich hier die Verwendung eines Koordinatensystems $x'\,y'z'$ nach Abb. 1, das zwar mit dem Innenring fest verbunden ist, aber sowohl gegenüber dem Rotor, als auch gegenüber dem Außenring beweglich bleibt. Wegen der Symmetrie des Rotors lassen sich die Gleichungen in diesem Koordinatensystem verhältnismäßig einfach aufstellen. Es ist zweckmäßig, die Bewegungsgleichungen nach der von *Lagrange* gegebenen Vorschrift aus den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie des Gesamtsystems abzuleiten.

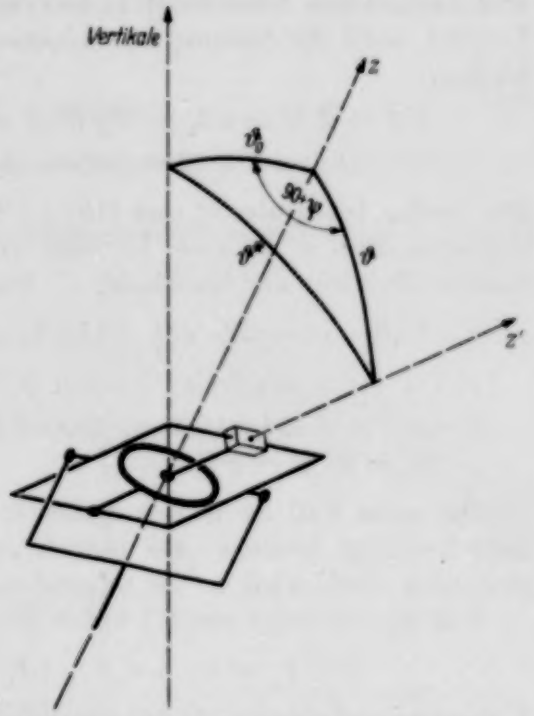


Abb. 2. Zur Bestimmung des Schweremomentes bei nicht vertikaler äußerer Kardanachse.

Die kinetische Energie T setzt sich aus den Anteilen des Rotors (Index 1), des Innenringes (Index 2) und des Außenringes (Index 3) zusammen:

$$2\,T = \left[A_1\left(\dot\vartheta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\vartheta\right) + C_1\left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta\right)^2\right] + \left[A_2\dot\vartheta^2 + B_2\,\dot\psi^2\sin^2\vartheta + C_2\,\dot\psi^2\cos^2\vartheta\right] + C_3\,\dot\psi^2\,, \quad (1)$$

oder

$$2\,T = \dot\vartheta^2\,(A_1 + A_2) + \dot\psi^2\left[(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2)\cos^2\vartheta\right] + C_1\left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta\right)^2. \quad (2)$$

Bei der Bildung des Ausdruckes für die potentielle Energie ist die Richtung der Schwerebeschleu nigung im gewählten Koordinatensystem zu berücksichtigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß der Schwerkraftvektor in die raumfeste x z-Ebene fällt. Durch geeignete Wahl der Lage der x-Achse kann das stets erreicht werden. Wenn die Richtung der Schwerkraft (also die Vertikale) mit der Richtung der äußeren Kardanachse (also der z-Achse) einen Winkel ϑ_0 bildet, so läßt sich der für die Größe des Schweremomentes maßgebende Winkel ϑ^* aus dem sphärischen Dreieck von Abb. 2 bestimmen, dessen Ecken von den Durchstoßpunkten der Achsen z und z' sowie der Vertikalen durch eine Kugel um den Nullpunkt gebildet wird. Nach dem Cosinussatz ist:

$$\cos\vartheta^* = \cos\vartheta_0\cos\vartheta - \sin\vartheta_0\sin\vartheta\sin\psi\,. \quad (3)$$

Wenn m die Gesamtmasse von Rotor + Innenring ist, g die Schwerebeschleunigung und s der Abstand des Schwerpunktes von Rotor + Innenring vom Nullpunkt des Koordinatensystems, dann hat man für die potentielle Energie den Wert:

$$U = m\,g\,s\cos\vartheta^* = m\,g\,s\,(\cos\vartheta_0\cos\vartheta - \sin\vartheta_0\sin\vartheta\sin\psi)\,. \quad (4)$$

Der Schwerpunkt des Außenringes liegt nach Voraussetzung auf der z-Achse und hat daher keinen Einfluß auf die Bewegungen des Systems. Der Abstand s wird positiv gerechnet, wenn der Schwerpunkt auf der positiven z'-Achse liegt.

Aus den im vorliegenden Fall anwendbaren *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0\,, \quad (5)$$

bei denen für die allgemeine Koordinate q nacheinander die drei *Euler*-Winkel $\varphi\ \psi\ \vartheta$ einzusetzen sind, bekommt man die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\{C_1\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)\}=0\,, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\psi}\,[(A_1+B_2+C_3)-(A_1+B_2-C_2)\cos^2\vartheta]+C_1\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)\cos\vartheta\}$$
$$=m\,g\,s\sin\vartheta_0\sin\vartheta\cos\varphi\,, \tag{7}$$

$$\ddot{\vartheta}\,(A_1+A_2)-\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,(A_1+B_2-C_2)+\dot{\psi}\,C_1\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)\sin\vartheta$$
$$=m\,g\,s\,(\cos\vartheta_0\sin\vartheta+\sin\vartheta_0\cos\vartheta\sin\varphi)\,. \tag{8}$$

Da φ eine zyklische Koordinate ist (also $\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$ gilt), hat (6) die einfache Gestalt einer zeitlichen Ableitung. Durch Integration folgt unmittelbar die Konstanz der Drehungskomponente des Rotors in der z'-Richtung:

$$\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta=r_0=\text{const}\,. \tag{9}$$

Damit ist ein Integral des Problems gefunden. Ein zweites ergibt sich leicht aus dem Energiesatz. Das betrachtete System ist konservativ, da keinerlei energieverzehrende Kräfte vorhanden sind. Folglich muß die Summe von kinetischer Energie T (2) und potentieller Energie U (4) konstant bleiben:

$$2\,T+2\,U=(A_1+A_2)\,\dot{\vartheta}^2+\dot{\psi}^2\,[(A_1+B_2+C_3)-(A_1+B_2-C_2)\cos^2\vartheta]+C_1\,r_0^2$$
$$+2\,m\,g\,s\,(\cos\vartheta_0\cos\vartheta-\sin\vartheta_0\sin\vartheta\sin\varphi)=E=\text{const}\,. \tag{10}$$

Die beiden Integrale (9) und (10) reichen aber zur vollständigen Lösung des Problems durch Quadraturen noch nicht aus. Es wird vielmehr noch ein drittes Integral benötigt, das sich in zwei Sonderfällen aus der Gleichung (7) beschaffen läßt. Der Winkel φ wird nämlich in den folgenden beiden Fällen ebenfalls zur zyklischen Koordinate (d. h. $\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0$):

1. für den kräftefreien Kreisel ($s=0$) und
2. für ein Kardansystem, dessen äußere Kardanachse in die Richtung der Schwerkraft fällt ($\vartheta_0=0$, $\vartheta=\vartheta^*$).

Der erste Fall ist in den schon erwähnten Arbeiten[1,2,3] behandelt worden und soll hier unberücksichtigt bleiben. Da jedoch zu dem Fall 2. bisher noch keine Untersuchungen bekannt geworden sind, wird er im folgenden näher betrachtet werden.

Für $\vartheta_0=0$ folgt aus (7) unter Berücksichtigung von (9)

$$\dot{\psi}\,[(A_1+B_2+C_3)-(A_1+B_2-C_2)\cos^2\vartheta]+C_1\,r_0\cos\vartheta=D_z=\text{const}\,. \tag{11}$$

Außerdem reduziert sich das Energie-Integral (10) auf

$$\dot{\vartheta}^2\,(A_1+A_2)+\dot{\psi}^2\,[(A_1+B_2+C_3)-(A_1+B_2-C_2)\cos^2\vartheta]+C_1\,r_0^2+2\,m\,g\,s\cos\vartheta=E\,. \tag{12}$$

Die nunmehr im Fall $\vartheta_0=0$ zur Verfügung stehenden drei Integrale (9), (11) und (12) entsprechen vollkommen den bekannten drei Integralen für den *Lagrange*schen Fall des schweren symmetrischen Kreisels. Sie lassen eine anschauliche Deutung zu: (12) ist das Energie-Integral mit der Energiekonstanten E; (9) und (11) sind zwei Impulsintegrale, von denen (9) zum Ausdruck bringt, daß die Impulskomponente des Rotors in der Rotorachse (z'-Achse) konstant ist, während (11) besagt, daß die Komponente des Gesamtimpulses D in der Vertikalrichtung (z-Achse) konstant ist. Beides läßt sich nach dem Impulssatz unmittelbar einsehen. Auf den Rotor wirken als äußere Kräfte die Schwerkraft und Lagerkräfte, die vom Innenring auf die Rotorachse übertragen werden. Die Momentenvektoren beider Kräfte stehen — wegen der vorausgesetzten Reibungsfreiheit in den Lagern — stets senkrecht zur Rotorachse. Nun kann man den Impulssatz in einem rotorfesten Koordinatensystem in die bekannte *Euler*sche Form

$$\frac{d'\bar{D}_1}{dt}+[\bar{\omega}\ \bar{D}_1]=\sum\bar{M} \tag{13}$$

bringen. Dabei ist $\bar{D}_1$ der Impulsvektor des Rotors und $\bar{\omega}$ der Vektor der Drehgeschwindigkeit. Wegen der Symmetrie des Rotors hat aber das auf der linken Seite stehende Vektorprodukt keine

[1] Siehe Fußnote 3 S. 184.
[2] Siehe Fußnote 4 S. 184.
[3] Siehe Fußnote 6 S. 184.

Komponente in der Richtung der Rotorachse (z'-Achse). Folglich kann die Änderung des Impulsvektors $\bar{D}_1$ im körperfesten System nur in einer Ebene senkrecht zur Rotorachse erfolgen — also ist die Impulskomponente des Rotors in der Rotorachse $D_{1z'} = C_1 r_0$ eine Konstante. Die Impulskomponente des Gesamtsystems in der z'-Richtung ist jedoch nicht konstant. Für das Gesamtsystem ist nämlich als äußeres Moment außer dem Schweremoment noch ein Moment einzusetzen, das von dem raumfesten äußeren Kardanlager auf den äußeren Kardanring übertragen wird. Der Vektor dieses Momentes hat zwar wegen der vorausgesetzten Reibungsfreiheit stets eine zur äußeren Kardanachse senkrechte Richtung, braucht aber keinesfalls auch senkrecht zur jeweiligen Richtung der Rotorachse zu stehen.

Auch die Gültigkeit von (11), also die Konstanz der vertikalen Komponente des Gesamtimpulses ist leicht einzusehen: Da die Vektoren der äußeren Momente — also des Schweremomentes und des vom äußeren Kardanlager übertragenen Lagermomentes — stets horizontal liegen, kann die vom raumfesten Bezugssystem aus beurteilte Änderung des Impulsvektors $\bar{D}$ des Gesamtsystems auch nur in der Horizontalebene erfolgen, also bleibt D_z konstant. Dieses Ergebnis gilt jedoch nur für den Fall $\vartheta_0 = 0$, also wenn die äußere Kardanachse vertikal steht.

3. Lösungen für den Fall vertikaler äußerer Kardanachse. Aus (11) läßt sich sofort die „Präzessionsgeschwindigkeit" $\dot{\psi}$ bestimmen:

$$\dot{\psi} = \frac{D_z - C_1 r_0 \cos\vartheta}{(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2)\cos^2\vartheta}. \tag{14}$$

Wenn der Winkel ϑ als Funktion der Zeit bekannt ist, dann kann daraus ψ durch Quadratur gewonnen werden.

Durch Einsetzen von (14) in (12) erhält man nun eine Differentialgleichung erster Ordnung für ϑ, die nach Einführen der neuen Variablen

$$\cos\vartheta = u \tag{15}$$

und der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_1 r_0}{A_1 + A_2} &= k_1\,; & \frac{E - C_1 r_0^2}{A_1 + A_2} &= k_4\,,\\ \frac{D_z}{A_1 + A_2} &= k_2\,; & \frac{A_1 + B_2 + C_3}{A_1 + A_2} &= k_5\,,\\ \frac{2 m g s}{A_1 + A_2} &= k_3\,; & \frac{A_1 + B_2 - C_2}{A_1 + A_2} &= k_6\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

in die Form

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (1 - u^2)\left[(k_4 - k_3 u) - \frac{(k_2 - k_1 u)^2}{k_5 - k_6 u^2}\right] = U(u) \tag{17}$$

gebracht werden kann. Die auf der rechten Seite stehende „Kreiselfunktion" $U(u)$ geht für den Fall verschwindender Masse der Kardanringe ($k_5 = k_6 = 1$) in die bekannte Kreiselfunktion des *Lagrange*schen Falles über. Zur Bestimmung von $u(t)$ wird nun — wie im *Lagrange*schen Fall — zunächst die Umkehrfunktion $t = t(u)$ berechnet:

$$t = t_0 + \int \frac{du}{\sqrt{U(u)}}. \tag{18}$$

Hat man daraus durch Umkehrung $u(t)$ und außerdem $\vartheta = \arccos u$ bestimmt, dann läßt sich der Winkel ψ durch Integration von (14) gewinnen:

$$\psi = \psi_0 + \int \frac{k_2 - k_1 u}{k_5 - k_6 u^2}\,dt\,. \tag{19}$$

Durch die beiden Winkel ϑ und ψ ist die Lage des Kardansystems und der Rotorachse eindeutig bestimmt. Da der Drehwinkel des Rotors φ im allgemeinen nicht weiter interessiert, kann somit das Problem als gelöst betrachtet werden. Im Bedarfsfalle kann φ aus (9) durch eine weitere Integration ermittelt werden.

Im Gegensatz zum *Lagrange*schen Fall ist die Kreiselfunktion $U(u)$ für den schweren symmetrischen Kardankreisel eine gebrochen rationale Funktion von u, so daß es nicht möglich ist, die Integrale (18) und (19) durch bekannte tabellierte Funktionen auszudrücken. In konkreten Fällen rechnet man daher diese Integrale am besten numerisch aus und kann daraus dann die Bahnkurven konstruieren, die von den Punkten der Rotorachse durchlaufen werden.

Die Ergebnisse der Auswertung sind für einige typische Fälle in den Abb. 3 bis 7 zusammengestellt worden. In Abb. 3 ist die Bahn des Durchstoßpunktes der Figurenachse durch eine Einheitskugel für den Fall eines kräftefreien, nicht kardanisch gelagerten Kreisels gezeichnet worden. Nach der *Poinsot*schen Theorie beschreibt die Figurenachse einen Kreiskegel und schneidet daher die Einheitskugel in einem Kreis. Rechnet man nun das Problem bei denselben Werten für die Systemparameter k_1, k_2, k_3, k_4 im Falle eines kardanisch gelagerten Kreisels aus, so ergibt sich die in Abb. 4 gezeichnete Bahnkurve. Der Vergleich beider Kurven läßt zwei wesentliche Unterschiede erkennen: Die Bahnkurven des kardanisch gelagerten Kreisels sind eiförmig verbeult, wobei die Spitze des Eis dem Pol der Kugel (Durchstoßpunkt der äußeren Kardanachse) zuge-

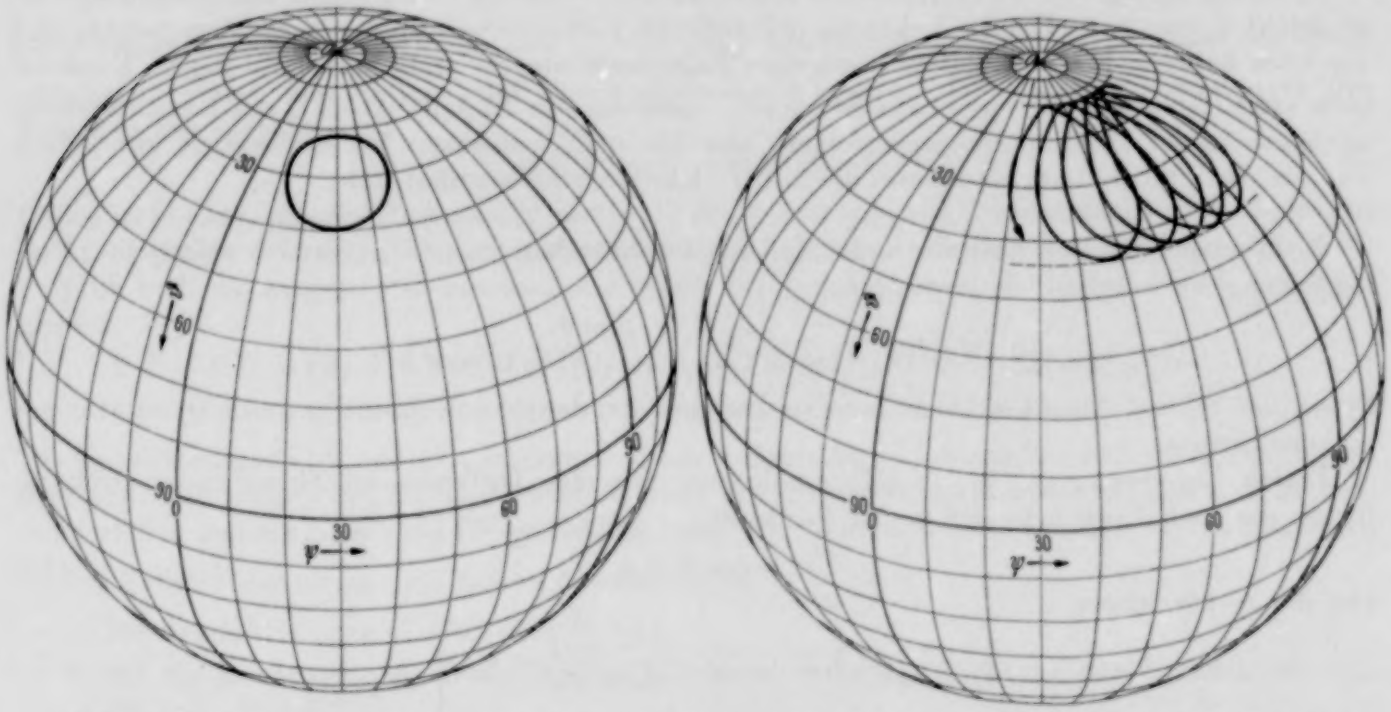


Abb. 3 und 4. Bahnkurven eines Punktes auf der Figurenachse für einen kräftefreien Kreisel bei gleichen Werten für die Energie- und Impuls-Konstanten.

Abb. 3. nicht kardanisch gelagerter Kreisel. Abb. 4. kardanisch gelagerter Kreisel.

wandt ist; außerdem überlagert sich der Nutationsbewegung noch eine azimutale Auswanderung, die zur Folge hat, daß sich die Kurve nach einem Nutationsumlauf nicht schließt, sondern eine spiralige Bahn durchlaufen wird. Diese für die praktischen Anwendungen außerordentlich wichtige Auswanderungserscheinung des kräftefreien Kreisels ist bereits von mehreren Autoren untersucht worden (s. z. B. [1, 2, 3]).

Die weiteren Abb. 5 bis 7 zeigen Vertikalprojektionen der Bahnkurven auf eine die Einheitskugel am Pol berührende Tangentialebene. In allen drei Fällen sind die gleichen Anfangsbedingungen gewählt worden: Der für $t = 0$ in vertikaler Stellung befindlichen Figurenachse ist ein seitlicher Stoß gegeben worden. Dann entsteht bei einem nicht kardanisch gelagerten schweren Kreisel (*Lagrange*scher Fall) die Bahnkurve von Abb. 5. Über die einzelnen Nutationsumläufe lagert sich eine Präzessionsbewegung, die im vorliegenden Fall den gleichen Drehsinn (gestrichelt gezeichneter Pfeil) besitzt, wie die Nutationsbewegungen. Ein unter sonst gleichen Bedingungen angestoßener kardanisch gelagerter Kreisel ergibt die wesentlich andere Bahnkurve von Abb. 6. Nutationsumlauf und Präzessionsdrehsinn sind in diesem Fall verschieden. Außerdem fällt die Streckung der Bahnkurven beim Durchgang durch den Pol auf. Bei zusätzlichen Anstoß des äußeren Kardanringes können bei sonst ungeänderten Anfangsbedingungen auch Bahnkurven entstehen, wie sie in Abb. 7 gezeichnet sind. Bemerkenswert ist hier das Auftreten von Wendepunkten, die im *Lagrange*schen Fall bei entsprechenden Anfangsbedingungen nicht zu beobachten sind.

Einige experimentell aufgenommene Bahnen zeigen die Abb. 8 bis 15. Bei ihnen ist eine an der Figurenachse angebrachte Taschenlampenbirne senkrecht von oben her photographiert worden. Die Bahnphotos entsprechen daher etwa den in den Abb. 5 bis 7 gezeichneten Projektionen. Die

[1] Siehe Fußnote 3 S. 184.
[2] Siehe Fußnote 4 S. 184.
[3] Siehe Fußnote 6 S. 184.

Abb. 8 und 9 wurden an einem nicht kardanisch gelagerten Kreisel erhalten, während alle weiteren Abb. verschiedene Bewegungszustände am kardanisch gelagerten schweren Kreisel wiedergeben.

Die Abb. 8 und 5 bzw. 10 und 6 entsprechen sich jeweils in den Anfangsbedingungen: in allen vier Fällen ist der in vertikaler Lage befindlichen Figurenachse des Kreisels ein seitlicher Stoß gegeben worden. Auch die Kurve von Abb. 11 ist noch bei ähnlichen Anfangsbedingungen aufgenommen worden, nur macht sich hier interessanterweise der Einfluß der bei den theoretischen Berechnungen vernachlässigten Reibung dadurch bemerkbar, daß der Übergang von einem Bewegungszustand zu einem anderen deutlich sichtbar wird. Die Figurenachse durchschlägt zunächst die obere Pollage zweimal, wobei die Kurven die schon bei Abb. 6 erwähnte Streckung zeigen. Bei der nachfolgenden nochmaligen Annäherung an die Pollage reicht die Energie nicht mehr aus, diesen Punkt zu durchlaufen. Die Bewegung wird rückläufig, und es entsteht eine Art Zykloidenbewegung.

Der Charakter der Bahnkurven hängt noch von dem Vorzeichen des Schweremomentes ab: die Abb. 12 und 13 gelten für einen „gehobenen Kreisel", bei dem der Schwerpunkt höher als der Unterstützungspunkt liegt ($s > 0$), während die Abb. 14 und 15 entsprechende Bewegungen für den „gesenkten Kreisel" wiedergeben, bei dem der Schwerpunkt tiefer als der Unterstützungspunkt liegt ($s < 0$). In Abb. 14 ist deutlich die für kardanisch gelagerte Kreisel charakteristische eiförmige Verbeulung der Bahnkurven bei der Annäherung an die Pollage zu erkennen.

4. Reguläre Präzessionen. Es soll die Frage untersucht werden, ob beim schweren symmetrischen Kardankreisel „reguläre Präzessionen" möglich sind, die den regulären Präzessionen des *Lagrange*-Kreisels entsprechen. Dabei wird üblicherweise unter einer regulären Präzession eine solche Bewegung verstanden, bei der die Rotorachse einen Kreiskegelmantel mit gleichförmiger Geschwindigkeit umfährt. Im *Lagrange*schen Fall sind die Achsen der möglichen Präzessionskegel stets vertikal, fallen also mit der Richtung der Schwerkraft zusammen. Beim schweren Kardankreisel existieren jedoch zwei ausgezeichnete Richtungen: die der Schwerkraft und der äußeren Kardanachse. Man kann sich leicht überlegen, daß jeder Kegel einer möglichen regulären Präzession sowohl die eine, als auch die andere Richtung zur Symmetrieachse haben muß. Demnach wird man reguläre Präzessionsbewegungen nur in dem hier näher betrachteten Fall erwarten können, bei dem die äußere Kardanachse vertikal steht, also mit der Richtung der Schwerkraft zusammenfällt.

Würden beide Richtungen nicht übereinstimmen, so würden bei einer bezüglich der Schwerkraftrichtung symmetrischen Präzessionsbewegung ungleichmäßige Bewegungen des Kardansystems auftreten, die zu entsprechenden ungleichmäßigen Reaktionsmomenten für das Gesamtsystem führen würden. Ein Durchlaufen des Präzessionskegels mit gleichförmiger Geschwindigkeit wäre somit ausgeschlossen. Umgekehrt würde sich bei einer bezüglich der äußeren Kardanachse symmetrischen Bewegung das Schweremoment während des Präzessionsumlaufes nicht nur der Richtung, sondern auch der Größe nach ändern, so daß wiederum keine konstante Präzessionsgeschwindigkeit existieren könnte.

Da es somit genügt, den Fall $\vartheta_0 = 0$ zu untersuchen, können wir nunmehr die regulären Präzessionen durch die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\psi} &= 0; \qquad \dot{\psi} = \text{const} \\ \dot{\vartheta} &= 0; \qquad \vartheta = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

kennzeichnen. Geht man mit (20) in die beiden Integrale (9) und (11) der Bewegungsgleichungen ein, so bekommt man zwei Bestimmungsgleichungen für die Konstanten r_0 und D_z. Geht man weiter mit (20) in die dritte der Bewegungsgleichungen (8) ein, so folgt

$$[\dot{\psi}^2 (A_1 + B_2 - C_2) \cos\vartheta - \dot{\psi}\, C_1\, r_0 + m\, g\, s] \sin\vartheta = 0$$

bzw.

$$\left[\dot{\psi}^2\, k_6\, u - \dot{\psi}\, k_1 + \frac{1}{2}\, k_3\right] \sin\vartheta = 0\,. \tag{21}$$

Schließt man hier zunächst den Fall $\sin\vartheta = 0$ aus, so ergeben sich aus der in $\dot{\psi}$ quadratischen Gleichung (21) die folgenden beiden Werte für die Geschwindigkeit der möglichen regulären Präzessionen

$$\left.\begin{matrix}\dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2\end{matrix}\right\} = \frac{k_1}{2\, k_6\, u}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\, k_3\, k_6\, u}{k_1^2}}\right]. \tag{22}$$

Da bei den üblichen Konstruktionen des inneren Kardanringes stets $k_6 > 0$ gilt, so ist ein negativer Wert für den Radikanden nur zu befürchten, wenn das Produkt $k_3\, u$ positiv ist. Das

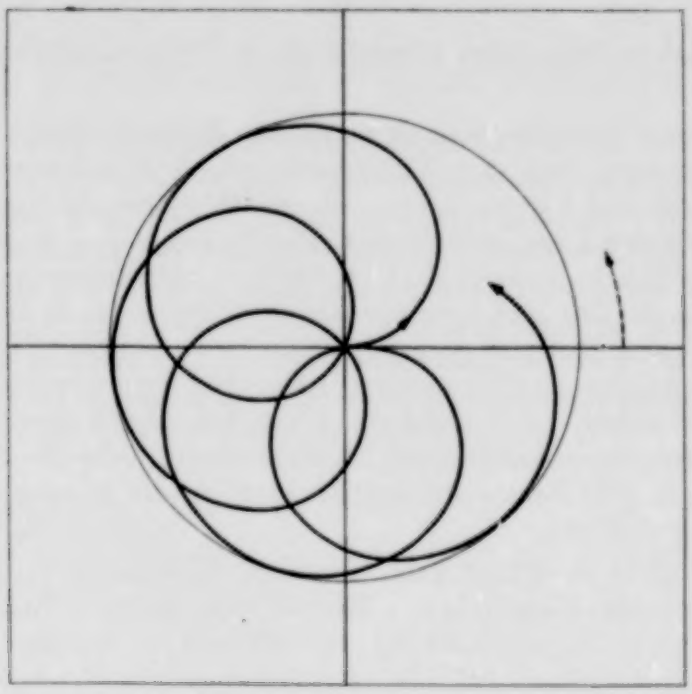


Abb. 5.
Nicht kardanisch gelagerter Kreisel.

Abb. 6.
Kardanisch gelagerter Kreisel, ohne Anstoß des Kardansystems.

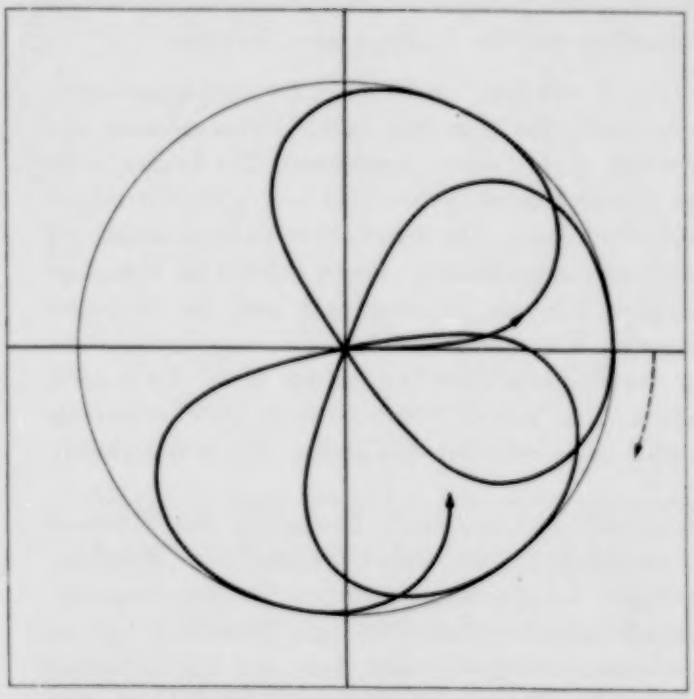


Abb. 7.
Kardanisch gelagerter Kreisel mit zusätzlichem Anstoß des Kardansystems.

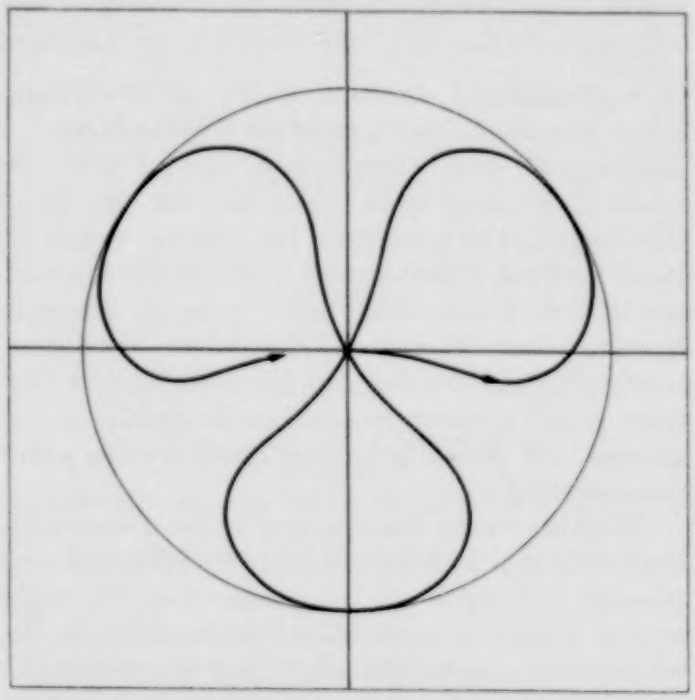


Abb. 5 bis 7. Projektionen der Bahnkurven eines Punktes auf der Figurenachse für einen schweren Kreisel bei gleichem Rotorimpuls.

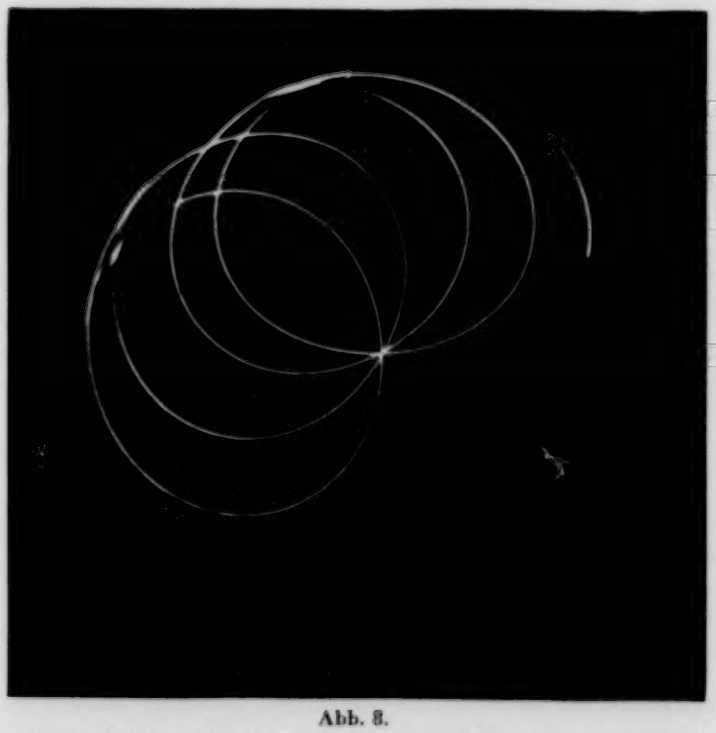


Abb. 8.

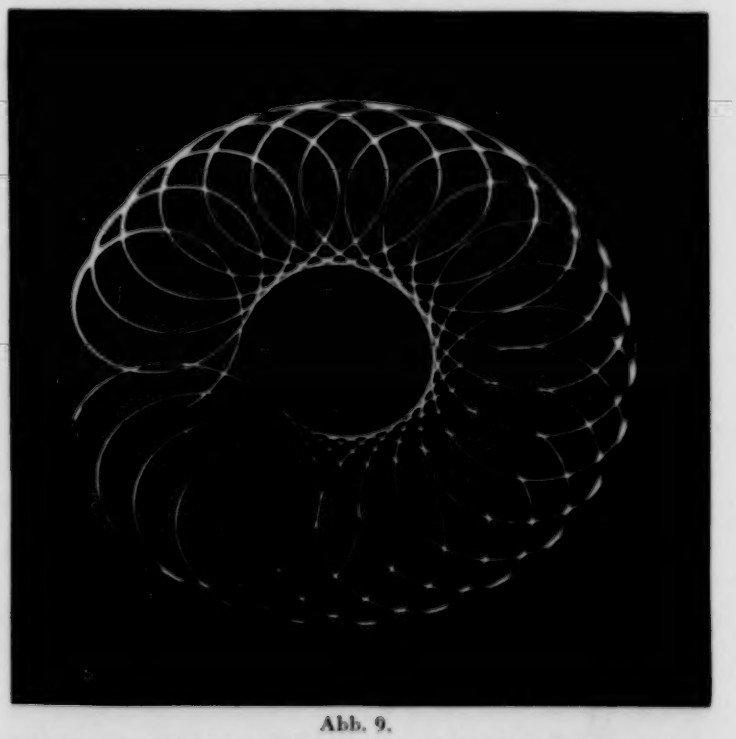


Abb. 9.

Abb. 8 bis 15. Experimentell gewonnene Bahnkurven eines Punktes auf der Figurenachse. Variiert wurden die Anfangsbedingungen und das Schweremoment (gehobener bzw. gesenkter Kreisel). Die Abb. 8 und 9 gelten für einen nicht kardanisch gelagerten Kreisel, die Abb. 10 bis 15 für einen kardanisch gelagerten Kreisel.

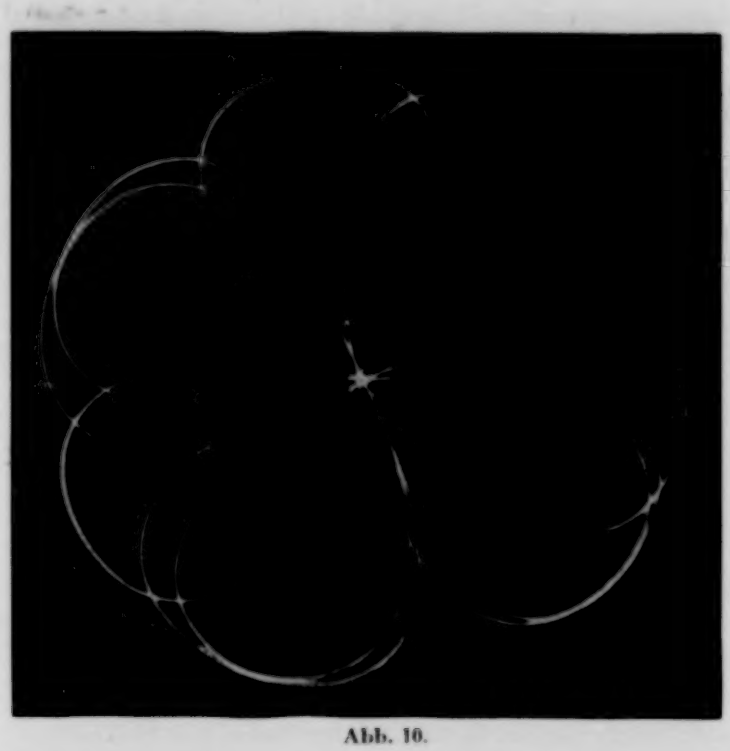


Abb. 10.

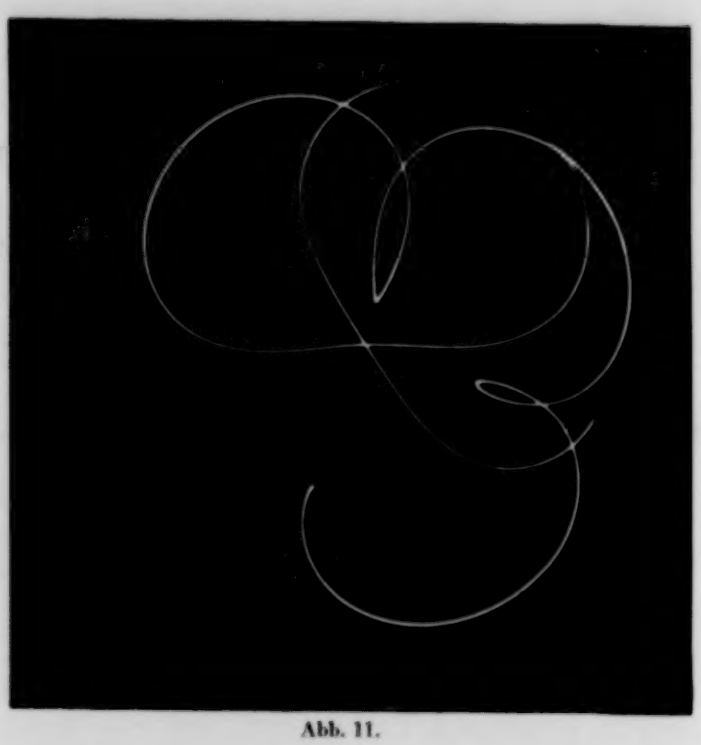


Abb. 11.

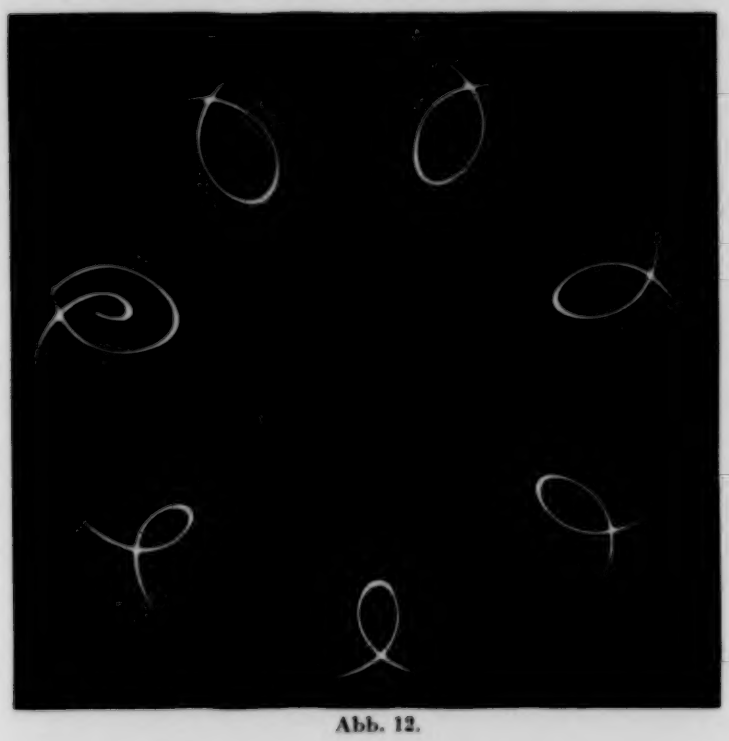


Abb. 12.

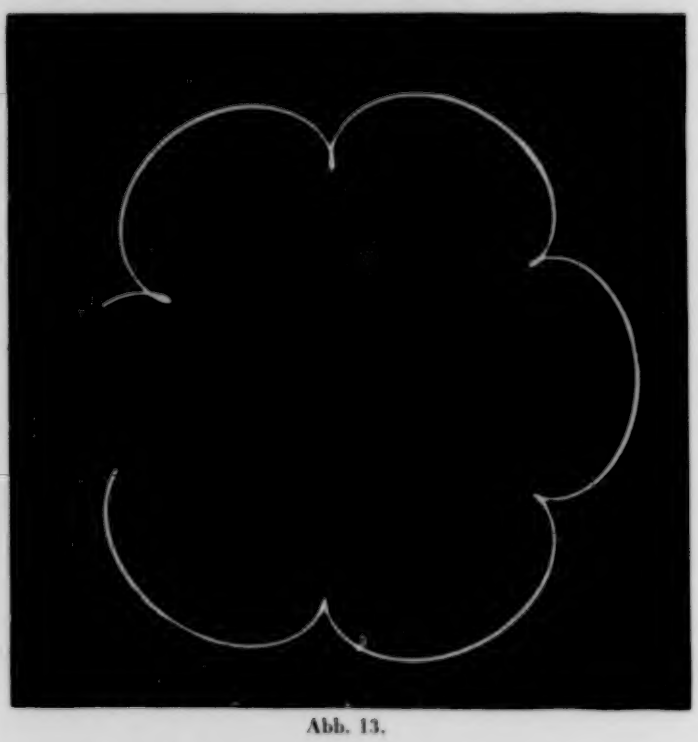


Abb. 13.

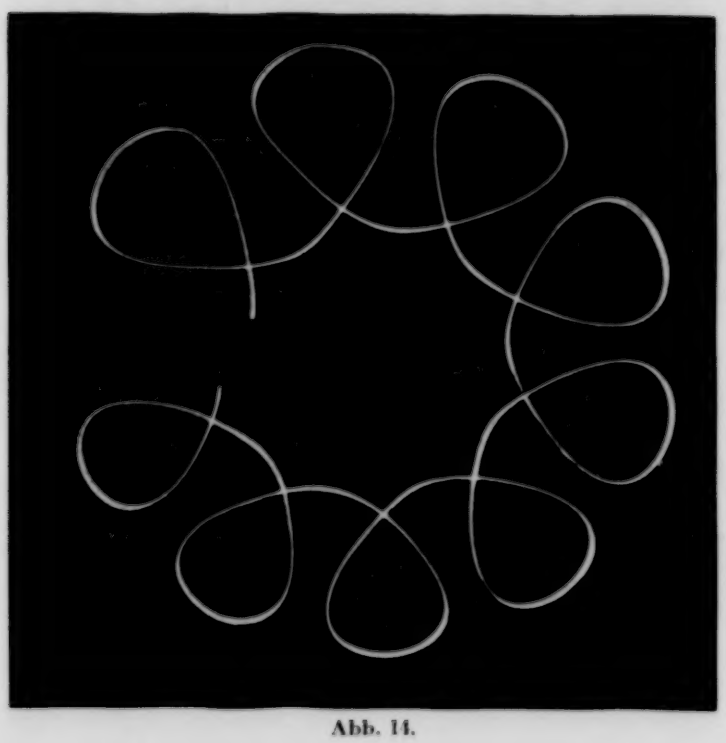


Abb. 14.

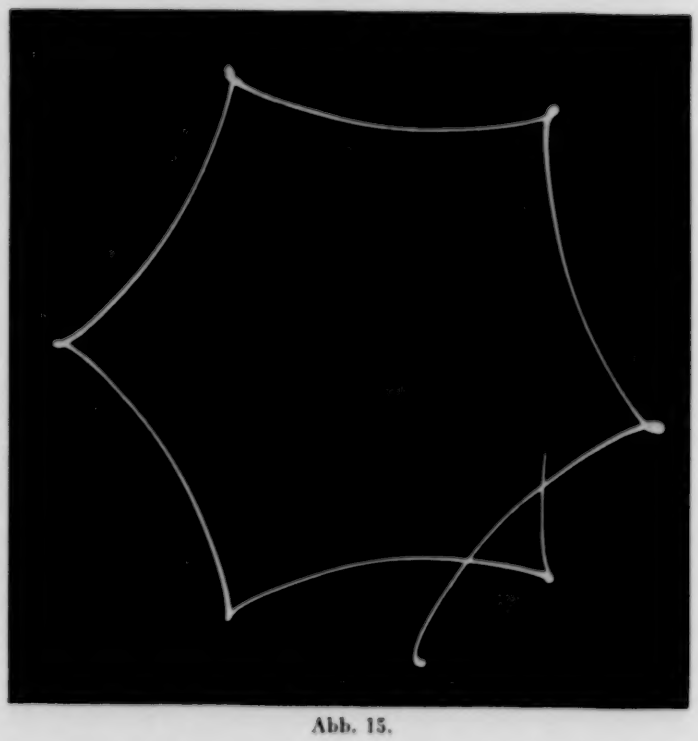


Abb. 15.

ist der Fall, wenn k_3 und u gleiche Vorzeichen haben, also entweder für $s > 0; 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ oder für $s < 0; \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$. Beides entspricht dem „gehobenen Kreisel". Ist dagegen entweder k_3 oder u negativ, so liegt der Fall des „gesenkten Kreisels" vor.

Es ist somit aus (22) zu entnehmen, daß für den gesenkten Kreisel stets zwei reguläre Präzessionen existieren. Ihr Drehsinn ist verschieden, da die beiden Lösungen (22) dann verschiedene Vorzeichen haben. Für den gehobenen Kreisel existieren zwei voneinander verschiedene reguläre Präzessionen nur dann, wenn die Bedingung

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &> 2\, k_3\, k_6\, u \\ \text{bzw.} \qquad C_1^2\, r_0^2 &> 4\,(A_1 + B_2 - C_2)\, m\, g\, s \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

erfüllt ist. Beide Werte von (22) haben in diesem Falle das gleiche Vorzeichen, so daß die regulären Präzessionen des gehobenen Kreisels im gleichen Sinne erfolgen. Im Grenzfall können sie sogar zusammenfallen, so daß eine Doppelwurzel für $\dot{\psi}$ existiert. In diesem Falle wäre in (23) ein Gleichheitszeichen einzusetzen, während in (22) der Radikand verschwindet.

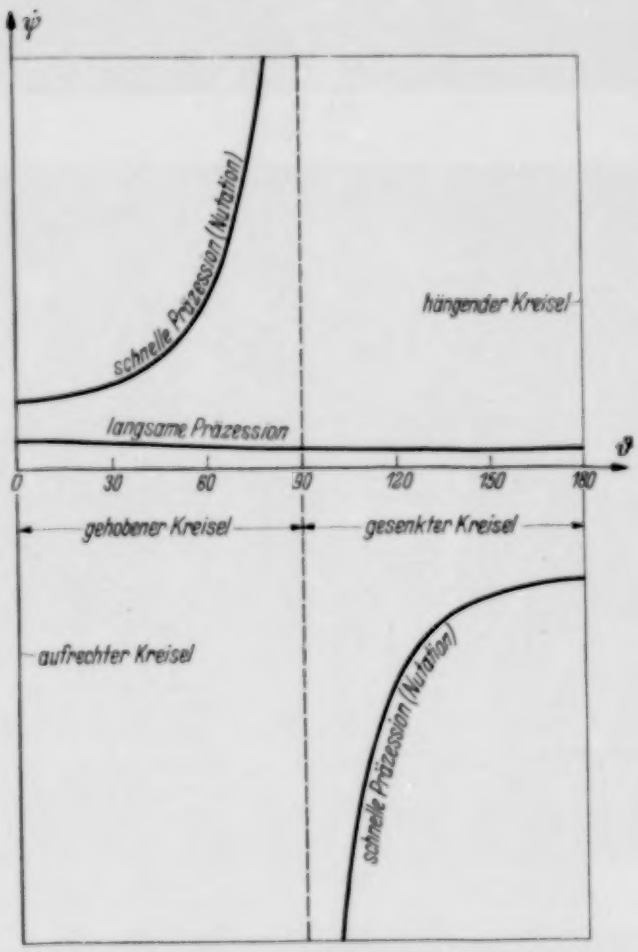


Abb. 16. Die Abhängigkeit der regulären Präzessionen vom Elevationswinkel ϑ.

Für den Fall $\vartheta = 0$, also den extrem gehobenen oder „aufrechten Kreisel", bei dem der Schwerpunkt vertikal über dem Unterstützungspunkt liegt, gibt (23) zugleich eine notwendige Bedingung für die Stabilität. Wir werden jedoch sehen, daß diese Bedingung — zum Unterschied vom *Lagrange*schen Fall — für den Kardankreisel nur notwendig aber nicht hinreichend für die Stabilität des aufrechten Kreisels ist. Im übrigen gelten für die regulären Präzessionen des schweren Kardankreisels dieselben Fallunterscheidungen wie sie für den *Lagrange*schen Kreisel bekannt sind.

In Abb. 16 ist der Verlauf der $\dot{\psi}_1$ und $\dot{\psi}_2$ nach (22) als Funktion des Winkels ϑ aufgetragen. Die hier als „langsame Präzession" bezeichnete Kurve entspricht der üblicherweise „Präzession" genannten Bewegungsform. Die „schnelle Präzession" entspricht der meist als „Nutation" bezeichneten Bewegungsform. Im Grenzfall des kräftefreien Kreisels ($s = 0$) bleiben nur diese Nutationen übrig, während die Geschwindigkeit der langsamen Präzession Null wird.

5. Die Stabilität der vertikalen Lage der Figurenachse. Aus den im Abschnitt 3 angegebenen Lösungen lassen sich für konkrete Fälle alle interessierenden Eigenschaften der Kreiselbewegung ermitteln. Allgemeine Aussagen sind jedoch wegen der Kompliziertheit der vorkommenden Integrale praktisch nicht möglich, so daß man zur Untersuchung der Stabilität der Lage der Figurenachse andere Wege einschlagen muß. In diesem Abschnitt soll die bekannte Methode der kleinen Schwingungen herangezogen werden, während im folgenden Abschnitt die Aufstellung von Phasenporträts der Bewegungen einen anderen, völlig strengen und dabei anschaulichen Weg zur Kennzeichnung der Bewegungen aufzeigen wird.

Wir betrachten diejenige Lage des Kardansystems, bei der die Rotorachse vertikal steht, also $\vartheta = 0$ ist. Diese Lage ist bei beliebigen konstanten Werten von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ stets Lösung der Bewegungsgleichungen (6), (7) und (8) falls, wie hier vorausgesetzt wurde, $\vartheta_0 = 0$ ist. Für die Nachbarbewegungen zur vertikalen Lage setzen wir üblicherweise $\cos\vartheta \approx 1$ und $\sin\vartheta \approx \vartheta$. Dann folgt aus (8):

$$\left.\begin{aligned} &(A_1 + A_2)\,\ddot{\vartheta} + \left[-(A_1 + B_2 - C_2)\,\dot{\psi}^2 + C_1\, r_0\, \dot{\psi} - m\, g\, s\right]\vartheta = 0 \\ \text{bzw.} \qquad &\ddot{\vartheta} + \left[-k_6\,\dot{\psi}^2 + k_1\,\dot{\psi} - \frac{k_3}{2}\right]\vartheta = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Darin ist $\dot{\psi}$ nach (14) eine Funktion von ϑ. Wenn für $t = 0$ $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$ gilt, so hat man die Impulskomponente

$$D_z = C_1 r_0 + (C_2 + C_3)\,\dot{\psi}_0 .$$

Setzt man diesen Wert in (14) ein und berücksichtigt $\cos\vartheta \approx 1$, so folgt für alle weiteren t: $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$. Folglich kann bei der hier vorgenommenen Näherungsrechnung $\dot{\psi}$ in (24) als Konstante betrachtet werden. (24) ist dann die Differentialgleichung eines konservativen Schwingers von einem Freiheitsgrad, dessen Rückführkonstante durch den in eckigen Klammern stehenden Ausdruck gegeben ist. Stabile Schwingungen um die Gleichgewichtslage $\vartheta = 0$ können nur existieren, wenn die Rückführkonstante positiv ist. Durch Nullsetzen der Rückführkonstante und Auflösen der so entstehenden in $\dot{\psi}$ quadratischen Gleichung findet man die beiden Grenzwerte:

$$\left.\begin{matrix}\dot{\psi}_1\\ \dot{\psi}_2\end{matrix}\right\} = \frac{k_1}{2\,k_6}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\,k_3\,k_6}{k_1^2}}\,\right] . \tag{25}$$

Stabile Schwingungen sind möglich, wenn (unter der Voraussetzung $k_1 > 0$ und $k_6 > 0$)

$$\dot{\psi}_1 > \dot{\psi} > \dot{\psi}_2 \tag{26}$$

ist. Je nach dem Vorzeichen von k_3 sind nun die beiden Fälle des „aufrechten" ($k_3 > 0$, Schwerpunkt senkrecht über dem Schnittpunkt der Kardanachsen) und des „hängenden" Kreisels ($k_3 < 0$, Schwerpunkt senkrecht unter dem Schnittpunkt der Kardanachsen) zu unterscheiden. Es gilt:

$$\text{für den aufrechten Kreisel:}\quad \dot{\psi}_1 > \dot{\psi}_2 > 0 ,$$
$$\text{für den hängenden Kreisel:}\quad \dot{\psi}_1 > 0 > \dot{\psi}_2 .$$

Daraus folgt, daß der aufrechte Kreisel nicht stabil sein kann, wenn nicht seinem Kardansystem ein gewisser Anstoß — und zwar in der Bewegungsrichtung des Rotors — gegeben wird. Dieser Anstoß darf jedoch nicht zu groß werden, weil sonst die obere Stabilitätsgrenze ($\dot{\psi} = \dot{\psi}_1$) überschritten wird. Der hängende Kreisel ist bei ruhendem Kardansystem stets stabil, jedoch kann auch er seine Stabilität verlieren, wenn das Kardansystem entweder entgegen der Drehrichtung des Rotors so angestoßen wird, daß $\dot{\psi} < \dot{\psi}_2 < 0$ wird, oder wenn es in der Drehrichtung des Rotors mit $\dot{\psi} > \dot{\psi}_1 > 0$ angestoßen wird. Stabilität ist also nur in einem ganz bestimmten Bereich von $\dot{\psi}$-Werten möglich. Die Grenzen dieses Bereiches fallen gerade mit denjenigen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\psi}$ zusammen, die sich für die regulären Präzessionen mit $\vartheta \to 0$ aus (22) ergeben. Nur für $\dot{\psi}$-Werte, die zwischen den Geschwindigkeiten der regulären Präzessionen liegen, ist die vertikale Lage stabil. Man kann diese Bereiche auch aus Abb. 16 für $\vartheta = 0$ (aufrechter Kreisel) bzw. $\vartheta = 180°$ (hängender Kreisel) erkennen, da der Übergang vom aufrechten zum hängenden Kreisel außer durch Wechsel des Vorzeichens von k_3 auch durch Übergang von $\vartheta = 0$ zu $\vartheta = 180°$ bei $k_3 = \text{const.}$ erreicht werden kann.

Der Stabilitätsbereich des aufrechten Kreisels ist in jedem Falle kleiner als der des hängenden; für $k_1^2 = 2\,k_3\,k_6$ schrumpft er auf Null zusammen, weil dann die notwendige Bedingung (23) für die Stabilität des aufrechten Kreisels nicht mehr erfüllt ist.

Die hier vorgenommenen Untersuchungen zur Stabilität können auch durch die Verwendung exakter Verfahren (z. B. nach *Ljapunov*) präzisiert werden, ohne daß sich an den Ergebnissen etwas ändert (s. z. B. [1]).

6. Veranschaulichung der Kreiselbewegungen durch das Phasenporträt. Unter Berücksichtigung der Abkürzungen (16) kann das Energie-Integral (12) durch Einsetzen von (14) in die Gestalt gebracht werden:

$$\dot{\vartheta}^2 = k_4 - k_3\cos\vartheta - \frac{(k_2 - k_1\cos\vartheta)^2}{k_5 - k_6\cos^2\vartheta} = k_4 - f(\vartheta) . \tag{27}$$

Darin ist $\dot{\vartheta}^2$ der kinetischen Energie des ϑ-Schwingers proportional, $f(\vartheta)$ ist ein Maß für die potentielle Energie, während k_4 die Energiekonstante ist. (27) kann als Gleichung des Phasenporträts für den Winkel ϑ aufgefaßt werden, wobei der Winkel ϑ üblicherweise als Abszisse, seine Änderungsgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ jedoch als Ordinate aufgetragen wird. Das Phasenporträt läßt die wesentlichsten Eigenschaften des Systems erkennen, ohne daß eine nochmalige Integration durchgeführt werden muß. Allerdings geht die Zeit dabei nur als Parameter ein, so daß der zeitliche Verlauf der Bewegung nicht unmittelbar abgelesen werden kann.

[1] *K. Magnus*, Prikladnaja Matematika i Mechanika 22 (1958) S. 173—178.

Im vorliegenden Fall hat man zur Konstruktion des Phasenporträts zunächst die „Potentialfunktion" $f(\vartheta)$ zu zeichnen. Die in $f(\vartheta)$ eingehenden Größen k_1 (bezogene Rotordrehung), k_3 (bezogenes Schwermoment), k_5 und k_6 (Trägheitsmomentenverhältnisse) sollen dabei als konstant betrachtet werden; dagegen werden die Impulskonstante k_2 und die in (27) eingehende Größe k_4 (Energiekonstante) variiert.

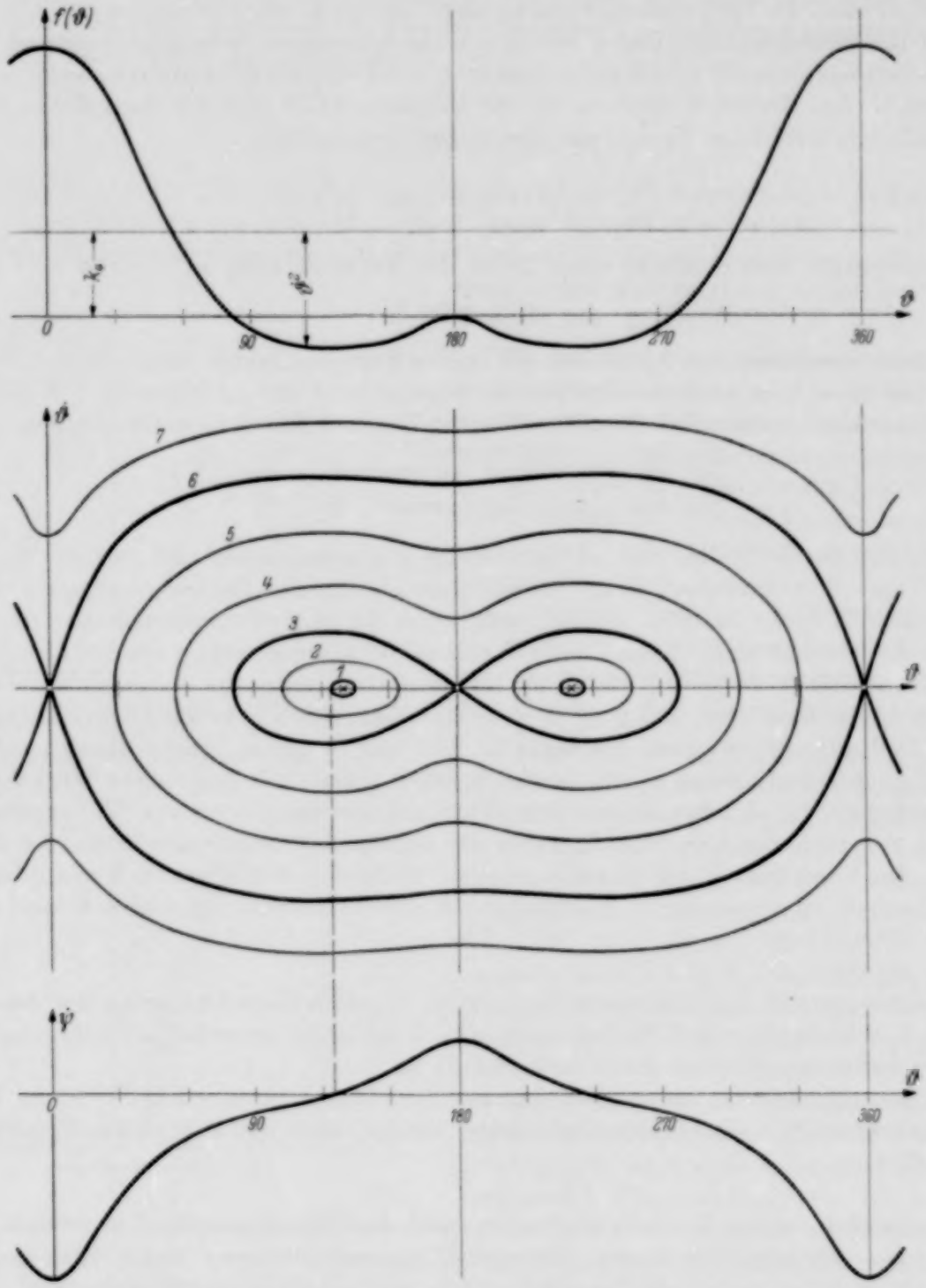


Abb. 17. Potentialfunktion $f(\vartheta)$, Phasenporträt $\dot{\vartheta}(\vartheta)$ und Präzessionsfunktion $\dot{\psi}(\vartheta)$ für einen kardanisch gelagerten Kreisel mit vorgegebener Impulskonstante k_2.

Die in Abb. 17 oben gezeichnete Potentialfunktion $f(\vartheta)$ hat Maxima bei den Werten $\vartheta = 0°$, $\vartheta = 180°$, sowie zwei dazwischen liegende Minima. $f(\vartheta)$ ist symmetrisch, so daß es genügt, ihren Verlauf im Bereich $0 \leqq \vartheta \leqq 180°$ zu kennen. Da der Schwinger konservativ ist, entsprechen den Maxima der Potentialfunktion instabile Gleichgewichtslagen; sie sind durch kleine Kreise auf der Abszisse von Abb. 17 mitte dargestellt worden; den Minima entsprechen stabile Gleichgewichtslagen, die durch Kreuze gekennzeichnet wurden.

Bei vorgegebener Energiekonstante k_4 kann der Wert von $\dot{\vartheta}^2$ aus Abb. 17 oben leicht als Differenz zwischen einer Parallelen zur Abszisse im Abstande k_4 und der $f(\vartheta)$-Kurve abgegriffen werden. Somit kann bei festgehaltenem k_4 zu jedem Wert von ϑ der zugehörige Wert von $\dot{\vartheta}$ ermittelt und

die entsprechende Kurve im Phasenporträt punktweise konstruiert werden. Zu jedem Wert von k_4 gehört eine „Phasenkurve" des Phasenporträt, die die Abszisse $\dot{\vartheta} = 0$ bei dem gleichen ϑ-Wert schneidet, bei dem auch der Schnitt zwischen der k_4-Geraden und der $f(\vartheta)$-Kurve in Abb. 17 oben auftritt. So entspricht dem eingezeichneten Wert von k_4 die mit der Nummer 4 bezeichnete Phasenkurve. Man erkennt sofort, daß nicht nur die stabilen Gleichgewichtslagen, sondern auch die Maxima der einzelnen Phasenkurven denselben Abszissenwert besitzen wie das Minimum der Potentialfunktion $f(\vartheta)$. Umgekehrt liegen die Minima der Phasenkurven und die instabilen Gleichgewichtslagen stets an den Stellen der Maxima von $f(\vartheta)$.

Jede Phasenkurve ist eine Lösungskurve der Differentialgleichung (27). Mit Ausnahme der singulären Punkte geht durch jeden Punkt der Phasenebene ($\dot{\vartheta}\,\vartheta$-Ebene) nur jeweils eine Lösungskurve. Physikalisch bedeutet dies, daß die Bewegung durch Vorgabe der Anfangsbedingungen für ϑ und $\dot{\vartheta}$ eindeutig bestimmt ist. Singuläre Punkte liegen auf der Abszisse an den Stellen der Extremwerte für die Funktion $f(\vartheta)$. Ihr Charakter ist durch den Verlauf der Lösungskurven in der Umgebung bestimmt; die von geschlossenen Lösungskurven umgebenen „Wirbelpunkte" entsprechen den stabilen Gleichgewichtslagen des Systems, während die von je zwei trennenden Lösungskurven (Separatrizen) durchlaufenen „Sattelpunkte" den instabilen Gleichgewichtslagen entsprechen. In der Umgebung der Sattelpunkte haben die Lösungskurven Hyperbelcharakter — während die Wirbelpunkte von ellipsenähnlichen Lösungskurven umgeben sind. Aus diesem Verlauf der Lösungskurven kann die Stabilität der Gleichgewichtslagen in unmittelbar anschaulicher Weise abgelesen werden.

Das Phasenporträt Abb. 17 mitte, läßt die möglichen Bewegungstypen leicht erkennen. Unter Berücksichtigung eines entsprechenden Diagramms für die Präzessionsgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ (Abb. 17 unten) lassen sich sogar Aussagen über die Form der Bahnkurven machen, die die Punkte der Figurenachse durchlaufen. Aus (19) sieht man, daß $\dot{\psi}$ nicht von der Größe der Energiekonstanten k_4 abhängt. Folglich gilt für alle im Phasenporträt gezeichneten Kurven dieselbe Abhängigkeit $\dot{\psi}(\vartheta)$.

Die innerhalb der Separatrix 3 gelegenen ellipsenartigen Phasenkurven (z. B. 1 und 2) ergeben Bewegungen, bei denen der Elevationswinkel ϑ zwischen zwei Grenzwerten schwankt. Da die zugehörigen Werte von $\dot{\psi}$ sowohl positiv als auch negativ sein können, beschreiben die Punkte der Figurenachse zykloidenähnliche Bahnen, die jeweils zwischen zwei Grenzkreisen liegen. Das entspricht vollkommen den vom *Lagrange*schen Fall her bekannten Ergebnissen. Die Bahnen können Wellen- oder Schleifen-Charakter haben und als trennenden Fall dazwischen auch Spitzen bilden. Auch diese Fälle lassen sich aus dem Phasenporträt erkennen. Lotet man nämlich den Punkt, bei dem die $\dot{\psi}$-Kurve durch die Abszisse läuft, in das Phasenporträt herauf, dann entspricht die dieses Lot tangierende Phasenkurve (hier Kurve *1*) gerade der Spitzenzykloide; bei ihr wird für $\dot{\vartheta} = 0$, also im Umkehrpunkt der Bewegung auch gleichzeitig $\dot{\psi} = 0$. Alle innerhalb der Phasenkurve *1* verlaufenden (nicht gezeichneten) Phasenkurven bilden demnach Wellenzykloiden; alle zwischen der Kurve *1* und der Separatrix *3* verlaufenden Phasenkurven ergeben Schleifenzykloiden. Bahnkurven des hier besprochenen Schleifentyps zeigen z. B. die Abb. 9, 12 und 14, während der Sonderfall der Spitzenzykloiden sehr schön in den Abb. 13 und 15 zu sehen ist.

Die zwischen den Separatrizen *3* und *6* liegenden Phasenkurven repräsentieren Schleifenbewegungen, bei denen der untere Pol des Systems ($\vartheta = 180°$) durchlaufen wird. Der innere Kardanring schlägt dabei durch die Ebene des äußeren Kardanringes. Bahnkurven dieser Art zeigen die Abb. 5 bis 8 und 10. Bei der Phasenkurve 7 von Abb. 17, die einem besonders großen Wert der Energiekonstanten k_4 entspricht, schlägt der innere Kardanring sowohl im unteren als auch im oberen Pol durch die Ebene des äußeren Kardanringes. Bewegungen dieser Art lassen sich zwar leicht beobachten, wenn man bei nicht zu starkem Eigendrall des Rotors den Innenring kräftig anstößt, jedoch sind die Projektionen ihrer Bahnkurven unübersichtlich, so daß sie hier nicht dargestellt wurden.

Die Separatrizen *3* und *6* entsprechen asymptotischen Bewegungen, bei denen der von den Separatrizen durchschnittene singuläre Punkt erst nach unendlich langer Zeit erreicht wird — ähnlich wie derartige Bewegungen auch bei dem *Lagrange*schen Kreisel untersucht worden sind (s. z. B. [1]). Man erkennt die Tatsache des asymptotischen Hereinwanderns in den singulären Punkt am einfachsten aus der Beziehung für den zeitlichen Verlauf der durch die Phasenkurven dargestellten Bewegung. Es gilt allgemein für die Zeit der Bewegung:

$$t = \int \frac{d\vartheta}{\dot{\vartheta}(\vartheta)} \,. \tag{28}$$

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950, Bd. I, § 7, S. 99.

Nähert man nun die Separatrizen in der unmittelbaren Umgebung der singulären Punkte durch ihre Tangenten an, setzt also $\dot{\vartheta} = \pm\, c\,\vartheta$ mit einer entsprechenden Konstanten c, so folgt aus (28):

$$t = \pm\,\frac{1}{c}\int\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \pm\,\frac{1}{c}\ln\vartheta + t_0\,, \tag{29}$$

mit einer neuen Integrationskonstanten t_0. Man erkennt, daß die Zeit für die Bewegung mit $\vartheta \to 0$ logarithmisch gegen unendlich geht, also eine asymptotische Annäherung stattfindet.

Es ist übrigens nicht schwer, sich die Veränderungen des Phasenporträts vorzustellen, die bei Vorhandensein nicht zu starker dissipativer Kräfte im System auftreten. Die Phasenkurven werden dann im allgemeinen nicht mehr geschlossen sein, sondern spiralig verlaufen. Dabei kann sich auch der Typ der Bewegung vollkommen ändern. So stellt die in Abb. 11 wiedergegebene Aufnahme eine Bewegung dar, deren Phasenkurve zunächst vom Typ der Phasenkurve *4* ist, dann aber die Separatrix 3 durchschneidet, um den Charakter der Phasenkurve *2* anzunehmen.

Das in Abb. 17 gezeichnete Phasenporträt gilt für einen festen Wert der Impulskonstanten k_2. Will man sich eine Übersicht über die Bewegungstypen verschaffen, die bei Variation von k_2 möglich sind, dann genügt es im allgemeinen, die Veränderungen der Lage der singulären Punkte im Phasenporträt (also der Gleichgewichtslagen) sowie den Verlauf der Separatrizen zu untersuchen. Die Gleichgewichtslagen sind durch die Extremwerte der Potentialfunktion $f(\vartheta)$ gegeben. Aus (27) findet man leicht durch Differentation:

$$\frac{df}{d\vartheta} = \sin\vartheta\left\{\frac{2\,(k_2 - k_1\cos\vartheta)\,[k_1\,(k_5 - k_6\cos^2\vartheta) - k_6\cos\vartheta\,(k_2 - k_1\cos\vartheta)]}{(k_5 - k_6\cos^2\vartheta)^2} - k_3\right\}. \tag{30}$$

Daraus sieht man zunächst, daß Extremwerte stets in den Pollagen $\vartheta = 0^\circ$ und $\vartheta = 180^\circ$ auftreten, da dort $\sin\vartheta$ verschwindet. Die Pollagen bilden also in jedem Falle Gleichgewichtslagen. Weitere Gleichgewichtslagen können existieren, wenn der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck zu Null wird. Da dieser eine Funktion 4. Grades für $\cos\vartheta$ ist, läßt sich eine allgemeine Lösung nicht angeben. Man kann jedoch die Verhältnisse unter Berücksichtigung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts recht gut übersehen: Bei vorgegebenen geometrischen Abmessungen des Systems (d. h. festen k_5 und k_6) und vorgegebenem Eigenimpuls des Rotors (d. h. festem k_1) hängt die Lage und auch die Zahl der Extremwerte der Potentialfunktion von der Größe der Impulskonstanten k_2 ab. Verändert man die Größe von k_2 gegenüber dem in Abb. 17 verwendeten Wert, so wirkt sich das in einer Verschiebung der Minima von $f(\vartheta)$, also der stabilen Gleichgewichtslagen im Phasenporträt aus. Die Gleichgewichtslagen können entweder in Richtung zur oberen oder zur unteren Pollage wandern. Bei Hereinwandern in eine der Pollagen wird aber deren Charakter geändert: der Sattelpunkt wird zu einem Wirbelpunkt, also die instabile Gleichgewichtslage stabil. Die Verzweigungsstellen für das Gleichgewicht in den Pollagen sind im vorhergehenden Abschnitt untersucht und sowohl für den aufrechten als auch für den hängenden Kreisel in Abhängigkeit von der Größe $\dot{\psi}$ bestimmt worden (s. Gleichung [25]).

Aus den kritischen Werten für $\dot{\psi}$ lassen sich nun leicht auch die entsprechenden kritischen Werte für die Impulskonstante k_2 ausrechnen: wegen (11) gilt unter Berücksichtigung von (16):

$$k_2 = k_1\cos\vartheta + \dot{\psi}\,(k_5 - k_6\cos^2\vartheta)\,. \tag{31}$$

Setzt man hierin die kritischen Werte $\dot{\psi}_1$ und $\dot{\psi}_2$ sowohl für den aufrechten (Index a) als auch für den hängenden Kreisel (Index h) ein, so bekommt man vier Grenzwerte für k_2, die wie folgt verteilt sind:

$$k_{21}^a > k_{22}^a > 0 > k_{21}^h > k_{22}^h\,. \tag{32}$$

Dabei wurde $k_3 > 0$ vorausgesetzt und deshalb der Übergang vom aufrechten zum hängenden Kreisel durch Veränderung von ϑ um den Betrag π vorgenommen.

Die qualitative Struktur des Phasenporträts ändert sich nun jedesmal, wenn k_2 einen der vier kritischen Werte (32) durchschreitet. Diese Änderungen sind in Abb. 18 dargestellt, und zwar sind — ähnlich wie schon in Abb. 17 — von oben nach unten die Funktionen $F(\vartheta)$, $\dot{\vartheta}(\vartheta)$ und $\dot{\psi}(\vartheta)$ mit gleichen Abszissenmaßstäben eingetragen. $F(\vartheta)$ ist dabei die um den Betrag $f(0)$ verschobene Potentialfunktion $f(\vartheta)$, also $F(\vartheta) = f(\vartheta) - f(0)$.

Zur Vereinfachung der Darstellung sind im Phasenporträt nur die singulären Punkte und die Separatrizen gezeichnet worden. Instabile Gleichgewichtslagen sind wieder durch einen Kreis, stabile durch ein Kreuz kenntlich gemacht. Die Fälle *A*, *B*, *C*, *D* gehören zu abnehmenden Werten für k_2.

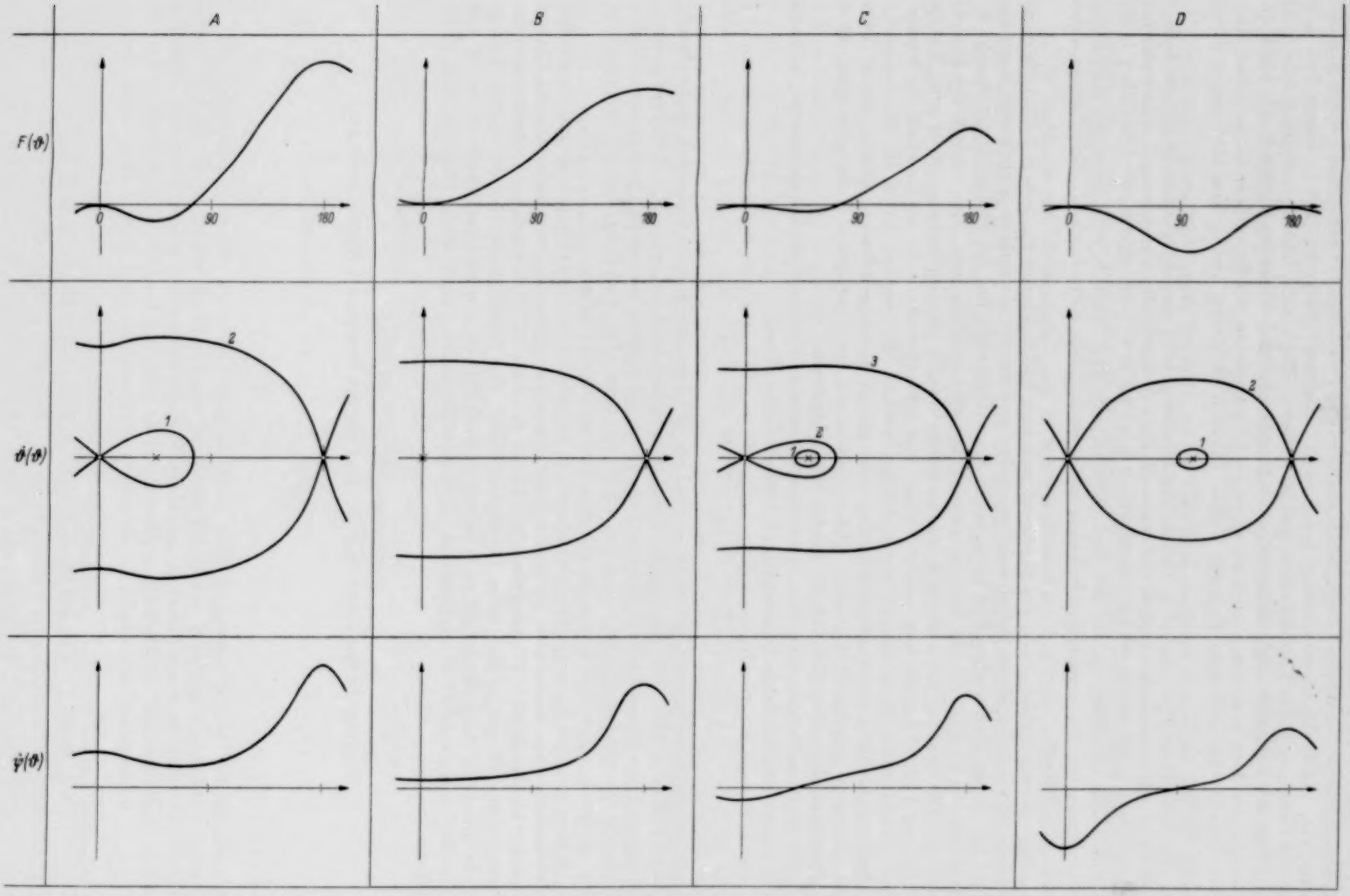


Abb. 18. Überschrift über den Einfluß von Veränderungen der Impulskonstanten k_3 auf das Bewegungsverhalten eines kardanisch gelagerten Kreisels. Die Fälle *A*, *B*, *C*, *D* entsprechen abnehmenden Werten von k_3. Wie bei Abb. 17 sind die (reduzierten) Potentialfunktionen $F(\vartheta)$, die Phasenporträts $\dot{\vartheta}(\vartheta)$ und die Präzessionsfunktionen $\dot{\psi}(\vartheta)$ gezeichnet worden.

Im Falle *A* ist $k_2 > k_{21}^a$; das ist bei starkem Anstoß des äußeren Kardanringes stets realisierbar. Neben den beiden instabilen Gleichgewichtslagen in den Polen existiert hier (ähnlich wie in Abb. 17) noch eine stabile Gleichgewichtslage bei $\vartheta \approx 45°$. Bemerkenswert ist, daß in diesem Fall stets $\dot{\psi} > 0$ bleibt, also das Kardansystem monoton dreht. Die stabile Gleichgewichtslage entspricht hier gerade der früher schon untersuchten „schnellen regulären Präzession" (Nutation). Nachbarbewegungen dazu verlaufen wieder zwischen zwei Grenzwerten des Elevationswinkels jedoch sind, ihre Bahnkurven stets vom Typ der Wellenzykloiden; Schleifen und Spitzen sind wegen $\dot{\psi} > 0$ nicht möglich.

Im Falle *B* ist $k_{21}^a > k_2 > k_{22}^a$. Durch Verkleinerung der Impulskonstanten ist die im Falle *A* noch getrennt vorhandene stabile Gleichgewichtslage in den Nullpunkt hereingewandert und hat diesen stabil gemacht. $F(\vartheta)$ hat entsprechend jetzt bei $\vartheta = 0$ ein Minimum. Alle zwischen der stabilen Gleichgewichtslage und der Separatrix verlaufenden Phasenkurven haben ein ellipsenähnliches Aussehen. Die zugehörigen Bahnkurven laufen in jedem Falle durch die obere Pollage, wobei stets $\dot{\psi} > 0$ bleibt.

Mit weiterer Verkleinerung von k_2 kommt man zum Fall *C*, für den $k_{22}^a > k_2 > 0$ gilt. Die obere Pollage ist wieder zu einem Sattelpunkt geworden, weil aus ihr ein stabiler Wirbelpunkt abgewandert ist, der im vorliegenden Fall bei $\vartheta \approx 50°$ liegt. Qualitativ hat das Phasenporträt das gleiche Aussehen wie im Falle *A*. Die Unterschiede werden aber deutlich, wenn man die $\dot{\psi}$-Kurve berücksichtigt. Die Drehung des äußeren Kardanrahmens braucht nicht mehr monoton zu sein. Wie im Falle von Abb. 17 können hier wieder Wellen- und Schleifenbahnen für die innerhalb der Separatrix verlaufenden Phasenkurven unterschieden werden. Sie werden durch die Phasenkurve *1* („Spitzenzykloide") voneinander getrennt. Die stabile Gleichgewichtslage gibt in diesem Falle die „langsame reguläre Präzession" wieder. Alle sonst noch möglichen Bahntypen entsprechen vollkommen den schon bei Abb. 17 ausführlich erläuterten.

Mit weiterer Verkleinerung von k_2 wandert die stabile Gleichgewichtslage nach rechts, während sich die sie umschließende Separatrix aufbläht. Bei dem Werte

$$k_2 = \frac{k_3\,(k_3 - k_6)}{2\,k_1} \quad \text{mit} \quad k_{22}^a > k_2 > k_{21}^b \tag{33}$$

verschmelzen beide Separatrizen zu einer einzigen, die dann durch beide Polpunkte hindurchläuft. Diesen Fall zeigt Abb. 18*D*. Die stabile Gleichgewichtslage ist dabei bis zu $\vartheta = 100°$ abgewandert. Es existiert eine Phasenkurve *1*, der eine Bahnkurve mit Spitzen entspricht. Sie trennt in üblicher Weise die Bereiche der Wellen- und der Schleifenbahnen. Der Fall *D* ist dadurch ausgezeichnet, daß die Maxima der $F(\vartheta)$-Kurve die gleichen Ordinatenwerte haben.

Würde man nun k_2 noch weiter verkleinern, so würden bei weiterem Rechtswandern der stabilen Gleichgewichtslage wieder zwei getrennte Separatrizen auftreten. Es entstünde dann ein Phasenporträt von dem in Abb. 17 gezeigten Typ. Die in den Abb. *A*, *B*, *C* gezeigten Veränderungen der Struktur des Phasenporträts beim Durchgang durch den Stabilitätsbereich der oberen Pollage wiederholen sich dann sinngemäß auch bei der unteren Pollage, nur sind die Punkte $\vartheta = 0°$ und $\vartheta = 180°$ entsprechend zu vertauschen. Auf eine Darstellung auch dieser Dinge in Abb. 18 ist daher verzichtet worden.

(Eingegangen am 29. April 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Kurt Magnus*, Stuttgart-O, Hackländerstr. 33.

Über die Lagrangeschen Gleichungen der Kinetik und der Elastostatik

Von **K. Marguerre**

Gibt es *Lagrange*sche Gleichungen der Elastostatik? Dem Sprachgebrauch nach nicht, und wir wollten einen solchen auch nicht vorschlagen. Aber es soll hier, neben einer Diskussion der beiden *Lagrange*schen Formulierungen der mechanischen Grundgleichungen, auch gezeigt werden, daß zwischen den kinetischen und den elastostatischen Gleichungen eine Entsprechung besteht, die uns das Recht gibt, von „*Lagrange*" im Zusammenhang mit den Grundgleichungen der Elastostatik zu sprechen; das mag die Überschrift (die sonst zu unförmig geworden wäre) rechtfertigen.

1. Die Lagrangeschen Gleichungen I. Art in Statik und Kinetik. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen. In den Physik-Lehrbüchern werden die *Lagrange*schen Gleichungen I. Art in etwa der folgenden Weise hergeleitet: Nach der Lex secunda ist die zeitliche Ableitung des Impulses $\mathfrak{P}$ gleich der geometrischen Summe der Kräfte. Bei einer virtuellen Verrückung $\delta\mathfrak{x}$ leisten die Zwangskräfte keine Arbeit — diese Feststellung definiert, was „Zwangs"-Kräfte und was „virtuelle" (d. h. geometrische erlaubte) Verrückungen sein sollen, — also ist auch

$$(\mathfrak{K} - \dot{\mathfrak{P}}) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0 \,. \tag{1.1}$$

worin $\mathfrak{K}$ die „eingeprägten" Kräfte repräsentiert. Zur Gleichung (1.1) treten die geometrischen Bedingungen (ihre Anzahl sei g); sie können entweder als „holonome" Beziehungen zwischen den n Koordinaten $(x_1 \cdots x_n) \equiv \mathfrak{x}$, oder (allgemeiner) als „nichtholonome" Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten $(\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_n) \equiv \dot{\mathfrak{x}}$ gegeben sein. Schreibt man sie für die virtuellen Verrückungen δx_ν an und fügt sie, mit „*Lagrange*schen Faktoren" λ_γ multipliziert, ein in die (als Summe von n Klammern geschriebene) Gleichung (1.1), so kann man g Klammern durch geeignete Wahl der λ_γ zum Verschwinden bringen, und schließt aus der Willkür der verbleibenden $f = n - g$ virtuellen Verrückungen (f ist die Zahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems), daß auch die restlichen Klammern null sein müssen. Als Ergebnis hat man n dynamische und g geometrische Gleichungen für die n Koordinaten x_ν und die g *Lagrange*schen Faktoren λ_γ.

Zwei Fragen drängen sich auf: Was haben die so gewonnenen Gleichungen zu tun mit den Grundgleichungen der Mechanik, wie sie der Ingenieur in „Technischer Mechanik III" lernt; was bedeuten insbesondere diese vom Himmel fallenden Multiplikatoren λ mechanisch? Und: Sind die $n + g$ simultanen Gleichungen für die Ausrechnung der Unbekannten zweckmäßig, und wie hängen sie zusammen mit den *Lagrange*schen Gleichungen II. Art?

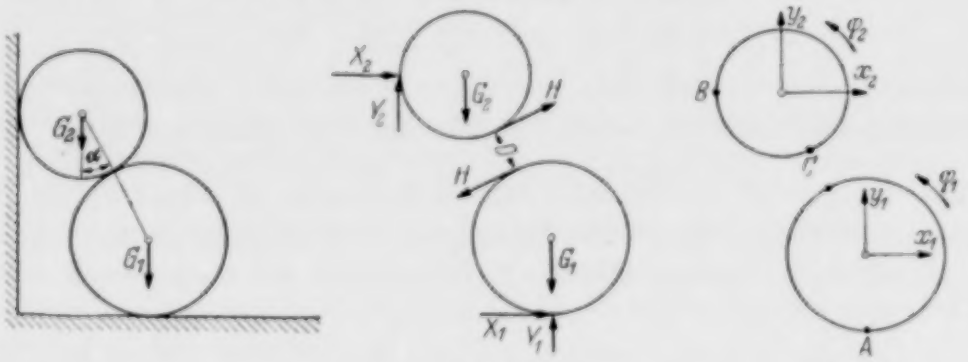


Abb. 1.

Die Erörterungen werden am einfachsten an Hand eines Beispiels: In den Nebenfiguren der Abb. 1 sind die Kugeln (oder Zylinder) mit den beim Lösen der Bindungen sichtbar werdenden 6 Kräften und den 6 Bewegungsmöglichkeiten eingetragen. Betrachten wir zunächst den Fall der Statik — die Haftungskräfte seien kleiner als die jeweiligen Produkte $\mu \cdot$ Druckkraft, so daß die Kugeln in der gezeichneten Lage bleiben; dann gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$[s \equiv \sin\alpha, c \equiv \cos\alpha]$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(a)}\ X_1 + D\,s - H\,c = 0\,, & & \text{(d)}\ X_2 - D\,s + H\,c = 0\,, & \\ \text{(b)}\ Y_1 - D\,c - H\,s - G_1 = 0\,, & & \text{(e)}\ Y_2 + D\,c + H\,s - G_2 = 0\,, & \\ \text{(c)}\ X_1\,r_1 + H\,r_1 = 0\,, & & \text{(f)}\ H\,r_2 - Y_2\,r_2 = 0\,. & \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Diese 6 Gleichungen können wir konzentriert und übersichtlich schreiben in Matrix-Form. Es sei

$$\mathfrak{R} = [0\,,\ -G_1\,,\ 0\,,\ 0\,,\ -G_2\,,\ 0] \tag{1.3a}$$

die Zeilenmatrix der „eingeprägten" Kräfte [die Anordnung der Komponenten ergibt sich aus der Reihenfolge der Gleichungen (1.2)]; es sei ferner

$$\mathfrak{H} = [X_1\,,\ Y_1\,,\ X_2\,,\ Y_2\,,\ D\,,\ H] \tag{1.3b}$$

(in willkürlicher Anordnung) die Zeilenmatrix der Reaktions-(„Halte"-)Kräfte, schließlich

$$\mathsf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -r_2 \\ s & -c & 0 & -s & c & 0 \\ -c & -s & r_1 & c & s & r_2 \end{bmatrix} \tag{1.3c}$$

die quadratische Matrix der Koeffizienten [ihre Anordnung ist durch (1.2) und (1.3b) festgelegt]. Dann liefern die Spalten der Matrizengleichung

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G} = 0\,, \tag{1.2'}$$

(wobei das Produkt $\mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}$ nach der Matrizen-Multiplikationsregel Zeile × Spalte gebildet wird) der Reihe nach die sechs Gleichungen (1.2); (1.2′) ist also eine Kurzschrift für (1.2).

Wir wollen nun zeigen, daß die Gleichgewichtsaussagen (1.2′) nichts anderes sind als die *Lagrange*schen Gleichungen I. Art. — Die Verbindung stellt das Prinzip der virtuellen Verrückungen her („Verrückung" = Verschiebung oder Drehung). Jede der sechs Gleichgewichtsaussagen (1.2) bringt zum Ausdruck, daß eine mögliche („virtuelle") Verrückung verhindert wird. Multipliziert man sie mit eben dieser Verrückung, so kann man jedes Glied als ein Arbeitsprodukt deuten, und die Gleichung selbst als die Aussage, daß eine Summe virtueller Arbeiten verschwindet. Da die einzelnen virtuellen Verrückungen voneinander unabhängig sind, kann man die sechs Arbeitsgleichungen auch addieren, und erhält an Stelle der Gleichgewichtsaussagen die Forderung, daß die Summe aller virtuellen Arbeiten verschwinden soll. Indem wir die Verrückungen zu einem „Vektor", genauer einer Spalten-Matrix,

$$\delta\mathfrak{x} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta\varphi_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta\varphi_2 \end{bmatrix} \equiv \{\delta x_1\,,\ \delta y_1\,,\ \delta\varphi_1\,,\ \delta x_2\,,\ \delta y_2\,,\ \delta\varphi_2\} \tag{1.3d}$$

zusammenfassen, lautet die Arbeitsaussage (die also mit (1.2′) gleichwertig ist)

$$(\mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,. \tag{1.4}$$

Zu eben dieser Gleichung gelangt die *Lagrange*sche Überlegung in der folgenden Weise: Die geometrischen Bedingungen, daß die Punkte A, B festliegen und die beiden Punkte $C_{1,2}$ sich gegen einander nicht bewegen sollen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(a)}\ \delta x_1 + r_1\,\delta\varphi_1 = 0\,, & \text{(c)}\ \delta x_2 = 0\,, \\ \text{(b)}\ \delta y_1 = 0\,, & \text{(d)}\ \delta y_2 - r_2\,\delta\varphi_2 = 0\,, \\ \text{(e)}\ \ s\,\delta x_1 - c\,\delta y_1 - s\,\delta x_2 + c\,\delta y_2 = 0\,, & \\ \text{(f)}\ -c\,\delta x_1 - s\,\delta y_1 + r_1\,\delta\varphi_1 + c\,\delta x_2 + s\,\delta y_2 + r_2\,\delta\varphi_2 = 0 & \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

lassen sich auffassen als die Zeilen der Matrizengleichung

$$\mathsf{G} \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,; \tag{1.5'}$$

darin ist G, wie man sich überzeugt, genau die Matrix (1.3c). Fügt man nun zu der Forderung, daß bei einer virtuellen, d. h. geometrisch zulässigen, Verrückung die eingeprägten Kräfte im Gleichgewichtsfall keine Arbeit leisten,

$$\mathfrak{R} \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \tag{1.1*}$$

die geometrische Forderung (1.5′), multipliziert mit einer *Lagrange*schen Zeilenmatrix $\mathfrak{Y}$, so steht die Gleichung (1.4) schon da. Aus (1.4) schließt man dann auf (1.2′), d. h. die *Lagrange*sche Überlegung leitet die gewöhnlichen Gleichungen der Statik aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen her.

Aus der Zulässigkeit beider Herleitungen folgt nachträglich, daß die Matrix G immer, nicht nur in unserem Beispiel, die Doppelbedeutung (1.2′), (1.5′) haben muß. Und die mechanische Bedeutung der *Lagrange*schen Multiplikatoren ist klar: Es sind die durch die geometrischen Bindungen hervorgerufenen Reaktionskräfte.

Die Frage ob (1.2′) oder (1.4) die zweckmäßigere Formulierung für die Bestimmung der Reaktionskräfte ist, läßt innerhalb der Statik keine allgemein gültige Antwort zu. Wohl aber in der Kinetik, der wir uns jetzt zuwenden. Die kinetischen Gleichungen unterscheiden sich von den statischen Gleichungen (1.2) [oder (1.2′)] in zweifacher Weise: Die Zahl g der geometrischen Reaktionskräfte ist verschieden von der Zahl n der Bewegungsmöglichkeiten; und zwar ist $g < n$. Außerdem tritt rechts an die Stelle von 0 die Impulsänderung $\dot{\mathfrak{P}}$. (1.2′) geht damit über in

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{Y}^k \cdot \mathsf{G}^k = \dot{\mathfrak{P}}, \tag{1.6}$$

worin $\mathfrak{Y}^k$, der „Vektor" der Reaktionskräfte während der Bewegung, nur $n - f$ Komponenten (f = Zahl der Freiheitsgrade) hat, und G^k eine Rechteck-Matrix ist, der die entsprechenden f Zeilen fehlen. Im Beispiel, wenn etwa der Punkt B des oberen Zylinders gleiten kann, fällt Y_2, die 4. Stützkraft, weg; es ist

$$\mathfrak{Y}^k = [X_1,\ Y_1,\ X_2,\ D,\ H], \tag{1.6′}$$

und G^k entsteht aus G durch Streichung der 4. Zeile:

$$\mathsf{G}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & -s & c & 0 \\ -c & -s & r_1 & c & s & r_2 \end{bmatrix} \tag{1.6″}$$

Im Gegensatz zur Statik (wo man gewöhnlich darauf verzichten kann das explizit anzuschreiben) tritt hier neben (1.6) als wesentlich der Satz der geometrischen Gleichungen

$$\mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0\,. \tag{1.7}$$

Im Beispiel sind das 5 Gleichungen für die 6 Komponenten des Geschwindigkeits-„Vektors" $\dot{\mathfrak{x}}$, so daß im ganzen 6 + 5 Gleichungen 5 + 6 Unbekannten gegenüberstehen.

Wie in der Statik die Gleichungen (1.2′) und (1.4), so haben in der Kinetik die Gleichungen (1.6) und die Aussage des Prinzips der virtuellen Verrückungen

$$(\mathfrak{R} - \dot{\mathfrak{P}} + \mathfrak{Y}^k \cdot \mathsf{G}^k) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0 \tag{1.8}$$

denselben mechanischen Inhalt. Aber die Formulierung (1.8) ist jetzt der Formulierung (1.6) entscheidend überlegen. Denn da man in der Kinetik die geometrischen Bedingungsgleichungen (1.7) auf jeden Fall explizit braucht, so hat man in der Fassung (1.8) ein ungemein bequemes Mittel, die geometrischen Reaktionskräfte zu eliminieren: Man braucht nur $\delta\mathfrak{x} \sim \dot{\mathfrak{x}}$ zu wählen, dann fällt wegen (1.7) der hintere Term in (1.8) heraus, und es bleiben für die Bestimmung der n Bewegungskomponenten die g Gleichungen $\mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0$ und die f Gleichungen $(\mathfrak{R} - \dot{\mathfrak{P}}) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0$; denn nur $f = n - g$ der n Komponenten von $\delta\mathfrak{x}$ sind (dank $\mathsf{G}^k \cdot \delta\mathfrak{x} = 0$) noch „frei". An die Stelle von (1.7) und (1.8) tritt also der Gleichungssatz

$$\mathsf{G}^k \cdot \delta\mathfrak{x} = 0, \quad (\mathfrak{R} - \dot{\mathfrak{P}}) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0, \quad \mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0\,. \tag{1.9}$$

Im Beispiel (der zweite Zylinder gleite links an der Wand) würde man fünf der Verrückungsgeschwindigkeiten mit Hilfe der dritten Gl. (1.9) durch die sechste, etwa x_1, ausdrücken:

$$\dot{x}_2 = \dot{y}_1 = 0\,, \quad r_1\dot{\varphi}_1 = -\dot{x}_1\,, \quad \dot{y}_2 = -\dot{x}_1 \tan\alpha\,, \quad r_2\dot{\varphi}_2 = \dot{x}_1 \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\,, \tag{a}$$

entsprechend ansetzen

$$\delta x_2 = \delta y_1 = 0\,, \quad r_1\delta\varphi_1 = -\delta x_1\,, \quad \delta y_2 = -\delta x_1 \tan\alpha\,, \quad r_2\delta\varphi_2 = \delta x_1 \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\,, \tag{b}$$

und erhielte aus der mittleren Gl. (1.9) die *eine* noch fehlende Gleichung zur Bestimmung der 6 Komponenten von $\mathfrak{x}$:

$$G_2 \tan\alpha - \left(m\ddot{x}_1 - \frac{\Theta_1}{r_1}\ddot{\varphi}_1 - m_2\ddot{y}_2 \tan\alpha + \frac{\Theta_2}{r_2}\ddot{\varphi}_2 \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = 0\,. \tag{c}$$

Aus (c) wird mit (a) eine Gleichung für $\ddot{x}_1$ allein. Wenn man nicht nur den Anfang der Bewegung studieren will, muß dabei α als veränderlich behandelt werden — man kommt dann darauf, α an Stelle von x als Unbekannte zu benutzen; davon im nächsten Abschnitt.

Aus (1.8) kann man durch eine andere Wahl der virtuellen Verrückungen auch jede der Reaktionskräfte einzeln erhalten. Lockert man die erste Gleichung (1.9), indem man in G^k die γ-te Zeile wegläßt, so bleibt in (1.8) H_γ stehen. An die Stelle von (1.9) tritt allgemeiner

$$\mathsf{G}^k_* \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad (\mathfrak{R} - \mathfrak{P}^{\cdot\cdot} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^k) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad \mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0\,, \tag{1.9*}$$

wobei der $_*$ in G^k_* darauf hinweisen soll, daß dort eine Zeile fehlt, d. h. daß zwischen den δx_ν eine Bindung weniger besteht, als zwischen den $\dot{x}_\nu$.

Will man in unserem Beispiel etwa X_2, die dritte Reaktionskraft, ausrechnen, so streicht man in (1.6*) die dritte Zeile. Damit tritt an die Stelle von (b):

$$\left.\begin{aligned} &\delta y_1 = 0\,, \qquad r_1\,\delta\varphi_1 = -\delta x_1\,, \qquad \delta y_2 = -\delta x_1 \tan\alpha + \delta x_2 \tan\alpha\,,\\ &r_2\,\delta\varphi_2 = \delta x_1 \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} - \delta x_2 \frac{1}{\cos\alpha}\,, \end{aligned}\right\} \tag{b'}$$

und statt (c) erhält man durch Ordnen nach den Faktoren $\delta x_1, \delta x_2$ zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten x_1 und X_2 (die anderen Verschiebungen x_ν seien vermöge der unverändert gültigen Gleichungen (a) durch x_1 ersetzt); hat man x_1 schon vorher bestimmt, so ist von diesen beiden Gleichungen nur die zweite neu.

2. Die Lagrangeschen Gleichungen II. Art. Die Gleichung (c) des Beispiels ist, wenn man darin (a) einsetzt, im Kern schon eine *Lagrange*sche Gleichung II. Art. Allgemein: die mittlere Gleichung (1.9) liefert f Gleichungen für f Unbekannte, wenn man alle überzähligen Bewegungskomponenten mit Hilfe der beiden äußeren Gleichungen eliminiert. Diese f Gleichungen lassen, wenn die geometrischen Bindungen holonom sind, noch zwei Umformungen zu, die man sich gewöhnlich vorgenommen denkt, wenn man von den *Lagrange*schen Gleichungen II. Art spricht.

Die erste Umformung besteht darin, daß man sich die g Beziehungen zwischen den x_ν aufgelöst denkt in der Form

$$x_\nu = x_\nu\,(q_1 \cdots q_f)\,,$$

d. h. $\mathfrak{x}$ betrachtet als Funktion der „generalisierten Koordinaten" q_φ, deren es bei $f = n - g$ Freiheitsgraden genau f gibt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(q_1 \cdots q_f)\,. \tag{2.1}$$

Damit sind die äußeren Gleichungen (1.9) abgegolten, und wegen $\delta\mathfrak{x} = \sum_1^f \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_\varphi} \cdot \delta q_\varphi$, (worin die δq_φ frei sind), werden aus der mittleren Gleichung (1.9), wenn wir noch die Impulsableitung $\mathfrak{P}^{\cdot\cdot}$ mit Hilfe einer Diagonalmatrix $\mathfrak{M}$, die die n Massen (oder Drehmassen) enthält, durch $\ddot{\mathfrak{x}}$ ausdrücken, die f Gleichungen

$$\ddot{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{M} \cdot \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_\varphi} - \mathfrak{R} \cdot \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_\varphi} = 0\,. \tag{2.2}$$

In unsererem Beispiel (Gleiten des Zylinders „2" entlang der vertikalen Wand) würde man als Koordinate q zweckmäßig den Winkel α wählen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l\sin\alpha\,, & r_1\varphi_1 &= -l\sin\alpha\\ y_2 &= l\cos\alpha\,, & r_2\varphi_2 &= l\,(\alpha + \sin\alpha) \end{aligned}\right\} \text{ mit } l = r_1 + r_2\,.$$

[Die beiden hinteren Gleichungen findet man am einfachsten durch Integration der X_1- und der H-Rollbedingung in (b)]. Gleichung (c) liefert die *eine* Bewegungsgleichung (2. Ordnung) für α, die den Bewegungszustand beherrscht, solange $x_2 = 0$ ist, d. h. bis der linke Zylinder sich von der Wand löst ($X_2 = 0$).

Die zweite Umformung macht den Energiebegriff für die Handhabung (oder Gewinnung) der Gleichungen (2.2) fruchtbar. Wenn sich $\mathfrak{R}$ von einem Potential ableiten läßt:

$$K_\nu = -\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \qquad \left(\text{d. h. } \mathfrak{R} = -\frac{\partial U}{\partial\mathfrak{x}}\right), \tag{2.3}$$

so schreibt sich der zweite Term einfach $\partial U/\partial q_\varphi$. Der erste läßt sich durch die kinetische Energie T ausdrücken. Man benutzt die Identität

$$\ddot{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{M} \cdot \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{M} \cdot \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial q_\varphi}\right) - \dot{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{M} \cdot \frac{\partial\dot{\mathfrak{x}}}{\partial q_\varphi}\,, \tag{2.4}$$

und die Tatsache, daß, wenn die Zeit nicht explizit auftritt (skleronome Probleme), $\dot{\mathfrak{x}} = \sum \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_\varphi} \dot{q}_\varphi$, und daher

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}}{\partial \dot{q}_\varphi} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_\varphi} \tag{2.5}$$

ist. Dann lassen sich in (2.4) rechts beide Terme als Ableitungen von

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathfrak{x}} \cdot \mathfrak{M} \cdot \dot{\mathfrak{x}} = \frac{1}{2} \sum m_\nu \dot{x}_\nu^2 \tag{2.6}$$

auffassen, und man erhält für (2.2) und (2.3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\varphi} + \frac{\partial U}{\partial q_\varphi} = 0 \,. \tag{2.7}$$

Da U von $\dot{q}$ nicht abhängt, läßt sich das noch eleganter in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\varphi} = 0 \,, \qquad \text{mit} \qquad L = T - U \tag{2.7'}$$

schreiben. — Gleichung (2.7′), die klassische *Lagrange*sche Gleichung II. Art, läßt sich erweitern auf den Fall, daß Reibungskräfte (oder andere Nicht-Potentialkräfte) auftreten. Wir wollen das aber nicht weiter verfolgen, da die ganze Umformung des Terms $\dot{\mathfrak{P}} \cdot \delta\mathfrak{x}$ in (1.9) mit Hilfe der kinetischen Energie schon in den „klassischen" Fällen keineswegs immer vorteilhaft ist: Wohl stellt die in (2.7′) steckende Minimalforderung für einen Energieausdruck etwas Gedanklich-befriedigendes dar, das zugleich (wenn man die *Hamilton*sche Formulierung heranzieht) für Näherungsüberlegungen fruchtbar gemacht werden kann; aber die Bewegungsgleichungen erhält man oft viel einfacher aus (1.9). Ganz auffällig z. B. in unserem Problem Abb. 1; aber auch bei dem beliebtesten *Lagrange*-Beispiel, dem physischen Doppelpendel, erfordert es wesentlich weniger geistigen Aufwand (und, wenn man physikalische Vektoren benutzt, sogar weniger Schreibarbeit) die Produktsumme $\ddot{\mathfrak{x}} \cdot \delta\mathfrak{x}$ zu bilden, als den Ausdruck für T herzustellen und dann nach der Vorschrift (2.7) zu differenzieren.

3. Statik, Kinetik und Elastostatik. In § 1 haben wir die *Lagrange*schen Gleichungen I. Art zunächst für die Statik [Gleichung (1.2′)], dann für die Kinetik formuliert [Gleichungen (1.6) und (1.7)]. Wir greifen die Fragestellung an Hand einer Modifikation des Beispiels 1 noch einmal auf (s. Abb. 2), indem wir Reibung zulassen (also nicht, wie zuerst, nur Haftung oder ideales Gleiten); das wird uns dazu zwingen, Gleichungen und Unbekannte anders — schärfer — abzuzählen. Außerdem liegt es dann nahe, von der Statik aus nach der „anderen Seite" vorzustoßen: nach der Seite der Elastostatik, wo die Zahl g der Stützkräfte nicht kleiner (wie in der Kinetik), sondern größer ist als die Zahl n der möglichen Starrkörper-Bewegungen.

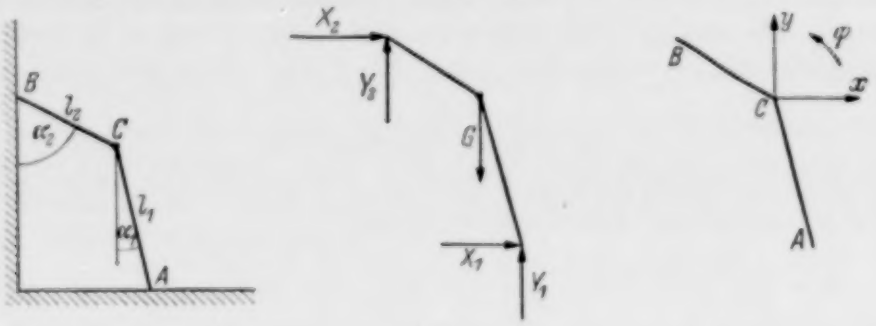


Abb. 2.

Der Stabzug Abb. 2 soll an der Stelle C ein Gewicht G (in der Kinetik also auch eine Masse) tragen. In der Elastostatik habe er dort außerdem ein elastisches Drehgelenk.

Wie rekapitulieren kurz die Statik. Es sei $Y_2 = 0$, dann haben wir $g = 3$ geometrische Aussagen für die $n = 3$ Verrückungen, $n = 3$ dynamische Gleichungen für $g = 3$ geometrische Reaktionskräfte: Die Kräfte können also bestimmt werden, ohne daß von den Verrückungen die Rede ist:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G} = 0 \\ \text{mit} \quad &\mathfrak{R} = [0, -G, 0], \quad \mathfrak{H} = [X_1, Y_1, X_2] \\ \text{und} \quad &\mathsf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 c_1 \\ 0 & 1 & l_1 s_1 \\ 1 & 0 & -l_2 c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

worin c_1, c_2, s_1, s_2 für $\cos\alpha_1$ etc. geschrieben ist. Ebenso sind die Verrückungen unabhängig von den Kräften. Wird der Stabzug z. B. um $T°$ erwärmt, so führen wir einen Spaltenvektor $\mathfrak{u}$ ein, der die beiden Verrückungen (gegen C) des Punktes A und die waagrechte des Punktes B beschreibt, die eintreten würden, wenn die Stäbe der Temperaturdehnung αT frei folgen könnten:

$$\mathfrak{u} = \alpha T \{l_1 s_1, -l_1 c_1, -l_2 s_2\} .$$

Wir erhalten dann die Komponenten x, y, φ des Verschiebungs-„Vektors" $\mathfrak{x}$ aus

$$\mathsf{G} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{u} = 0 . \tag{3.2}$$

Die Kinetik ist gekennzeichnet durch $g < n$ (außer $Y_2 = 0$ z. B. auch noch $X_1 = 0$ — womit Gleitreibung nicht ausgeschlossen ist!); damit werden Kräfte und Bewegungen voneinander abhängig. Man hat jetzt $n = 3$ dynamische Gleichungen für $g = 2$ Haltekräfte und $g = 2$ geometrische Gleichungen für $n = 3$ Bewegungsgrößen. Die dynamischen Gleichungen lassen sich nur erfüllen, wenn neue Kräfte ins Spiel treten, und die wollen wir die kinetischen Reaktionskräfte $\mathfrak{R}$ nennen. Es sind dies die n Trägheitskräfte J_r (oder weniger, wenn man z. B. Drehträgheitsglieder vernachlässigen kann), dazu Reibungskräfte R_i, evtl. Federkräfte F_i, wenn elastische Fesseln existieren, etc., im ganzen k. Sie alle werden durch ein physikalisches Gesetz (*Newton*sches Gesetz, *Coulomb*sches Gesetz, *Hooke*sches Gesetz) mit den Verrückungen verbunden — im Beispiel:

Geometrie und Dynamik

$$\mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0 , \quad \mathfrak{K} + \mathfrak{R} + \mathfrak{Y}^k \cdot \mathsf{G}^k = 0 ,$$

mit

$$\dot{\mathfrak{x}} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}\} , \qquad \mathfrak{K} = [0, -G, 0] , \qquad \mathfrak{Y}^k = [Y_1, X_2] , \qquad \mathsf{G}^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & l_1 s_1 \\ 1 & 0 & -l_2 c_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

dazu Physik

$$\mathfrak{R} = [J_1, J_2, J_3] + [R_1, R_2, R_3]$$

[wenn wir z. B. Trägheit und Reibung haben], mit

$$\begin{aligned} J_1 &= -m\ddot{x} , & J_2 &= -m\ddot{y} , & J_3 &= -\Theta\ddot{\varphi} , \\ R_1 &= -\mu Y_1 , & R_2 &= +\mu X_2 , & R_3 &= R_1 l_1 s_1 - R_2 l_2 c_2 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Es stehen also $n = 3$ Verschiebungsgrößen und $g + k = 2 + 5$ Kraftgrößen, $g + n + k$ Gleichungen gegenüber. [Die dritte Komponente der Reibungs-„kraft", ihre Drehwirkung, geht in die Abzählung nicht ein; die Temperaturdehnung spielt als „klein" für die Bewegung keine Rolle.]

Wenden wir uns nun von der Statik zur Elastostatik, indem wir die Zahl der geometrischen Bindungen nicht vermindern, sondern vermehren [im Beispiel etwa durch vollkommene Fixierung der beiden Punkte A und B], so werden diesmal die geometrischen Aussagen unerfüllbar, es sei denn wir lassen neue Verrückungsgrößen zu. Solche erhalten wir, indem wir den Körper — oder seine Stützung — als nachgiebig betrachten. In Abb. 2 mag z. B. der Drehfeder bei C die neue Bewegungsmöglichkeit zu verdanken sein: die Stäbe sollen um voneinander verschiedene Winkel

$$\varphi_1 = \varphi , \qquad \varphi_2 = \varphi + \psi$$

rotieren können. Außerdem mögen die Stäbe elastische Dehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ aufweisen. Die $g + n = 4 + 3$ geometrischen und dynamischen Gleichungen lauten

$$\mathsf{G}^e \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{v} + \mathfrak{u} = 0 , \qquad \mathfrak{K} + \mathfrak{Y}^e \cdot \mathsf{G}^e = 0 ,$$

mit

$$\mathfrak{x} = \{x, y, \varphi\} , \qquad \mathfrak{K} = [0, -G, 0] , \qquad \mathfrak{Y}^e = [X_1, Y_1, X_2, Y_2] ,$$

und einer Matrix G^e, die, wie in der Kinetik, ein Rechteck mit n Spalten ist, aber diesmal mit $g = 4$ Zeilen:

$$\mathsf{G}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 c_1 \\ 0 & 1 & l_1 s_1 \\ 1 & 0 & -l_2 c_2 \\ 0 & 1 & -l_2 s_2 \end{bmatrix} . \tag{3.5}$$

Der „eingeprägte" Verrückungs-Vektor $\mathfrak{u}$ (natürlich eine Spaltenmatrix) hat jetzt 4 Komponenten

$$\mathfrak{u} = \alpha T \{l_1 s_1 , \quad -l_1 c_1 , \quad -l_2 s_2 , \quad -l_2 c_2\} ,$$

ebenso der Verrückungsvektor $\mathfrak{v} = \{\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\}$, der durch die elastischen Verformungen entsteht:

$$\xi_1 = \varepsilon_1 l_1 s_1 , \qquad \eta_1 = -\varepsilon_1 l_1 c_1 , \qquad \xi_2 = -\varepsilon_2 l_2 s_2 - \psi l_2 c_2 , \qquad \eta_2 = \varepsilon_2 l_2 c_2 - \psi l_2 s_2 . \tag{3.6}$$

Zwischen den $k = 3$ elastischen Verformungen ψ, ε_1, ε_2, und den Kräften $X_1 \dots Y_2$ bestehen die physikalischen (hier aus dem *Hooke*schen Gesetz folgenden) Beziehungen:

$$\psi = -\gamma\,(X_2\,l_2\,c_2 + Y_2\,l_2\,s_2)\,, \qquad \varepsilon_1 = \beta_1\,(X_1\,s_1 - Y_1\,c_1)\,, \qquad \varepsilon_2 = \beta_2\,(-X_2\,s_2 + Y_2\,c_2)\,, \tag{3.7}$$

wenn γ [1/cm kg] den Reziprokwert der Drehfeder-Steifigkeit und β [1/kg] den Reziprokwert der Dehnsteifigkeit bezeichnet. Im Sonderfall $\beta = 0$ hätte man 4 geometrische Aussagen für die 4 geometrischen Größen; da würden die Verformungen also unabhängig von den Kräften. Die Kräfte aber können nur bestimmt werden mit Hilfe der ersten Gleichung (3.7): Das System ist statisch unbestimmbar, oder wie man (auf Kosten der Schärfe des Ausdrucks) bequemer sagt, statisch unbestimmt: $n + k = 3 + 3$ (oder $3 + 1$) Verrückungen und $g = 4$ Reaktionskräften stehen $g + k + n$ Gleichungen gegenüber, wobei $k \neq 0$ sein muß.

Die Erörterung der kinetischen Gleichungen (3.3) hat uns — zwangsläufig — dazu geführt, drei Typen von Kräften zu unterscheiden: Eingeprägte Kräfte (z. B. das Gewicht), Stützreaktionen, die wir als die geometrischen Reaktionskräfte bezeichnen möchten (kürzer wäre Zwangskräfte), und einen dritten Typ, für den wir die Bezeichnung kinetische Reaktionskräfte (kürzer: Wechselkräfte (?)) vorschlagen. In der analytischen Mechanik ist es üblich, nur zwei Arten von Kräften zu unterscheiden: Reaktionskräfte und Eingeprägte, wobei „man die Reibungskräfte zu den eingeprägten Kräften zählen muß", wie die etwas vage Formulierung gewöhnlich heißt. Wir halten diese Zweiteilung sachlich und sprachlich für unglücklich; denn „eingeprägt" ist eine Kraft, wenn sie sich dem System effektiv einprägt, d. h. unabhängig ist von seiner Reaktion. Das sind die Reibungskräfte vom Typ μY keineswegs: sie hängen entschieden ab von der Reaktion, d. h. der Bewegung des Systems. Dasselbe gilt für Reibungskräfte vom Typ $r\,\dot{x}$ oder Federkräfte vom Typ $c\,x$. — Mit den drei Kräftegruppen kommt man aber auch aus. Denn wenn $r\,\dot{x}$ und $c\,x$ zu der dritten Gruppe gehören, ist es sinnvoll auch die Trägheitskräfte $m\,\ddot{x}$ dazu zu rechnen; denn auch sie werden durch die Bewegung des Systems geweckt, auch sie hängen über ein physikalisches Gesetz mit den Verrückungsgrößen zusammen. [Von einem mehr philosophischen Standpunkt aus ist gegen den Begriff der Trägheits-„Kraft" allerdings einzuwenden, daß zu ihr nicht, wie zu jeder echten Kraft die Gegenkraft gehört, die nur durch Herausschneiden des Objektes aus seiner Umgebung eliminiert — genauer: den Blicken entzogen — wird (das Wort „Wechselkraft" würde auf sie *nicht* passen). Aber dieser Einwand fällt nicht ins Gewicht gegenüber der Handlichkeit der Formeln (3.3/4), und gegenüber einem Sprachgebrauch, der durch *d'Alemberts* Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ja allgemein geworden ist.]

Der Umstand, daß die Reibungskräfte an radikal anderer Stelle der Zentralgleichung (3.3) auftauchen als die Haftkräfte, hat uns übrigens veranlaßt, das irreführende Wort „Haftreibung" durch „Haftung" zu ersetzen, d. h. von „Reibung" nur zu sprechen, wenn es sich um, im Sprachgebrauch des Physikers, Gleitreibung handelt; übrigens ist auch die Vorsilbe „Gleit" mit ihrer Klangverwandtschaft zu „glatt" in diesem zusammenhang unglücklich — ein weiterer Grund, das Wort Haft„reibung" zu vermeiden.[1]

4. Das Prinzip der virtuellen Kräfte. In § 2 hatten wir schon festgestellt, daß die Arbeitsgleichung (1.8) der nackten Gleichung (1.6) entscheidend überlegen ist, weil man bei Benutzung von (1.8) durch eine geeignete Wahl der virtuellen Verrückungen die Reaktionskräfte ohne Rechnung los wird. Dasselbe gilt natürlich für die Gleichung (3.3), an deren Stelle man praktisch stets den Gleichungssatz [vgl. (1.9)]

$$\mathsf{G}^k \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad (\mathfrak{K} + \mathfrak{R}) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad \mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0 \tag{4.1}$$

benutzen wird. Er liefert, wenn man noch die Kräfte $\mathfrak{R}$ durch die Verrückungen ausdrückt, n Gleichungen für eben diese Verrückungen — die ja in der Kinetik primär interessieren. Will man einzelne Reaktionskräfte wissen, so lockert man die erste Gleichung (4.1) durch Weglassen einer Zeile in G^k, und erhält im Sinne der Gleichung (1.9*):

$$\mathsf{G}^k_* \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad (\mathfrak{K} + \mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad \mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0\,. \tag{4.1*}$$

Es ist klar, daß man die elastostatischen Gleichungen (3.5/6) in ähnlicher Weise wird vereinfachen wollen. Das bereitet in der Tat keinerlei Schwierigkeit: Man führt $g = n + r$ virtuelle (Reaktions-)Kräfte $\delta\mathfrak{H}$ ein, die den n Gleichgewichtsbedingungen

$$\delta\mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e = 0 \tag{4.2a}$$

genügen (r ist der Grad der statischen Unbestimmtheit); dann wird aus den mit (jetzt gebundenen) $\delta\mathfrak{H}$ multiplizierten ersten Gleichungen (3.5),

$$\delta\mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{v} + \mathfrak{u}) = 0\,, \tag{4.2b}$$

ein Satz von $r = g - n$ Gleichungen. Da $\mathfrak{u}$ gegeben, $\mathfrak{v}$ vermöge (3.6) und (3.7) durch $\mathfrak{H}$ ausdrückbar ist, hat man damit und mit den n Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e = 0 \tag{4.2c}$$

[1] Natürlich wird die Unterscheidungssilbe „Gleit-" wieder notwendig, wenn, bei technischen Problemen, weitere Arten der Reibung (z. B. Rollreibung) ins Spiel kommen.

$r + n = g$ Gleichungen für die g Kräfte — die Starrkörperverschiebungen sind ohne Rechnung hinausgefallen.

Eine einzelne Verrückung (wenn man sie wissen will), erhält man, indem man die Bindung (4.2a) der virtuellen Kräfte $\delta\mathfrak{H}$ in geeigneter Weise lockert: Wenn man in G^e die νte Spalte wegläßt $[\mathsf{G}^e \to \mathsf{G}^e_*]$, wird aus (4.2)

$$\delta\mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e_* = 0\,, \qquad \delta\mathfrak{H} \cdot (\mathsf{G}^e \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{v} + \mathfrak{u}) = 0\,, \qquad \mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e = 0\,. \tag{4.2*}$$

und die νte Komponente von $\mathfrak{x}$ bleibt stehen.

Die Form $\delta\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{v}$ des ersten Gliedes in (4.2b) ist für das praktische Rechnen nicht bequem. Die Bestimmung der Komponenten von $\mathfrak{v}$ ist, wie die Gleichung (3.6) zeigt, lästig, und außerdem enthalten die Elastizitätsbeziehungen (die man wesentlich braucht) die elastischen Verformungen, und nicht unmittelbar die Komponenten von $\mathfrak{v}$. Die Umformung, die man vorzunehmen hat, läuft darauf hinaus, die äußeren Kräfte und Verformungen durch innere zu ersetzen. Man macht sich das am einfachsten wieder an Hand unseres Beispiels klar. Fassen wir die Komponenten der Spaltenmatrix $\mathfrak{v}$ zusammen zu den beiden Vektoren im physikalischen Sinne

$$\xi_1\,\mathfrak{i} + \eta_1\,\mathfrak{j} = \mathfrak{v}_1\,, \quad \xi_2\,\mathfrak{i} + \eta_2\,\mathfrak{j} = \mathfrak{v}_2\,,$$

so drücken sich die $\mathfrak{v}_i$ durch ε_1, ε_2 und ψ sehr einfach aus. Wenn $\bar{\psi}$ den Drehvektor (Achsenrichtung $+z$, aus der xy-Ebene heraus), $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ die zu den Vektoren $\overline{CA} = \mathfrak{r}_1$, $\overline{CB} = \mathfrak{r}_2$ gehörigen Einheitsvektoren bezeichnen, so gilt

$$\mathfrak{v}_1 = \varepsilon_1\, l_1\, \mathfrak{n}_1\,, \qquad \mathfrak{v}_2 = \varepsilon_2\, l_2\, \mathfrak{n}_2 + \bar{\psi} \times \mathfrak{r}_2 \tag{4.3}$$

und daher, wenn wir auch die δH_γ zu Vektoren $\delta\mathfrak{H}_1$ und $\delta\mathfrak{H}_2$ zusammenfassen

$$\delta\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{v} = \delta\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{v}_1 + \delta\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{v}_2 = (\delta\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{n}_1)\,\varepsilon_1\, l_1 + (\delta\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{n}_2)\,\varepsilon_2\, l_2 + (\mathfrak{r}_2 \times \delta\mathfrak{H}_2) \cdot \bar{\psi}\,.$$

In unseren Stäben sind aber $\delta\mathfrak{H}_i \cdot \mathfrak{n}_i$ die Längskräfte δN_i und $|\,\mathfrak{r}_2 \times \delta\,\mathfrak{H}_2\,|$ ist das in C wirkende Biegemoment δM. Wir finden also

$$\delta\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{v} = \delta N_1\, \varepsilon_1\, l_1 + \delta N_2\, \varepsilon_2\, l_2 + \delta M\, \psi \equiv \delta II; \tag{4.4}$$

rechts steht δII, die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte δN_i, δM an den ihnen zugeordneten elastischen Verformungen.

Im Einzelfall läßt sich natürlich auch $\delta\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{u}$ bequemer schreiben — aber das ist Sache des Einzelfalles.

Mit (4.4) wird aus (4.2) das Gleichungssystem

$$\delta\mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e = 0\,, \qquad \delta II + \delta\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{u} = 0\,, \qquad \mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e = 0\,. \tag{4.5}$$

5. Die Castiglianoschen Gleichungen. Es liegt nahe, das System (4.5) im Sinne der *Lagrange*schen Gleichungen II. Art noch weiter umzuformen derart, daß die beiden äußeren Gleichungen explizit nicht mehr in Erscheinung treten, und die mittlere die Form einer Energieaussage annimmt. Wie in der Kinetik (s. § 2) vollzieht sich die Umformung in zwei Schritten. Wie dort die Verschiebungen $\mathfrak{x}$ und $\delta\mathfrak{x}$ durch die f „kinetisch Überzähligen" q_φ, δq_φ, so drückt man hier zunächst alle Kräfte $\mathfrak{H}$ und $\delta\mathfrak{H}$ aus durch die r statisch Überzähligen U_ϱ und δU_ϱ (Auflösung eines linearen Gleichungssystems), womit die beiden äußeren Gleichungen (4.5) abgegolten sind. Aus der mittleren wird, da die δU_ϱ „frei" sind, ein System von r Gleichungen

$$\frac{\partial II}{\partial U_\varrho} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial U_\varrho} \cdot \mathfrak{u} = 0\,. \tag{5.1}$$

Als zweiter Schritt ist II, das ja vermöge (4.4) zunächst nur als Differential definiert ist, allein durch die Kraftgrößen U_ϱ auszudrücken: $II = II\,(U_1 \ldots U_r)$. Das ist hier viel einfacher als im kinetischen Fall; man braucht ja nur in (4.4) das Elastizitätsgesetz

$$\varepsilon_1 = \beta_1\, N_1\,, \qquad \varepsilon_2 = \beta_2\, N_2\,, \qquad \psi = \gamma\, M \tag{5.2}$$

einzuführen, und kann sofort integrieren:

$$II = \frac{1}{2}\,(\beta_1\, N_1^2\, l_1 + \beta_2\, N_2^2\, l_2 + \gamma\, M^2)\,. \tag{5.3}$$

Beschränkt man sich nun noch auf den sozusagen normalen Fall, daß „eingeprägte Verrückungen" $\mathfrak{u}$ nicht vorhanden sind, so reduziert sich (5.1) auf den Satz von *Castigliano*

$$\frac{\partial II}{\partial U_\varrho} = 0\,: \tag{5.4}$$

die r statisch Unbestimmten U_ϱ ergeben sich aus der Bedingung, daß die Ableitungen der durch die U_ϱ ausgedrückten Formänderungsenergie verschwinden. Oder anders: Unter den r mal unendlich vielen, mit den Gleichgewichtsbedingungen (4.5c) verträglichen, Spannungssystemen stellt sich dasjenige ein, das die Formänderungsenergie zum Minimum macht. Das Gesamtsystem der g Kräfte $\mathfrak{H}$ ergibt sich aus den n Gleichungen (4.5c) und den $r = g - n$ Gleichungen (5.4).

Die *Castiglianos*chen Gleichungen ersparen dem Benutzer, verglichen mit (4.2*), Denkarbeit in mechanicis — genau wie die *Lagrange*schen Gleichungen (2.7′) verglichen mit (1.9*); aber beide nur unter der wesentlichen Einschränkung: wenn sie gelten. Natürlich kann man den *Castigliano*schen Gedanken für nicht-verschwindendes $\mathfrak{u}$, nicht-*Hooke*sches Verhalten des Materials usw. „retten" — aber in solchen Fällen ist es sinnvoller (wie die moderne Statik das allgemein tut) auf (4.2*) oder sogar auf das System

$$\delta\mathfrak{H} \cdot (\mathsf{G}^e \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{v} + \mathfrak{u}) = 0\,, \qquad \mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^e = 0 \tag{5.5}$$

zurückgreifen, wo man über $\delta\mathfrak{H}$ noch frei verfügt; und dasselbe gilt in der Kinetik für das Verhältnis zwischen (2.7′) und dem System

$$(\mathfrak{K} + \mathfrak{R} + \mathfrak{H} \cdot \mathsf{G}^k) \cdot \delta\mathfrak{x} = 0\,, \qquad \mathsf{G}^k \cdot \dot{\mathfrak{x}} = 0\,. \tag{5.6}$$

Die „Prinzip"formulierungen sind allgemeiner und zugleich geschmeidiger als die Energieaussagen, so ehrwürdig diese auch sein mögen.

6. Zusammenfassung. Die Note zeigt die Dualität, die zwischen den Grundgleichungen der Kinetik und den Grundgleichungen der Elastostatik besteht. Ist n die Zahl der möglichen Starrkörperbewegungen, g die Zahl der geometrischen Stützkräfte, so ist in der Kinetik $n > g$, in der Elastostatik $g > n$; die Statik ist der Grenzfall $g = n$ für beide. Das natürliche Hilfsmittel, die Dualität (und überhaupt die verschiedenen Fassungen, die man den Grundgleichungen geben kann) übersichtlich zu formulieren, ist die Matrizenschreibweise. — Zugleich sollte die Note Gelegenheit geben, die Bemerkungen am Ende von § 3 über die drei Kräfteklassen, und den Ausdruck „Haftung" an Stelle von „Haftreibung", zur Diskussion zu stellen.

(Eingegangen am 17. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *K. Marguerre*, Institut für Mechanik, Darmstadt, Technische Hochschule.

Über eine Gruppe von Singularitäten im Membranspannungszustand der Kugelschale

Von G. Mesmer

Wenn an einem Kugelbehälter in einzelnen Punkten Rohre angeschlossen sind, können in der Kugelschale die von den Rohren eingeleiteten Kräfte und Momente durch Membranspannungen aufgenommen werden. In vernünftiger Entfernung vom Einleitungsbereich sind diese Spannungszustände gleichwertig mit den Membranzuständen infolge von Punktsingularitäten. Selbst in unmittelbarer Nähe der Krafteinleitung geben die so ermittelten Membranspannungen einen recht guten Anhalt für die zu übertragenden Befestigungsschnittkräfte.

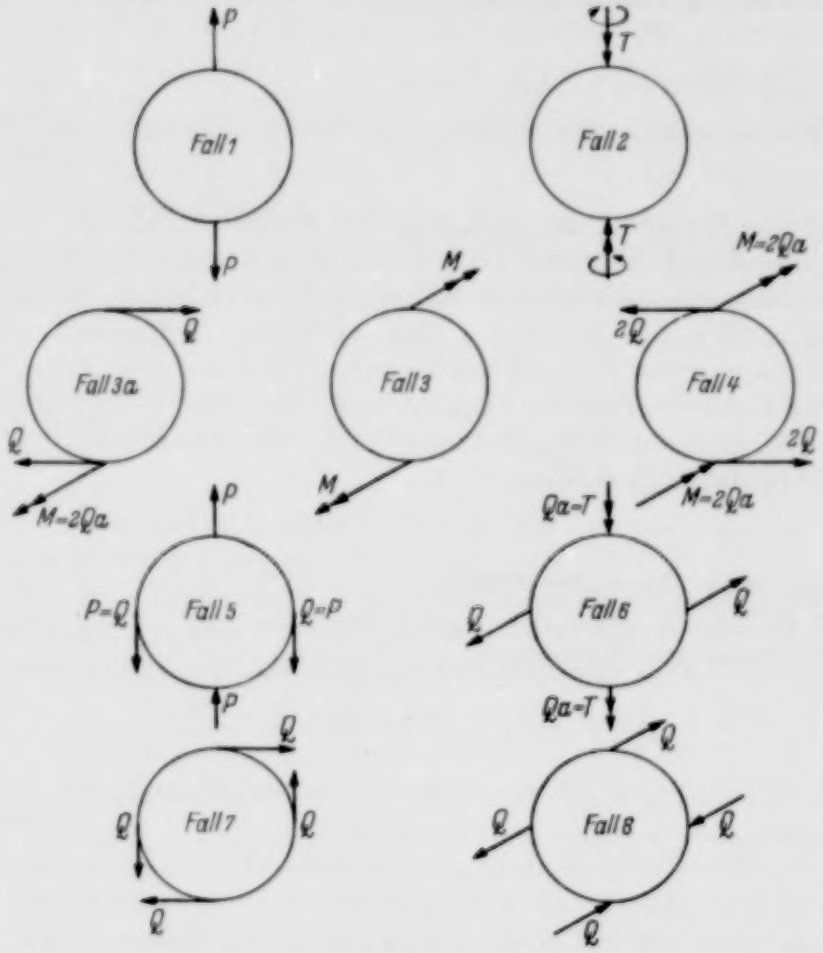


Abb. 1. Symmetrische und antimetrische Grundlastfälle 1 bis 6, unsymmetrischer Grundfall 3a und Kombinationen 7 und 8.

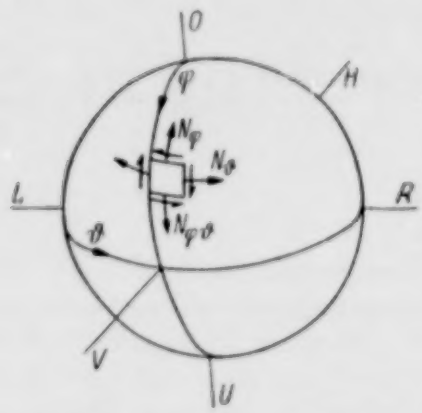


Abb. 2. Bezeichnungen und Koordinaten.

Bei der punktförmigen Belastung einer Kugelschale in den sechs Achsenpunkten eines kartesischen Koordinatensystems, d. h. in den sechs „Polen" oben, unten, rechts, links, hinten und vorn oder kurz O, U, R, L, H und V, können an jedem Pol sechs Lasten angreifen, nämlich drei Kräfte und drei Momente. Die 36 möglichen Lastkombinationen werden durch die sechs Bedingungen des Kugelgleichgewichts auf 30 voneinander unabhängige Fälle vermindert. Da durch Drehung jeder dieser Pole zum Pol O gemacht werden kann und außerdem jeweils die Pole R und L in die Pole H und V gedreht werden können, gibt es nur 6 voneinander unabhängige, symmetrische oder antimetrische Grundfälle, die in Abb. 1 angedeutet sind. Fall 1 und 2 können je dreimal (nämlich in OU, RL und HV), die Fälle 3, 4, 5 und 6 können je sechsmal, nämlich je zweimal (90° Drehung) in OU, RL und HV angebracht werden, dies gibt die möglichen 30 Zustände. Alle weiteren Zustände sind lineare Kombinationen, z. B. ergeben sich Fall 7 aus zwei um 90° gedrehten Fällen 6 und Fall 8 ebenso aus zwei Fällen 5. Die beiden Fälle 3 und 4 lassen sich auch als Kombinationen eines einzigen, unsymmetrischen, sehr einfach darstellbaren Falles 3a beschreiben, der in zwölf verschiedenen Orientierungen angebracht werden kann.

Für die außer in einzelnen Singularitäten unbelastete Membran-Kugelschale lauten die drei Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 2)

$$N_\varphi = -N_\vartheta, \quad \sin\varphi \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + 2\, N_\varphi \cos\varphi = 0, \quad \sin\varphi \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial N_\varphi}{\partial \vartheta} + 2\, N_{\varphi\vartheta} \cos\varphi = 0.$$

Mit der Identität

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

läßt sich bekanntlich[1] ein einfaches Lösungssystem für die Gleichungen wie folgt schreiben

$$N_\varphi=\frac{\cos n\,\vartheta}{\sin^2\varphi}\left[C_1\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^n+C_2\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^n\right]+\frac{\sin n\,\vartheta}{\sin^2\varphi}\left[C_3\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^n+C_4\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^n\right],$$

$$N_{\varphi\vartheta}=\frac{\sin n\,\vartheta}{\sin^2\varphi}\left[-C_1\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^n+C_2\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^n\right]+\frac{\cos n\,\vartheta}{\sin^2\varphi}\left[C_3\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^n-C_4\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)^n\right].$$

Unsere neun Fälle (Abb. 1) lassen sich hieraus aufbauen.

Die einfachsten Fälle $n=0$ und $n=1$ sind wohlbekannt.

A. $n=0$. Verwendung nur von C_1 oder C_2

Fall 1:

$$N_\varphi=\frac{C_1}{\sin^2\varphi}=\frac{P}{2\pi a}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi},\qquad N_{\varphi\vartheta}=0,$$

Verwendung nur von C_3 oder C_4

Fall 2:

$$N_\varphi=0,\qquad N_{\varphi\vartheta}=\frac{C_3}{\sin^2\varphi}=\frac{T}{2\pi a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

In unmittelbarer Nähe der Pole O und U wachsen in beiden Fällen die Spannungen wie $\frac{1}{\sin^2\varphi}$ d. h. wie $1/\varrho^2$ mit $\varrho=a\sin\varphi\to a\,\varphi$ für kleine φ. In Polnähe gilt

Fall 1: (Abb. 3a)

$$N_\varphi\to\frac{P\,a}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varrho^2},$$

Fall 2: (Abb. 3b)

$$N_{\varphi\vartheta}\to\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varrho^2},$$

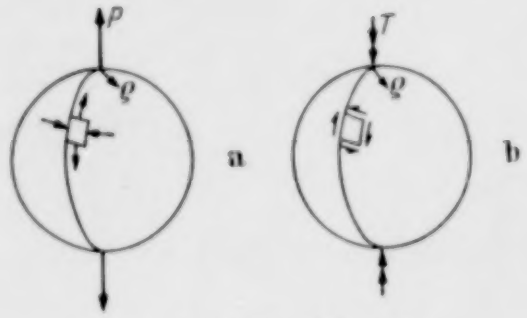


Abb. 3a und b. Grundfälle 1 und 2.

B. $n=1$. Verwendung des C_1-Gliedes

Fall 3a: (Abb. 4a)

$$N_\varphi=C_1\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\vartheta}{\sin^2\varphi}=\frac{Q}{\pi a}\frac{1-\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\cos\vartheta=\frac{Q}{\pi a}\frac{\cos\vartheta}{\sin\varphi(1+\cos\varphi)},$$

$$N_{\varphi\vartheta}=-C_1\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin\vartheta}{\sin^2\varphi}=\frac{-Q}{\pi a}\frac{1-\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\sin\vartheta=\frac{-Q}{\pi a}\frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi(1+\cos\varphi)}.$$

Die beiden Singularitäten an den Polen O und U sind verschieden.

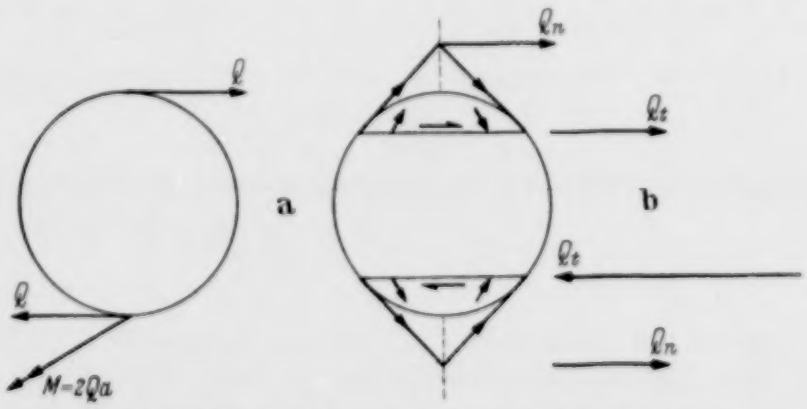


Abb. 4a und b. Grundfall 3a und seine Breitenkreisresultierenden.

[1] *H. Reißner:* Müller-Breslau-Festschrift 1912.

In unmittelbarer Nähe des Poles O erhält man

$$\frac{N_\varphi}{\cos\vartheta} = \frac{-N_{\varphi\vartheta}}{\sin\vartheta} \to \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varrho},$$

am Pol U dagegen

$$\frac{N_\varphi}{\cos\vartheta} = \frac{-N_{\varphi\vartheta}}{\sin\vartheta} \to \frac{2Qa^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho^3} = \frac{Ma}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho^3}.$$

Die Resultierende der N_φ längs eines Breitenkreises ist eine Kraft in der Spitze des Berührungskegels $Q_n = Q\dfrac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$, die entsprechende Resultierende der $N_{\varphi\vartheta}$ ist, in der Breitenkreisebene wirkend, $Q_t = Q\dfrac{1}{1+\cos\varphi}$ (Abb. 4b), also ist

$$Q_t + Q_n = Q, \qquad Q_t - Q_n = Q\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Für kleine φ am Pol O erhält man $Q_t + Q_n = Q$ nach rechts, $Q_t - Q_n \to Q\dfrac{\varphi^2}{4} \to 0$.

Für kleine $\psi = \pi - \varphi$ am Pol U ergibt sich $Q_t + Q_n = Q$ nach links, $Q_t - Q_n \to Q\cdot\dfrac{4}{\psi^2} \to \infty$.

Aus den beiden resultierenden Kräften berechnet man ihr Moment um eine im Pol liegende Tangente am Pol O zu $M = 0$, am Pol U zu $M = Q_t\cdot a\,(1+\cos\varphi) + Q_n\,a\dfrac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi} = 2Qa$.

Die Verwendung des C_2-Gliedes ergibt entsprechende Formeln, Fall 3b, mit vertauschten Polen O und U. Die Summe und die Differenz der Fälle 3a und 3b ergeben die beiden antimetrischen Grundfälle 3 und 4.

Der Summen-Fall 3 (= 3a + 3b) (Abb. 5) lautet

$$N_\varphi = \frac{Q}{\pi a}\,\frac{2}{\sin^3\varphi}\cdot\cos\vartheta = \frac{M}{\pi a^2}\,\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\varphi}, \qquad N_{\varphi\vartheta} = \frac{Q}{\pi a}\,\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\cdot\sin\vartheta = \frac{M}{\pi a^2}\,\frac{\cos\varphi\sin\vartheta}{\sin^3\varphi}.$$

Abb. 5. Fall 3, Summe von 3a und 3b.

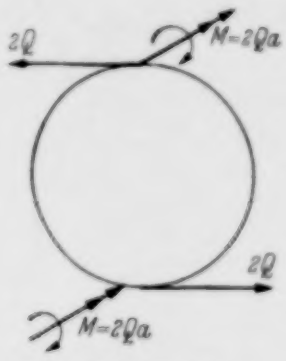


Abb. 6. Fall 4, Differenz von 3a und 3b.

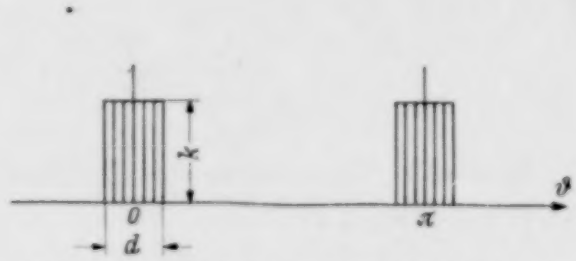


Abb. 7. Einzellasten als Grenzfall periodischverteilter Kräfte.

In unmittelbarer Nähe der beiden Pole erhält man ähnlich wie in U von Fall 3a Singularitäten mit $\dfrac{N_\varphi}{\cos\vartheta} = \dfrac{N_{\varphi\vartheta}}{\sin\vartheta} \to \dfrac{Ma}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\varrho^3}$, dabei sind die Breitenkreisresultierenden Q_n und Q_t ein reines Kräftepaar $M = 2Qa$.

Der Differenz-Fall 4 (= 3b − 3a) (Abb. 6) lautet

$$N_\varphi = \frac{Q}{\pi a}\,\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\cos\vartheta = \frac{M}{\pi a^2}\,\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{\sin^3\varphi}, \qquad N_{\varphi\vartheta} = \frac{Q}{\pi a}\,\frac{2}{\sin^3\varphi}\sin\vartheta = \frac{M}{\pi a^2}\,\frac{\sin\vartheta}{\sin^3\varphi}.$$

Die beiden Singularitäten sind wiederum ähnlich wie in 3a und 3 beschrieben durch

$$\frac{N_\varphi}{\cos\vartheta} = \frac{N_{\varphi\vartheta}}{\sin\vartheta} \to \frac{Ma}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho^3},$$

jedoch sind die Breitenkreisresultierenden Q_n und Q_t durch $Q_n + Q_t = 2Q$ nach links und

$$Q_t - Q_n = \frac{-M}{a}\,\frac{1+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

gegeben.

Die Gruppe der Systeme 1, 2, 3 und 4 (oder 1, 2 und 3a) umfaßt alle Möglichkeiten des Singularitätengleichgewichts OU. In zwei gegenüberliegenden Polen können $2\times 6 = 12$ verschiedene Lastkombinationen auftreten, die sich wegen der 6 Gleichgewichtsbedingungen aus 6 voneinander unabhängigen Fälle bilden lassen. Hier sind Fall 3a in vier, Fälle 3 und 4 in je zwei verschiedenen Orientierungen möglich.

Die verbleibenden Grundfälle 5 und 6 und ihre Kombinationen erfordern tangentiale, singuläre Kräfte vom $1/\varrho$-Typ in den Polen L und R. Diese lassen sich als Reihen von der Form $\Sigma a_n \sin n\vartheta$ oder $\Sigma a_n \cos n\vartheta$ darstellen, wobei n gerade oder ungerade ist. Man geht dabei von periodischen Funktionen der Art von Abb. 7 aus und setzt $d \cdot K = \text{const}$ mit $d \to 0$.[1]

C. $n = 2$ und höher. Für $n \geqq 2$ gibt kein Ausdruck der Form $f(\varphi)\cos n\vartheta$ irgend eine Resultierende in einem Breitenkreis, d. h. eine singuläre Last im Pol O oder U. Die höheren Glieder $n = 2, 4, 6$ usw. oder 3, 5 usw. können also ohne Störung des Gleichgewichts zum Aufbau der äquatorialen Singularitäten verwendet werden. Wir benutzen die folgenden, für $|A| < 1$ konvergenten Summenformeln

$$\sum_{n=0,2,4\ldots}^{\infty} A^n = \frac{1}{1-A^2}, \qquad \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} A^n = \frac{A}{1-A^2}.$$

Hier setzt man $A = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot e^{i\vartheta}$, dann sind die Summenformeln konvergent für $|\varphi| < 90°$ und man erhält

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\sum_{0,2,4}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^n e^{in\vartheta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{\cos\varphi + i\sin^2\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi\cos^2\vartheta)}\right],$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\sum_{1,3,5}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^n e^{in\vartheta} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\varphi\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{\sin\varphi(1-\sin^2\varphi\cos^2\vartheta)}.$$

Die Singularitäten liegen an den Polen O, U, L und R. Das erste Glied der ersten Reihe entspricht dem Fall 1, von den übrigen Ausdrücken sind die folgenden vier möglichen Kombinationen von Interesse:

5) $$N_\varphi = \frac{C_5\cos\varphi}{\Delta\cdot\sin^2\varphi}, \qquad N_{\varphi\vartheta} = \frac{-C_5\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Delta},$$

6) $$N_\varphi = \frac{C_6\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Delta}, \qquad N_{\varphi\vartheta} = \frac{C_6\cos\varphi}{\Delta\sin^2\varphi},$$

7) $$N_\varphi = \frac{C_7\cos\varphi\cos\vartheta}{\Delta\sin\varphi}, \qquad N_{\varphi\vartheta} = \frac{-C_7\sin\vartheta}{\Delta\sin\varphi},$$

8) $$N_\varphi = \frac{C_8\sin\vartheta}{\Delta\sin\varphi}, \qquad N_{\varphi\vartheta} = \frac{C_8\cos\varphi\cos\vartheta}{\Delta\sin\varphi},$$

mit

$$\Delta = 1 - \sin^2\varphi\cos^2\vartheta.$$

In 5 und 6 entsprechen die Resultierenden an den Polen O und U den Fällen 1 und 2; in 7 und 8 erhält man in O und U tangentiale Einzellasten. Wir wählen

$$C_5 = \frac{P}{2\pi a}, \qquad C_6 = \frac{T}{2\pi a^2}, \qquad C_7 = C_8 = \frac{Q}{2\pi a}$$

und analysieren die zugehörigen Singularitäten in den Polen L und R. Es zeigt sich dabei, daß schließlich die Fälle 7 und 8 aus 5 und 6 kombiniert werden können. Hier seien nur die Verhältnisse in der Nähe von L in den Fällen 5 und 6 diskutiert.

Fall 5: In der Umgebung von L gilt (Abb. 8)

$$\cos\varphi \approx \frac{y}{a}\sin\varphi \approx 1 - \frac{y^2}{2a^2}, \qquad \Delta \approx \frac{\varrho^2}{a^2},$$

$$\sin\vartheta = \frac{x}{a}\cos\vartheta \approx 1 - \frac{x^2}{2a^2},$$

$$\left.\begin{aligned} N_x = -N_y = -N_\varphi &\approx \frac{-Py}{2\pi\varrho^2} = \frac{-P\sin\beta}{2\pi\varrho}, \\ N_{xy} = -N_{\varphi\vartheta} &\approx \frac{P\cos\beta}{2\pi\varrho}, \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \begin{aligned} N_\varrho &\approx \frac{P\sin\beta}{2\pi\varrho}, \\ N_{\varrho\beta} &\approx \frac{P\cos\beta}{2\pi\varrho}. \end{aligned}$$

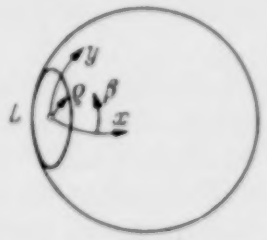


Abb. 8. Koordinaten in der Umgebung des Poles L.

Die Singularität in L ist also eine abwärts gerichtete Tangentialkraft, der Pol R ist ebenso belastet.

Fall 6: In der Umgebung von L gilt

$$\left.\begin{aligned} N_x = -N_y = -N_\varphi &\approx \frac{T}{2\pi a}\,\frac{\cos\beta}{\varrho}, \\ N_{xy} = -N_{\varphi\vartheta} &\approx \frac{T}{2\pi a}\,\frac{\sin\beta}{\varrho}, \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \begin{aligned} N_\varrho &\approx \frac{-T}{2\pi a}\,\frac{\cos\beta}{\varrho} = \frac{-Q\cos\beta}{2\pi\varrho}, \\ N_{\varrho\beta} &\approx \frac{T}{2\pi a}\,\frac{\sin\beta}{\varrho} = \frac{Q\sin\beta}{2\pi\varrho}. \end{aligned}$$

In L ist also eine in Richtung $\beta = 0$ tangential angreifende Einzelkraft wirksam.

[1] *F. Dischinger:* Bauingenieur, 19 (1935) S. 396.

Zu beiden Fällen sei noch bemerkt, daß in O und U auch ein Zug-Druck-Zustand herrscht, der beim Entfernen der Singularität übrig bleibt. So ist z. B. in der Umgebung von O im Fall 5

$$N_{\varphi\vartheta} \to \frac{Q}{4\pi a} \sin 2\vartheta \,.$$

Dieser Schubzustand ist auch in dem aus Fall 1 und 5 kombinierten Zustand der Abb. 9 im Pol O wirksam.

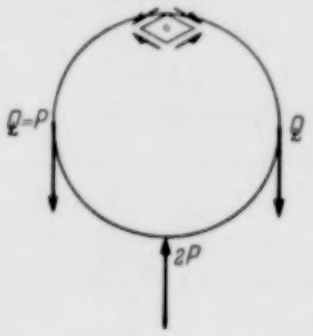


Abb. 9. Kombinationsfall 5—1 mit resultierendem Schubzustand im Pol O.

Die zuletzt beschriebenen Fälle 5, 6, 7 und 8 können als konjungiert harmonische Fälle aufgefaßt werden, wenn man setzt

$$N_\varphi \sin^2\varphi = s(\varphi, \vartheta) \,, \quad N_{\varphi\vartheta} \sin^2\varphi = t(\varphi, \vartheta)$$

und einführt

$$x = \vartheta \,, \qquad y = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),$$

oder:

$$\sin\varphi = \frac{2e^y}{1+e^{2y}} \,, \qquad \cos\varphi = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}} \,.$$

Da $s(x, y)$ und $t(x, y)$ konjungierte harmonische Funktionen sind, erhält man die Fälle 6 und 8 aus 5 und 7, wenn man s in $-t$ und t in $+s$ umwandelt. Unter Verwendung harmonischer Funktionen kann man diese Lösungen mit einem anderen Ansatz natürlich auch direkt erhalten. *F. Martin*[1] hat dies für einige ähnliche Fälle durchgeführt. Abb. 10 stellt graphisch die Spannungszustände der Grundfälle dieses Artikels dar. Die Skizzen enthalten die Spannungstrajektorien auf der Kugeloberfläche unter der Wirkung der behandelten singulären Lasten.

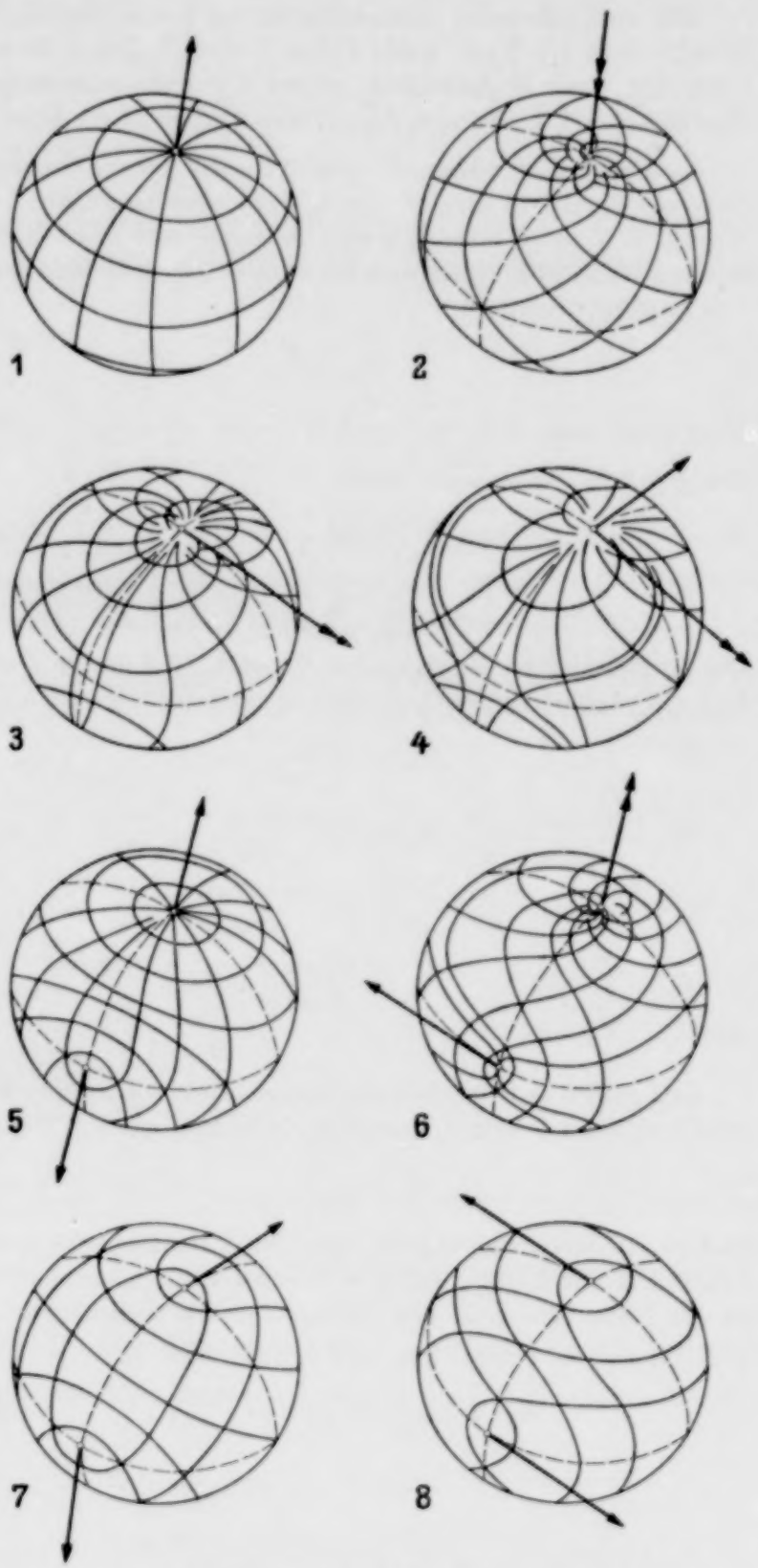


Abb. 10. Spannungstrajektorien der Lastfälle 1 bis 8.

(Eingegangen am 11. Dezember 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Gustav Mesmer*, Department of Applied Mechanics, Washington University, St. Louis, USA.

[1] Ingenieur-Archiv, 17 (1949) S. 167.

Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme

Von **E. Mettler**

1. Einleitung. Es sei ein mechanisches System mit n — also endlich vielen — Freiheitsgraden vorgelegt. Seine Bewegung werde beschrieben durch die n generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$. T sei die kinetische Energie, U die potentielle Energie,

$$L = L(q_k, \dot{q}_k) = T - U$$

also die *Lagrange*sche Funktion, die von den Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ und ihren zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ abhängt. Die Zeit t selbst soll in L nicht explizit auftreten. Von dämpfenden Kräften wird abgesehen, obwohl die Dämpfung natürlich in Wirklichkeit stets eine gewisse Rolle spielen muß; wir betrachten das System vereinfachend als konservativ. Das System besitze eine *stabile* Gleichgewichtslage. Diese kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit durch $q_1 = \ldots = q_n = 0$ gekennzeichnet werden. Entwickelt man dann L nach Potenzen von $q_k, \dot{q}_k$, so fängt die Entwicklung bekanntlich mit quadratischen Gliedern an. Die quadratischen Teile von T und U seien von vornherein durch eine Hauptachsentransformation auf die Normalform gebracht, d. h. die q_k seien von vornherein Normalkoordinaten. Dann haben die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

allgemein die Form

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k + f_k(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Die Konstanten ω_k sind bekanntlich die Eigenfrequenzen, die Funktionen f_k enthalten nur quadratische und höhere Glieder der Variabeln $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$.

In der Theorie der kleinen Schwingungen vernachlässigt man die f_k, beschränkt sich also auf die Gleichungen

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0$$

mit den Lösungen

$$q_k = Q_k \cos(\omega_k t + \vartheta_k), \tag{2}$$

worin Q_k und ϑ_k Konstante sind, und kann damit einige sehr allgemeine Aussagen über die Bewegung um eine stabile Gleichgewichtslage machen. Das alles ist klassischer Bestand der analytischen Mechanik. Beispielsweise formuliert *Whittaker*[1]: „Die den einzelnen Normalkoordinaten entsprechenden harmonischen Schwingungen vollziehen sich völlig unabhängig voneinander. Demnach kann jede erdenkliche Schwingung des Systems als das Resultat der Überlagerung von n unabhängigen Normalschwingungen betrachtet werden. Dies ist der von *Daniel Bernoulli* ausgesprochene Satz von der Überlagerung der Schwingungen."

Wir fragen nun, welchen Einfluß die zunächst vernachlässigten nichtlinearen Glieder f_k von (1) haben und ob sie die linear berechneten Normalschwingungen (2) wesentlich abändern. Mit dieser Frage, einer Grundfrage der „nichtlinearen Mechanik", haben sich angesichts des weiten Anwendungsbereiches der Theorie der kleinen Schwingungen schon viele Mathematiker beschäftigt. Die Untersuchungen haben hier — in ganz groben Umrissen — folgende Ergebnisse gebracht.

Vorweg ist zu sagen, daß die Unabhängigkeit der einzelnen Koordinaten q_k im allgemeinen aufzugeben ist. Das nichtlineare System (1) läßt ja im allgemeinen keine Lösung $q_i \not\equiv 0$ für ein bestimmtes i, $q_k \equiv 0$ für alle k ungleich i zu, vielmehr müssen wegen der Kopplung, die in den Funktionen f_k liegt, alle Koordinaten an der Bewegung beteiligt sein. Dagegen hat man festgestellt, daß das System (1) unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen periodische Lösungen $q_k = q_k(t)$ besitzt, die gegen die einzelnen Normalschwingungen $q_i = Q_i \cos(\omega_i t + \vartheta_i)$, $q_k \equiv 0$ für $k \neq i$ streben, wenn die Amplituden gegen Null gehen. Oder anders ausgedrückt: Für hinreichend kleine Amplitudenwerte ist eine einzelne Normalschwingung im allgemeinen eine gute Näherung für eine bestimmte periodische wahre Bewegung. Wegen genauerer Angaben sei auf eine Arbeit von *Horn*[2]

[1] *E. T. Whittaker*, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, deutsch von *F.* u. *K. Mittelsten-Scheid*, Berlin 1924, S. 197.

[2] *J. Horn*, Zs. für Math. u. Phys. 48 (1903) S. 400. Dort weitere Literaturangaben.

verwiesen, der selbst auf *Poincaré*, *Picard* und *Painlevé* fußt. Die wesentliche Einschränkung, die *Horn* bei seinen Beweisführungen machen muß, ist das Verbot jeder Beziehung

$$\omega_i/\omega_k = \text{ganze Zahl.}^1 \tag{3}$$

Weitere Untersuchungen in der Literatur behandeln entsprechende nichtperiodische Lösungen von (1), die mit abnehmenden Amplituden gegen eine beliebige Kombination der n linearen Normalschwingungen (2) streben. Die nichtperiodischen Lösungen werden als mehrfach periodische Funktionen gefunden, d. h. als periodische Funktionen (mehrfache *Fourier*-Reihen) von n Hilfsvariabeln $w_i = \nu_i\, t$ mit Konstanten ν_i. Dazu wird die Störungsrechnung benutzt, und zwar führt *Horn*[2] eine direkte Potenzreihenentwicklung der Lösungen durch, während *Born*[3], der den etwas spezielleren Fall eines Systems gekoppelter Oszillatoren behandelt, mittels der *Hamilton-Jacobi*schen Theorie schrittweise eine Folge von Berührungstransformationen verwendet. Beide Autoren müssen angesichts der bekannten Schwierigkeit der „kleinen Divisoren" Beziehungen

$$g_1\,\omega_1 + g_2\,\omega_2 + \cdots + g_n\,\omega_n = 0 \qquad (g_i \text{ ganz}) \tag{4}$$

ausschließen. Auf jeden Fall zeigt es sich auch hier, daß die Normalschwingungen (2) der linearen Theorie für kleine Ausschläge im allgemeinen gute Näherungen der wahren Bewegung darstellen. Auf Einzelheiten hinsichtlich Beweisführung, einschränkenden Voraussetzungen, Konvergenzfragen und Näherungsverfahren soll nicht eingegangen werden, da alles Bisherige nur die eigentliche Fragestellung vorbereiten soll, die jetzt angegeben wird.

2. Aufgabenstellung. Wir behandeln von nun an einen Sonderfall des eingangs besprochenen mechanischen Systems. Dieses soll jetzt so beschaffen sein, daß die *Lagrange*schen Gleichungen (1) eine spezielle Lösung — gekennzeichnet durch den oberen Index 0 —

$$\overset{0}{q}_1 = \cdots = \overset{0}{q}_m = 0\,, \qquad \overset{0}{q}_{m+1}(t) \neq 0, \ldots, \qquad \overset{0}{q}_n(t) \neq 0 \tag{5}$$

streng zulassen. Es soll also in Strenge möglich sein, daß m von den n Koordinaten q_k den Wert Null behalten, den sie in der Gleichgewichtslage haben, und die Bewegung durch die $n - m$ restlichen Koordinaten allein beschrieben wird. Dieser Fall kann offenbar dann eintreten, wenn in den m ersten Gleichungen (1) die Funktionen f_k, die ja von allen Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ und ihren Ableitungen abhängen, identisch verschwinden, sobald man die m ersten Koordinaten und ihre Ableitungen Null setzt:

$$f_k = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i = 0 & (i, k = 1, \ldots, m)\,, \\ q_l, \dot{q}_l, \ddot{q}_l \neq 0 & (l = m+1, \ldots, n)\,. \end{cases} \tag{6}$$

Beispiele für solche Systeme sind leicht anzugeben; einige werden später diskutiert.

Die Lösung (5) beschreibt eine Teilbewegung des Systems, die wir als Grundbewegung bezeichnen. Sie in der Nähe der Gleichgewichtslage genähert zu berechnen und durch einfach oder mehrfach periodische Funktionen darzustellen, kann nach den Erörterungen des vorhergehenden Abschnitts im allgemeinen keine Schwierigkeit machen; schon die linearen Normalschwingungen sind ja in gewissem Grade Näherungen. Aber das System hat noch weitere Bewegungsmöglichkeiten, bei denen auch die m ersten Koordinaten $q_1, \ldots, q_m$ mitspielen, und dabei stellt sich offenbar die Stabilitätsfrage: Kann die Grundbewegung (5) für alle Zeit t praktisch erhalten bleiben? Wenn die Koordinaten $q_1, \ldots, q_m$ als unvermeidliche Störungen kleine Anfangswerte $\neq 0$ bekommen, bleiben sie dann für alle Zeit klein (Stabilität) oder schaukeln sie sich auf und ändern das Gesamtbild der Bewegung (Instabilität)? Oder anders ausgedrückt: Ist die Unabhängigkeit der Variabelngruppe $q_{m+1}, \ldots, q_n$ von den $q_1, \ldots, q_m$, die nach der linearen Theorie der kleinen Schwingungen ja stets gelten soll, durch (6) auch im nichtlinearen Bereich gesichert oder kann durch Instabilität doch eine Kopplung eintreten? Mathematisch schärfer formuliert ist die Grundbewegung (5) demnach als stabil zu bezeichnen, wenn man die Beträge $|q_k|$, $|\dot{q}_k|$ $(k = 1, \ldots, m)$ dadurch für alle Zeit beliebig klein halten kann, daß man die Beträge der Anfangswerte klein genug macht; im anderen Fall sprechen wir von Instabilität.

Es handelt sich also um das Problem der Stabilität freier Schwingungen spezieller mechanischer Systeme. Zur Abgrenzung dieser Fragestellung gegenüber weitergehenden Betrachtungen ist dazu

[1] Diese Einschränkung konnte kürzlich *C. Schmieden*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 292, bei der Behandlung periodischer Schwingungen eines speziellen nichtlinearen Systems fallen lassen. Doch hat diese Arbeit keine Beziehungen zu unseren folgenden Untersuchungen.

[2] *J. Horn*, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 126 (1903) S. 194.

[3] *M. Born*, Vorlesungen über Atommechanik Bd. 1 Berlin 1925, S. 295.

eine allgemeine Bemerkung zu machen. Mit der eben gegebenen, auf unser besonderes Problem bezogenen Stabilitätsdefinition folgen wir der meist gebräuchlichen Festsetzung, rein mathematisch das asymptotische Verhalten der Koordinatendifferenzen zwischen Grundbewegung und Nachbarbewegung als Kriterium für das Stabilitätsverhalten des Systems anzusehen.[1] Dieses Kriterium kann man formal auf jede beliebige Bewegung anwenden, und so läßt sich prinzipiell bei allen freien Schwingungen mechanischer Systeme die Stabilitätsfrage stellen, ohne daß man erst die Einschränkung (6) mit der Möglichkeit einer Lösung (5) voraussetzt. Im einfachsten Fall kann man dies schon bei einem System mit einem Freiheitsgrad tun, etwa dem mathematischen Pendel mit endlichen Ausschlägen, ein Beispiel, auf das *Hahn*[2] und *Stoker*[3] hingewiesen haben. Jede Schwingung dieses Pendels ist instabil, da eine benachbarte Schwingung, die durch eine kleine Störung eine etwas andere Amplitude bekommen hat, wegen der Amplitudenabhängigkeit der Schwingungsdauer eine etwas andere Frequenz besitzt. Deshalb bekommt die gestörte Schwingung im Laufe der Zeit eine endliche Phasenverschiebung gegenüber der Ausgangsschwingung. Ähnlich dürften die Dinge auch bei den einfach oder mehrfach periodischen Bewegungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden um eine stabile Gleichgewichtslage liegen. Da auch hier die einzelnen Frequenzen ν_i im allgemeinen nicht als Konstante, sondern abhängig von den Anfangsbedingungen zu erwarten sind[4], werden zwischen zwei zunächst beliebig nahe benachbarten Bewegungen im Laufe der Zeit endliche Abweichungen entstehen. Man kann also wahrscheinlich mit ziemlicher Allgemeinheit den Satz aussprechen, daß freie Schwingungen mechanischer Systeme um stabile Gleichgewichtslagen instabil im oben genannten Sinne sind. Stabilität ist ein verhältnismäßig seltener Sonderfall, der hauptsächlich auf lineare Systeme zutrifft, bei denen ja die Frequenzen Systemkonstante sind.

Es mag dahingestellt bleiben, ob dieser Feststellung ein wesentlicher mechanischer Sinn beizumessen ist. Mindestens erscheint eine solche pauschale Konstatierung der Instabilität recht farblos und könnte dazu anregen, die Zweckmäßigkeit des zugrunde gelegten Stabilitätsbegriffs zu überprüfen. Wir wollen jedoch in eine solche Diskussion, wie sie etwa von *Klein* und *Sommerfeld*[5] durchgeführt und von *Stoker*[6] neuerdings wieder aufgegriffen wurde, nicht eintreten. Es ist nicht Aufgabe der vorliegenden Arbeit, sich mit so allgemeinen Fragen wie einem Vergleich aller freier Schwingungen eines Systems zu befassen. Wir gewinnen vielmehr durch Einengung der Problemstellung von der mechanischen Seite her eine Aufgabe, bei der die Stabilitätsfrage unbestritten sinnvoll ist: Bei einer Grundbewegung (5), die im Gegensatz zum allgemeinen Fall klar ausgezeichnet von den benachbarten Bewegungen ist, wird die Alternative der Beständigkeit oder des Umschlagens in eine andere Bewegungsform geprüft.

Zur rechnerischen Beantwortung der Stabilitätsfrage machen wir den üblichen Ansatz

$$q_k = \mathring{q}_k + \bar{q}_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

mit kleinen $\bar{q}_k$, der mit (5) speziell in

$$\left.\begin{aligned} q_k &= \bar{q}_k && \text{für} && k = 1, \ldots, m, \\ q_l &= \mathring{q}_l + \bar{q}_l && \text{für} && l = m+1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

übergeht. Nach Einsetzen von (7) in (1) wird dann in den überstrichenen Variabeln linearisiert. Dadurch entstehen unter Berücksichtigung von (6) die Gleichungen

$$\ddot{\bar{q}}_k + \omega_k^2 \bar{q}_k + \sum_{r=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_r} \right)_0 \bar{q}_r + \left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_r} \right)_0 \dot{\bar{q}}_r + \left(\frac{\partial f_k}{\partial \ddot{q}_r} \right)_0 \ddot{\bar{q}}_r \right] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

für die ersten m Variabeln allein. Der Index 0 an den partiellen Ableitungen soll besagen, daß die Lösung (5) einzusetzen ist. Darüber hinaus ergeben sich weitere Gleichungen für die $n - m$ übrigen Koordinaten $\bar{q}_l$ des Ansatzes (7). Diese können wir jedoch außer Betracht lassen, da ja nach den vorhergehenden Ausführungen nur das Verhalten der m ersten, in (5) verschwindenden Koordinaten interessiert, wofür (8) genügt. In (8) liegt ein System von m linearen Differentialgleichungen für die $\bar{q}_k$ mit zeitabhängigen Koeffizienten (nämlich den partiellen Ableitungen der f_k) vor. Aus seiner Lösung ist die Stabilität oder Instabilität der Grundbewegung (5) abzulesen. Die Problematik dieser Stabilitätsbeurteilung „nach der ersten Näherung" aus den linearisierten Gleichungen ist

[1] Vgl. den Bericht über die *Ljapunov*sche Stabilitätstheorie von *W. Hahn*, MTW-Mitteilungen 4 (1957), S. 119.

[2] Vgl. Fußnote 1.

[3] *J. J. Stoker*, Commun. on pure and appl. Math. 8 (1955) S. 133.

[4] Einzelheiten darüber kann man den zitierten Arbeiten von *Horn* entnehmen.

[5] *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, S. 342.

[6] *J. J. Stoker*, Fußnote 3.

verwiesen, der selbst auf *Poincaré*, *Picard* und *Painlevé* fußt. Die wesentliche Einschränkung, die *Horn* bei seinen Beweisführungen machen muß, ist das Verbot jeder Beziehung

$$\omega_i/\omega_k = \text{ganze Zahl.}^1 \tag{3}$$

Weitere Untersuchungen in der Literatur behandeln entsprechende nichtperiodische Lösungen von (1), die mit abnehmenden Amplituden gegen eine beliebige Kombination der n linearen Normalschwingungen (2) streben. Die nichtperiodischen Lösungen werden als mehrfach periodische Funktionen gefunden, d. h. als periodische Funktionen (mehrfache *Fourier*-Reihen) von n Hilfsvariabeln $w_i = \nu_i t$ mit Konstanten ν_i. Dazu wird die Störungsrechnung benutzt, und zwar führt *Horn*[2] eine direkte Potenzreihenentwicklung der Lösungen durch, während *Born*[3], der den etwas spezielleren Fall eines Systems gekoppelter Oszillatoren behandelt, mittels der *Hamilton-Jacobi*schen Theorie schrittweise eine Folge von Berührungstransformationen verwendet. Beide Autoren müssen angesichts der bekannten Schwierigkeit der „kleinen Divisoren" Beziehungen

$$g_1\omega_1 + g_2\omega_2 + \cdots + g_n\omega_n = 0 \qquad (g_i \text{ ganz}) \tag{4}$$

ausschließen. Auf jeden Fall zeigt es sich auch hier, daß die Normalschwingungen (2) der linearen Theorie für kleine Ausschläge im allgemeinen gute Näherungen der wahren Bewegung darstellen. Auf Einzelheiten hinsichtlich Beweisführung, einschränkenden Voraussetzungen, Konvergenzfragen und Näherungsverfahren soll nicht eingegangen werden, da alles Bisherige nur die eigentliche Fragestellung vorbereiten soll, die jetzt angegeben wird.

2. Aufgabenstellung. Wir behandeln von nun an einen Sonderfall des eingangs besprochenen mechanischen Systems. Dieses soll jetzt so beschaffen sein, daß die *Lagrange*schen Gleichungen (1) eine spezielle Lösung — gekennzeichnet durch den oberen Index 0 —

$$\overset{0}{q}_1 = \cdots = \overset{0}{q}_m = 0\,, \qquad \overset{0}{q}_{m+1}(t) \neq 0, \ldots, \qquad \overset{0}{q}_n(t) \neq 0 \tag{5}$$

streng zulassen. Es soll also in Strenge möglich sein, daß m von den n Koordinaten q_k den Wert Null behalten, den sie in der Gleichgewichtslage haben, und die Bewegung durch die $n - m$ restlichen Koordinaten allein beschrieben wird. Dieser Fall kann offenbar dann eintreten, wenn in den m ersten Gleichungen (1) die Funktionen f_k, die ja von allen Koordinaten $q_1, \ldots, q_n$ und ihren Ableitungen abhängen, identisch verschwinden, sobald man die m ersten Koordinaten und ihre Ableitungen Null setzt:

$$f_k = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i = 0 & (i, k = 1, \ldots, m)\,, \\ q_l, \dot{q}_l, \ddot{q}_l \neq 0 & (l = m+1, \ldots, n)\,. \end{cases} \tag{6}$$

Beispiele für solche Systeme sind leicht anzugeben; einige werden später diskutiert.

Die Lösung (5) beschreibt eine Teilbewegung des Systems, die wir als Grundbewegung bezeichnen. Sie in der Nähe der Gleichgewichtslage genähert zu berechnen und durch einfach oder mehrfach periodische Funktionen darzustellen, kann nach den Erörterungen des vorhergehenden Abschnitts im allgemeinen keine Schwierigkeit machen; schon die linearen Normalschwingungen sind ja in gewissem Grade Näherungen. Aber das System hat noch weitere Bewegungsmöglichkeiten, bei denen auch die m ersten Koordinaten $q_1, \ldots, q_m$ mitspielen, und dabei stellt sich offenbar die Stabilitätsfrage: Kann die Grundbewegung (5) für alle Zeit t praktisch erhalten bleiben? Wenn die Koordinaten $q_1, \ldots, q_m$ als unvermeidliche Störungen kleine Anfangswerte $\neq 0$ bekommen, bleiben sie dann für alle Zeit klein (Stabilität) oder schaukeln sie sich auf und ändern das Gesamtbild der Bewegung (Instabilität)? Oder anders ausgedrückt: Ist die Unabhängigkeit der Variabelngruppe $q_{m+1}, \ldots, q_n$ von den $q_1, \ldots, q_m$, die nach der linearen Theorie der kleinen Schwingungen ja stets gelten soll, durch (6) auch im nichtlinearen Bereich gesichert oder kann durch Instabilität doch eine Kopplung eintreten? Mathematisch schärfer formuliert ist die Grundbewegung (5) demnach als stabil zu bezeichnen, wenn man die Beträge $|q_k|$, $|\dot{q}_k|$ $(k = 1, \ldots, m)$ dadurch für alle Zeit beliebig klein halten kann, daß man die Beträge der Anfangswerte klein genug macht; im anderen Fall sprechen wir von Instabilität.

Es handelt sich also um das Problem der Stabilität freier Schwingungen spezieller mechanischer Systeme. Zur Abgrenzung dieser Fragestellung gegenüber weitergehenden Betrachtungen ist dazu

[1] Diese Einschränkung konnte kürzlich *C. Schmieden*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 292, bei der Behandlung periodischer Schwingungen eines speziellen nichtlinearen Systems fallen lassen. Doch hat diese Arbeit keine Beziehungen zu unseren folgenden Untersuchungen.

[2] *J. Horn*, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 126 (1903) S. 194.

[3] *M. Born*, Vorlesungen über Atommechanik Bd. 1 Berlin 1925, S. 295.

eine allgemeine Bemerkung zu machen. Mit der eben gegebenen, auf unser besonderes Problem bezogenen Stabilitätsdefinition folgen wir der meist gebräuchlichen Festsetzung, rein mathematisch das asymptotische Verhalten der Koordinatendifferenzen zwischen Grundbewegung und Nachbarbewegung als Kriterium für das Stabilitätsverhalten des Systems anzusehen.[1] Dieses Kriterium kann man formal auf jede beliebige Bewegung anwenden, und so läßt sich prinzipiell bei allen freien Schwingungen mechanischer Systeme die Stabilitätsfrage stellen, ohne daß man erst die Einschränkung (6) mit der Möglichkeit einer Lösung (5) voraussetzt. Im einfachsten Fall kann man dies schon bei einem System mit einem Freiheitsgrad tun, etwa dem mathematischen Pendel mit endlichen Ausschlägen, ein Beispiel, auf das *Hahn*[2] und *Stoker*[3] hingewiesen haben. Jede Schwingung dieses Pendels ist instabil, da eine benachbarte Schwingung, die durch eine kleine Störung eine etwas andere Amplitude bekommen hat, wegen der Amplitudenabhängigkeit der Schwingungsdauer eine etwas andere Frequenz besitzt. Deshalb bekommt die gestörte Schwingung im Laufe der Zeit eine endliche Phasenverschiebung gegenüber der Ausgangsschwingung. Ähnlich dürften die Dinge auch bei den einfach oder mehrfach periodischen Bewegungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden um eine stabile Gleichgewichtslage liegen. Da auch hier die einzelnen Frequenzen ν_i im allgemeinen nicht als Konstante, sondern abhängig von den Anfangsbedingungen zu erwarten sind[4], werden zwischen zwei zunächst beliebig nahe benachbarten Bewegungen im Laufe der Zeit endliche Abweichungen entstehen. Man kann also wahrscheinlich mit ziemlicher Allgemeinheit den Satz aussprechen, daß freie Schwingungen mechanischer Systeme um stabile Gleichgewichtslagen instabil im oben genannten Sinne sind. Stabilität ist ein verhältnismäßig seltener Sonderfall, der hauptsächlich auf lineare Systeme zutrifft, bei denen ja die Frequenzen Systemkonstante sind.

Es mag dahingestellt bleiben, ob dieser Feststellung ein wesentlicher mechanischer Sinn beizumessen ist. Mindestens erscheint eine solche pauschale Konstatierung der Instabilität recht farblos und könnte dazu anregen, die Zweckmäßigkeit des zugrunde gelegten Stabilitätsbegriffs zu überprüfen. Wir wollen jedoch in eine solche Diskussion, wie sie etwa von *Klein* und *Sommerfeld*[5] durchgeführt und von *Stoker*[6] neuerdings wieder aufgegriffen wurde, nicht eintreten. Es ist nicht Aufgabe der vorliegenden Arbeit, sich mit so allgemeinen Fragen wie einem Vergleich aller freier Schwingungen eines Systems zu befassen. Wir gewinnen vielmehr durch Einengung der Problemstellung von der mechanischen Seite her eine Aufgabe, bei der die Stabilitätsfrage unbestritten sinnvoll ist: Bei einer Grundbewegung (5), die im Gegensatz zum allgemeinen Fall klar ausgezeichnet von den benachbarten Bewegungen ist, wird die Alternative der Beständigkeit oder des Umschlagens in eine andere Bewegungsform geprüft.

Zur rechnerischen Beantwortung der Stabilitätsfrage machen wir den üblichen Ansatz

$$q_k = \overset{\circ}{q}_k + \bar{q}_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

mit kleinen $\bar{q}_k$, der mit (5) speziell in

$$\left.\begin{aligned} q_k &= \bar{q}_k && \text{für} && k = 1, \ldots, m, \\ q_l &= \overset{\circ}{q}_l + \bar{q}_l && \text{für} && l = m+1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

übergeht. Nach Einsetzen von (7) in (1) wird dann in den überstrichenen Variabeln linearisiert. Dadurch entstehen unter Berücksichtigung von (6) die Gleichungen

$$\ddot{\bar{q}}_k + \omega_k^2 \bar{q}_k + \sum_{r=1}^{m} \left[\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_r} \right)_0 \bar{q}_r + \left(\frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_r} \right)_0 \dot{\bar{q}}_r + \left(\frac{\partial f_k}{\partial \ddot{q}_r} \right)_0 \ddot{\bar{q}}_r \right] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

für die ersten m Variabeln allein. Der Index 0 an den partiellen Ableitungen soll besagen, daß die Lösung (5) einzusetzen ist. Darüber hinaus ergeben sich weitere Gleichungen für die $n - m$ übrigen Koordinaten $\bar{q}_l$ des Ansatzes (7). Diese können wir jedoch außer Betracht lassen, da ja nach den vorhergehenden Ausführungen nur das Verhalten der m ersten, in (5) verschwindenden Koordinaten interessiert, wofür (8) genügt. In (8) liegt ein System von m linearen Differentialgleichungen für die $\bar{q}_k$ mit zeitabhängigen Koeffizienten (nämlich den partiellen Ableitungen der f_k) vor. Aus seiner Lösung ist die Stabilität oder Instabilität der Grundbewegung (5) abzulesen. Die Problematik dieser Stabilitätsbeurteilung „nach der ersten Näherung" aus den linearisierten Gleichungen ist

[1] Vgl. den Bericht über die *Ljapunov*sche Stabilitätstheorie von *W. Hahn*, MTW-Mitteilungen 4 (1957), S. 119.

[2] Vgl. Fußnote 1.

[3] *J. J. Stoker*, Commun. on pure and appl. Math. 8 (1955) S. 133.

[4] Einzelheiten darüber kann man den zitierten Arbeiten von *Horn* entnehmen.

[5] *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, S. 342.

[6] *J. J. Stoker*, Fußnote 3.

bekannt, ebenso die Schwierigkeit der Beseitigung dieser Problematik (vgl. *Hahn*, *Stoker* a. a. O.), doch soll darauf nicht eingegangen werden. Einige der folgenden theoretischen Ergebnisse sind durch Versuche bestätigt worden.

Der Fragenkreis ist damit umrissen, und zwar in einem recht weiten Rahmen, der begreiflicherweise im folgenden nicht vollständig ausgefüllt werden kann. Vielmehr müssen wir uns weiterhin auf die Behandlung einiger konkreter Beispiele beschränken, die zeigen, daß der Rahmen nichttriviale Dinge umfaßt.

3. Erstes Beispiel. Wir betrachten zu Beginn als einfachsten Fall ein System mit zwei Freiheitsgraden, ein ebenes elastisches Pendel nach Abb. 1, wie es *Minorsky*[1] nennt, der sich seinerseits auf *Gorelik* und *Witt*[2] bezieht. An einer masselosen Feder mit linearer Kennlinie der Federkonstanten c hängt die Punktmasse M. Als Koordinaten der Bewegung von M wählen wir die waagerechte Verschiebung q_1 aus der Mittellage und die lotrechte Verschiebung q_2 aus der Ruhelage, die sich unter dem Eigengewicht Mg einstellt. Es sei L_0 die ungespannte, $L_1 = L_0 + Mg/c$ die statisch vorgespannte, L die variable Federlänge während der Bewegung. Dann findet man durch Berechnung der Federverlängerung $L - L_0$ und der Federkraft $c\,(L - L_0)$ sowie deren waagerechten und lotrechten Komponenten unter Einbeziehung der Schwerkraft, wenn man alle Ausdrücke bis zu den quadratischen Gliedern in q_1 und q_2 entwickelt, ganz elementar die Bewegungsgleichungen

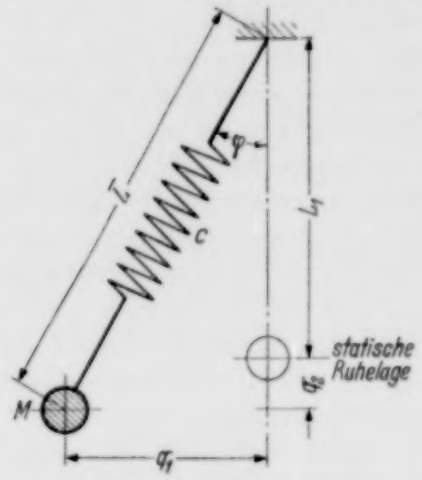


Abb. 1. Erstes Beispiel: Ebenes elastisches Pendel.

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2\, q_1 + \gamma\, q_1\, q_2 &= 0\,, \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2\, q_2 + \frac{\gamma}{2}\, q_1^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit

$$\omega_1^2 = g/L_1\,, \qquad \omega_2^2 = c/M\,, \qquad \gamma = \frac{c}{M}\,\frac{L_0}{L_1^2}\,.$$

Die Gleichungen (9) entsprechen (1). Es ist also im Beispiel $m = 1$, $n = 2$, und der nichtlineare Term $f_1 = \gamma\, q_1\, q_2$ hat die Eigenschaft (6). Nur nebenbei sei vermerkt, daß man nach *Minorsky*[3] bei der Verwendung von Polarkoordinaten auf ein Gleichungspaar statt (9) kommt, das in den Funktionen f_k auch die ersten und zweiten Zeitableitungen der Koordinaten enthält. Das ist ein Beispiel für (1) in der längeren Form. Dagegen ist (9) einfacher.

Die Grundbewegung (5) ist jetzt die lotrechte harmonische Schwingung

$$\mathring{q}_1 = 0\,, \qquad \mathring{q}_2 = Q_2 \cos \omega_2\, t$$

mit beliebigem konstantem Q_2, eine strenge periodische Lösung von (9). Die zugehörigen linearisierten Gleichungen (8) schrumpfen auf die eine *Mathieu*-Gleichung

$$\ddot{\bar{q}}_1 + \omega_1^2\, \bar{q}_1 + \bar{q}_1\, \gamma\, Q_2 \cos \omega_2\, t = 0$$

zusammen, die mit $\eta = \omega_2/\omega_1$, $\varepsilon = \gamma\, Q_2/\omega_1^2$, $\tau = \omega_2\, t$ in

$$\eta^2\, \frac{d^2 \bar{q}_1}{d\tau^2} + \bar{q}_1\,(1 + \varepsilon \cos \tau) = 0 \tag{10}$$

übergeht. Aus (10) kann man das Stabilitätsverhalten der Grundbewegung direkt ablesen, denn die Eigenschaften der allgemeinen Lösung

$$\bar{q}_1 = c_1\, e^{\varrho \tau}\, \varphi(\tau) + c_2\, e^{-\varrho \tau}\, \varphi(-\tau)\,, \tag{11}$$

in der c_i Integrationskonstante, $\varphi(\tau)$ eine periodische Funktion, ϱ den charakteristischen Exponenten bedeuten, sind ja vollständig bekannt.[4] Die Funktion (11) enthält immer dann ein ϱ mit nicht verschwindendem Realteil und somit ein exponentiell anwachsendes Glied, das Instabilität der lotrechten Grundbewegung anzeigt, wenn

$$\omega_2 = \frac{2\,\omega_1}{p} \qquad (p > 0,\ \text{ganz}) \tag{12}$$

[1] *N. Minorsky*, Introduction to non-linear Mechanics, Ann Arbor 1947, S. 347.
[2] *G. Gorelik* und *A. Witt*, J. of Techn. Phys. USSR 3 (1933) S. 294.
[3] *N. Minorsky* a. a. O., Gl. (126.7).
[4] Vgl. z. B. *R. Rothe* und *J. Szabó*, Höhere Mathematik Teil VI § 11, Stuttgart 1953.

gilt. Dabei braucht (12) nicht exakt erfüllt zu sein, sondern es genügt eine gewisse Annäherung, die durch die bekannten Instabilitätsbereiche der „*Ince-Strutt*schen Karte" bestimmt ist. Immer wenn eine Bedingung (12) in diesem Sinne erfüllt ist, kann das Pendel nicht in seiner lotrechten Schwingung verharren, sondern es schaukelt sich eine Querschwingung auf, wobei wegen der konstanten Gesamtenergie die Amplitude der lotrechten Schwingung abnehmen muß. Die stärkste Instabilität mit dem größten Realteil des charakteristischen Exponenten ϱ und damit die rascheste Aufschaukelung der Querbewegung liegt für $p = 1$, d. h. für

$$\omega_2 = 2\,\omega_1 \tag{13}$$

vor.

Es ist sehr leicht, dieses Phänomen experimentell zu verwirklichen. Die Beziehung (13) geht mit den angegebenen Werten für ω_1 und ω_2 in $Mg/c = L_1/4$ über, was man so deuten kann, daß die statische Verlängerung Mg/c der Feder gleich dem vierten Teil der statisch vorgespannten Länge sein muß. Nimmt man nun eine leichte zylindrische Schraubenfeder aus Stahldraht und befestigt an ihrem einen Ende eine schwere Masse M, so muß man das andere Federende so an einem undehnbaren Faden aufhängen und man muß diesen Faden so abmessen, daß die gesamte Pendellänge in der Ruhelage viermal so groß wie die Federverlängerung wird. Große Genauigkeit ist dabei nicht erforderlich. Zieht man dann die Masse möglichst genau lotrecht nach unten und läßt sie los, so geht die einsetzende lotrechte Schwingung allmählich in eine quergerichtete Pendelbewegung über. Die Auswanderung aus der Lotlinie geschieht um so langsamer, je genauer die Masse anfangs in der Lotlinie war. Damit ist eine typische Instabilitätserscheinung experimentell gezeigt. Im weiteren Verlauf der Bewegung verschwindet die Längsbewegung des Systems ganz und es bleibt für kurze Zeit eine reine Pendelschwingung übrig, die jedoch ihrerseits wieder rasch abklingt, so daß die ursprüngliche Längsschwingung wiederkehrt. Der Vorgang wiederholt sich periodisch[1]. Dieser Abschnitt der Bewegung wird natürlich von unserer linearen Stabilitätstheorie nicht mehr erfaßt. Es ist aber instruktiv, den Versuch einer Berechnung des ganzen Bewegungsvorganges zu machen.

Als erfolgversprechend bietet sich dazu die Methode der langsam veränderlichen Amplitude und Phase an, die dem beobachteten Vorgang angemessen sein dürfte. Wir benützen sie in der von *Kryloff* und *Bogoljuboff* für eine einzige Differentialgleichung angegebenen Form, die sich unmittelbar auf unser System übertragen läßt.[2] Dazu machen wir den Ansatz

$$q_i = Q_i \sin(\omega_i t + \vartheta_i) \qquad (i = 1, 2) \tag{14}$$

mit langsam veränderlichen Funktionen $Q_i = Q_i(t)$, $\vartheta_i = \vartheta_i(t)$ und dem Frequenzverhältnis $\omega_2/\omega_1 = 2$ nach (13) und führen ihn in die Bewegungsgleichungen (9) ein. Dabei ist zunächst

$$\dot{q}_i = \dot{Q}_i \sin(\omega_i t + \vartheta_i) + Q_i(\omega_i + \dot{\vartheta}_i)\cos(\omega_i t + \vartheta_i)$$

zu bilden, was mit der weiteren Näherungsannahme

$$\dot{Q}_i \sin(\omega_i t + \vartheta_i) + Q_i \dot{\vartheta}_i \cos(\omega_i t + \vartheta_i) = 0 \tag{15}$$

vereinfacht in

$$\dot{q}_i = Q_i \omega_i \cos(\omega_i t + \vartheta_i)$$

übergeht. Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten werden also Q_i und ϑ_i noch als Konstante behandelt, was deren langsame Veränderlichkeit ausdrückt. Die Beschleunigungen werden dann

$$\ddot{q}_i = \dot{Q}_i \omega_i \cos(\omega_i t + \vartheta_i) - Q_i \omega_i (\omega_i + \dot{\vartheta}_i)\sin(\omega_i t + \vartheta_i),$$

und die Differentialgleichungen (9) nehmen die Gestalt

$$\dot{Q}_i \omega_i \cos(\omega_i t + \vartheta_i) - Q_i \omega_i \dot{\vartheta}_i \sin(\omega_i t + \vartheta_i) + f_i = 0 \tag{16}$$

mit $f_1 = \gamma\, q_1\, q_2$, $f_2 = \gamma\, q_1^2/2$ an. Nun lösen wir (15) und (16) nach $\dot{Q}_i$ und $Q_i\,\dot{\vartheta}_i$ auf und erhalten das System

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_i &= -\frac{f_i}{\omega_i}\cos(\omega_i t + \vartheta_i), \\ Q_i\,\dot{\vartheta}_i &= \frac{f_i}{\omega_i}\sin(\omega_i t + \vartheta_i) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2). \tag{17}$$

[1] Auf diese Kopplung der Längs- und Querschwingungen bei einem elastischen Pendel, das die Bedingung $\omega_1 = \omega_2$ erfüllt, weist *Pohl* hin, ohne auf die nichtlinearen Wurzeln dieses Effekts einzugehen: *R. W. Pohl*, Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre, 13. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.

[2] *N. Kryloff* and *N. Bogoljubov*, Introduction to non-linear Mechanics, Princeton 1947. Für die Anwendung der Methode auf Systeme von Differentialgleichungen vgl. auch *J. Haag*, Les mouvements vibratoires, Bd. 2, § 207, Paris 1955.

Da hierin links langsam veränderliche Größen stehen, wird man keinen wesentlichen Fehler begehen, wenn man die rechten Seiten über eine Periode mittelt, und zwar durch Integration nach t von 0 bis $2\pi/\omega_1$ und Division durch $2\pi/\omega_1$. Bei diesem Rechnungsgang werden Q_i und ϑ_i als Konstante angesehen. Beispielsweise lautet die rechte Seite der ersten Gleichung (17) nach Einführung von (14) ausführlich

$$-\frac{f_1}{\omega_1}\cos(\omega_1 t+\vartheta_1)=\frac{-\gamma Q_1 Q_2}{4\omega_1}\left[\cos(2\vartheta_1-\vartheta_2)-\cos((2\omega_1+\omega_2)t+2\vartheta_1+\vartheta_2)\right],$$

wovon nach der Integration nur das erste Glied stehen bleibt. Auf diese Weise kommt statt (17)

$$\left.\begin{aligned}\dot{Q}_1&=-\frac{\gamma}{4\omega_1}Q_1 Q_2\cos(2\vartheta_1-\vartheta_2),\\ \dot{Q}_2&=\frac{\gamma}{16\omega_1}Q_1^2\cos(2\vartheta_1-\vartheta_2),\\ Q_1\dot{\vartheta}_1&=\frac{\gamma}{4\omega_1}Q_1 Q_2\sin(2\vartheta_1-\vartheta_2),\\ Q_2\dot{\vartheta}_2&=\frac{\gamma}{16\omega_1}Q_1^2\sin(2\vartheta_1-\vartheta_2).\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Aus diesem komplizierten Differentialgleichungssystem läßt sich rasch ein erstes Integral ableiten: Durch Division der ersten und zweiten Gleichung (18) folgt

$$\frac{dQ_1}{dQ_2}=-4\frac{Q_2}{Q_1}$$

oder nach Trennung der Veränderlichen integriert

$$\frac{Q_1^2}{C^2}+\frac{Q_2^2}{(C/2)^2}=1\tag{19}$$

mit der Integrationskonstanten C. Das ist die Gleichung einer Ellipse in der (Q_1, Q_2)-Ebene (Abb. 2) mit den Halbachsen C und $C/2$.

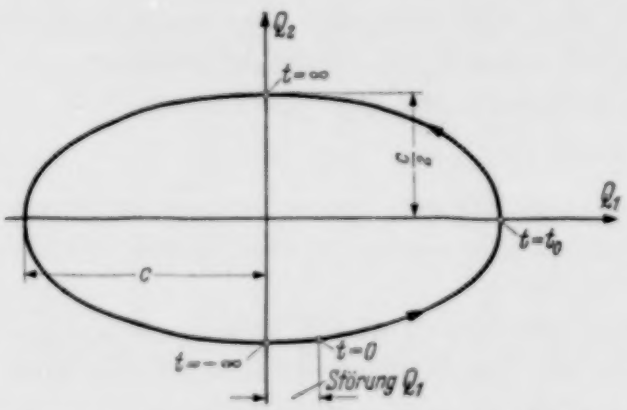


Abb. 2. Darstellung der Bewegung des elastischen Pendels in der Ebene der Amplituden Q_1 und Q_2.

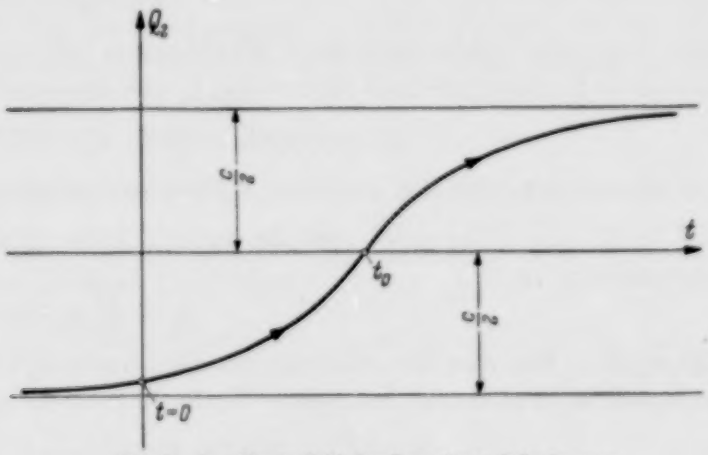


Abb. 3. Amplitude $Q_2(t)$ der lotrechten Schwingung des elastischen Pendels.

Allgemein wird man das System (18) kaum lösen können. Eine Partikularlösung findet man jedoch leicht. Setzt man nämlich ϑ_1 und $\vartheta_2=\text{const}$, wobei dann (18) sofort $\vartheta_2=2\vartheta_1$ verlangt, so liefert die zweite Gleichung (18) mit (19)

$$\frac{dQ_2}{dt}=\frac{\gamma}{16\omega_1^2}(C^2-4Q_2^2).$$

Dies läßt sich wiederum durch Trennung der Variabeln integrieren und führt auf die Lösung

$$Q_2=\frac{C}{2}\,\frac{e^{\frac{C\gamma}{4\omega_1}(t-t_0)}-1}{e^{\frac{C\gamma}{4\omega_1}(t-t_0)}+1},\tag{20}$$

wobei die Anfangszeit t_0 als weitere Integrationskonstante eingeführt ist. Die Funktion (20) hat qualitativ das in Abb. 3 gezeichnete Bild. Q_1 ist damit durch (19) ebenfalls gegeben.

Nun kann man die gewonnenen Gleichungen (19) und (20) bzw. ihre Bilder Abb. 2 und 3 deuten. Wir beginnen bei dem Ausgangspunkt $t = 0$, wo die Amplitude Q_1 der Querbewegung möglichst genau Null sein soll, aber eine unvermeidliche kleine Störung >0 hat. Je kleiner diese Störung ist, um so näher befindet sich der Bildpunkt in Abb. 2 am unteren Ellipsenscheitel, in Abb. 3 an der unteren Asymptote $Q_2 = -C/2$, und um so länger dauert es, bis er sich von dieser Asymptote löst, d. h. die Querbewegung merklich wird. Für $t = t_0$ ist die lotrechte Bewegung mit ihrer Amplitude Q_2 ganz verschwunden, der Bildpunkt in Abb. 2 liegt im rechten Ellipsenscheitel, der mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird. Dann nähert sich die Bewegung wieder asymptotisch der lotrechten Schwingung, die theoretisch erst für $t = \infty$ ganz erreicht wird. In Wirklichkeit werden aber vorhandene Störungen schon wieder die nächste Querbewegung einleiten, so daß sich der Gesamtvorgang etwa periodisch wiederholt. Diese Wiederholung bleibt rechnerisch unbestimmt. Soweit man also nach der qualitativen Beobachtung des Versuchspendels urteilen kann, gibt unsre einfache Theorie wesentliche Züge der Bewegung wieder, allerdings nicht alle. Ob man durch weitere Integration von (18) mit $\vartheta_i \neq \text{const}$, durch Berücksichtigung von Dämpfungskräften oder höheren Gliedern der Ausgangsgleichungen (9) weiter kommt, ist unbekannt.

Als wesentlichstes Ergebnis dieses Abschnitts ist festzuhalten, daß die lineare Theorie der kleinen Schwingungen in dem vorgeführten Fall überhaupt keine zutreffende Beschreibung des wirklichen Bewegungsvorgangs mehr liefert. Die beiden Normalschwingungen des Pendels sind weder unabhängig voneinander noch haben sie konstante Amplituden, wie Abb. 2 und 3 überzeugend zeigen. Zwar kann die lotrechte Normalschwingung theoretisch allein bestehen, wenn auch die absolute Störungsfreiheit praktisch nicht möglich ist, und paßt insofern noch in das klassische Bild der kleinen Schwingungen. Die seitliche Pendelbewegung aber ist diesem Bild überhaupt nicht mehr einzuordnen, denn wenn man sie einmal rein einleitet, was dem Zeitpunkt $t = t_0$ in Abb. 2 und 3 entspricht, so nimmt ihre Amplitude Q_1 sofort mit endlicher Geschwindigkeit $\dot{Q}_1$ ab. Die zweite Normalschwingung im alten Sinn und die zugehörige periodische Bewegung, von der im 1. Abschnitt gesprochen wurde, gibt es hier nicht. Daraus sieht man, daß der *Horn*sche Ausschluß von (3) eine wesentliche Bedingung ist und daß ihre Verletzung, die ja in (13) vorliegt, tiefgehende Änderungen im Bewegungsbild hervorrufen kann.

4. Zweites Beispiel. Weitere Erkenntnisse gewinnt man, wenn man dem System des ersten Beispiels einen Freiheitsgrad zufügt. An die erste Masse soll eine masselose Feder und eine zweite Masse angehängt werden, die lotrecht geführt ist (Abb. 4). Nun entfallen zwei Freiheitsgrade auf die Längsbewegung, einer auf die Querbewegung, es ist also $n = 3$, $m = 1$. Die lotrechte Grundbewegung ist jetzt nicht mehr einfach, sondern zweifach periodisch, und dieser Umstand soll näher studiert werden. Wie in Abb. 4 eingezeichnet sind M_1 und M_2 die beiden Massen, c_1 und c_2 die Federkonstanten, L_{11} und L_{21} die beiden statisch durch die Gewichte gespannten Pendellängen, L_{10} und L_{20} die entsprechenden ungespannten Längen. Als Koordinaten werden zunächst die lotrechten Verschiebungen y_1 und y_2 der Massen aus ihren Ruhelagen sowie die waagerechte Verschiebung x von M_1 verwendet. Dann erhält man die Bewegungsgleichungen des Systems bis zu den quadratischen Gliedern nach einiger Rechnung, die keine grundsätzliche Schwierigkeit bietet, zu

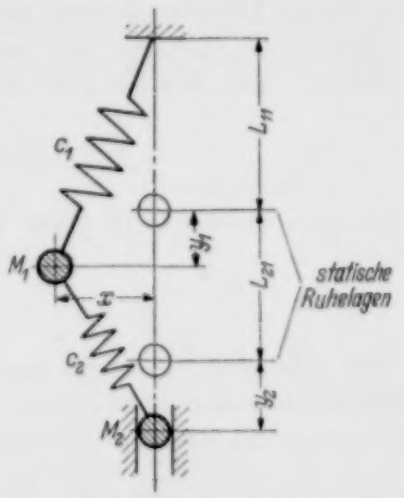


Abb. 4. Zweites Beispiel: Zweimassen-Schwingungskette in der Ebene.

$$M_1 \ddot{x} + a_1 x + a_2 x y_1 + a_3 x y_2 = 0 , \tag{21.1}$$

$$M_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} a_2 x^2 = 0 , \tag{21.2}$$

$$M_2 \ddot{y}_2 + c_2 (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} a_3 x^2 = 0 \tag{21.3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= c_1 \left(1 - \frac{L_{10}}{L_{11}}\right) + c_2 \left(1 - \frac{L_{20}}{L_{21}}\right), \\ a_2 &= c_1 \frac{L_{10}}{L_{11}^2} - c_2 \frac{L_{20}}{L_2^2}, \qquad a_3 = c_2 \frac{L_{20}}{L_{21}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Man sieht, daß für $x = 0$ in (21.1) und (21.2) wie es sein muß die Gleichungen des zweigliedrigen linearen Schwingers herauskommen. Diese Teile von (21) müssen auf die Normalform $\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = 0$ $(k = 2, 3)$ gebracht werden. Dabei werden die Normalkoordinaten q_k lineare Funktionen von y_1, y_2 und umgekehrt. Mit dieser linearen Transformation der y_k, deren Koeffizienten nicht mehr explizit angegeben werden sollen, und der Umbenennung $x = q_1$ entsteht statt (21) ein Gleichungs-

system der Form (1), wobei aber die f_k keine $\dot{q}_i$ und $\ddot{q}_i$ enthalten. Nach (21.1) ist $\omega_1^2 = a_1/M_1$, während ω_2^2 und ω_3^2 als Frequenzquadrate der Längsbewegung wie bekannt Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{c_2}{M_2} + \frac{c_1 + c_2}{M_1}\right) + \frac{c_1\, c_2}{M_1\, M_2} = 0$$

sind. Die lotrechte Grundbewegung ist

$$\mathring{q}_1 = 0\,, \qquad \mathring{q}_k = Q_k \cos\left(\omega_k\, t + \vartheta_k\right) \qquad (k = 2, 3) \tag{23}$$

mit zwei Normalschwingungen $\mathring{q}_2$ und $\mathring{q}_3$, die sich mit beliebigen konstanten Amplituden Q_k und Phasen ϑ_k überlagern können. Statt (8) erhält man aus (21.1) die eine Gleichung

$$\ddot{\bar{q}}_1 + \omega_1^2\, \bar{q}_1 + \left[F_2\, \mathring{q}_2 + F_3\, \mathring{q}_3\right] \bar{q}_1 = 0 \tag{24}$$

mit Koeffizienten F_i, die aus den Konstanten (22) zusammengesetzt sind.

Wenn ω_2 und ω_3 in keinem rationalen Verhältnis stehen, ist der Koeffizient $F_2\, \mathring{q}_2 + F_3\, \mathring{q}_3$ in (24) fastperiodisch. Trotzdem dürfte es für praktische Zwecke erlaubt und ausreichend sein, die wohlbekannten Lösungsmethoden für Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten zu benutzen. Die Frequenzen können ja als physikalische Größen in jedem konkreten Fall zahlenmäßig nur als endliche Dezimalbrüche angegeben werden. Deshalb kann man stets für das Frequenzverhältnis

$$\omega_2/\omega_3 = n_2/n_3 \qquad (n_2, n_3 > 0\,, \quad \text{ganz, teilerfremd}) \tag{25}$$

setzen, und zwar mit beliebiger Genauigkeit, wenn man nur n_2 und n_3 groß genug nimmt. Dann ist aber der Koeffizient $[F_2\, \mathring{q}_2 + F_3\, \mathring{q}_3]$ periodisch mit der Periode $2\,\pi/\Omega$ bzw. der Kreisfrequenz

$$\Omega = \omega_2/n_2 = \omega_3/n_3\,,$$

und mit der neuen Variabeln

$$\tau = \Omega\, t$$

wird aus (24) die *Hill*sche Differentialgleichung

$$\eta^2\, \frac{d^2\bar{q}_1}{d\tau^2} + \bar{q}_1\left(1 + \varepsilon\, \Phi(\tau)\right) = 0 \tag{26}$$

mit

$$\Phi(\tau) = \cos\left(n_2\,\tau + \vartheta_2\right) + a\, \cos\left(n_3\,\tau + \vartheta_3\right),$$

$$\eta = \Omega/\omega_1\,, \qquad \varepsilon = F_2\, Q_2/\omega_1^2\,, \qquad a = \frac{F_3\, Q_3}{F_2\, Q_2}\,.$$

$\Phi(\tau)$ hat in τ die Periode $2\,\pi$. (26) ist offensichtlich eine einfache Erweiterung von (10).

Die allgemeine Lösung von (26) hat wieder die Form (11). Der charakteristische Exponent ϱ in dieser Lösung, dessen Realteil die Stabilitätsfrage entscheidet, wird nach den Ergebnissen der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten[1] folgendermaßen bestimmt: Man nehme zwei Partikularlösungen $\bar{q}_{11}$ und $\bar{q}_{12}$ von (26), die den Anfangsbedingungen

$$\bar{q}_{11}(0) = \frac{d\bar{q}_{12}}{d\tau}\,(0) = 1\,, \qquad \frac{d\bar{q}_{11}}{d\tau}\,(0) = \bar{q}_{12}(0) = 0$$

genügen. Dann folgt ϱ aus der Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\, 2\,\pi\,\varrho = \frac{1}{2}\left(\bar{q}_{11}\,(2\,\pi) + \frac{d\bar{q}_{12}}{d\tau}\,(2\,\pi)\right).$$

Dies läßt sich praktisch auswerten, indem man die Lösungen $\bar{q}_{11}$ und $\bar{q}_{12}$ durch Entwicklung nach Potenzen von ε ausrechnet. Die Methode ist hinreichend bekannt, so daß es genügt, das Resultat dieser etwas umständlichen Rechnung anzugeben. Es lautet bis zu dem Glied mit ε^2

$$\mathfrak{Cof}\, 2\,\pi\,\varrho = \cos\frac{2\,\pi}{\eta} - \frac{\pi}{2\,\eta}\,\sin\frac{2\,\pi}{\eta}\left[\frac{1}{\eta^2\, n_2^2 - 4} + \frac{a^2}{\eta^2\, n_3^2 - 4}\right] + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{27}$$

Natürlich ist diese Reihe aus Konvergenzgründen nur für kleine ε brauchbar; die Amplituden Q_2 und Q_3 der Längsschwingungen sollen also nicht allzu groß sein. Wenn dann aus (27) $|\mathfrak{Cof}\, 2\,\pi\,\varrho| \leqq 1$ und somit ϱ rein imaginär herauskommt, so ist die Grundbewegung stabil. Instabil ist sie für

[1] Vgl. *R. Rothe* und *J. Szabó*, Fußnote 4 von S. 216 oder *J. Horn*, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 5. Aufl., Berlin 1948, 5. Kap.

$|\mathfrak{Cof}\, 2\pi\varrho| > 1$, weil dann der Realteil $\mathrm{Re}(\varrho) \neq 0$ wird. Letzteres ist in (27) nur möglich, wenn rechts vorne $|\cos 2\pi/\eta|$ in die Nähe von 1 kommt, damit das kleine zweite Glied den Überschuß über 1 ergeben kann, und erst recht wenn $|\cos 2\pi/\eta| = 1$ wird. Dies wiederum tritt nur für η-Werte ein, die gleichzeitig $\sin 2\pi/\eta = 0$ ergeben. Das zweite Glied rechts in (27) kann dann nur dadurch vor dem Verschwinden bewahrt werden, daß einer der Nenner in der eckigen Klammer Null wird, daß also

$$\left.\begin{array}{lll} \text{entweder} & \eta^2 n_2^2 - 4 = 0\,, \quad \eta = 2/n_2\,, & \text{d. h. } \omega_2 = 2\,\omega_1 \\ \text{oder} & \eta^2 n_3^2 - 4 = 0\,, \quad \eta = 2/n_3\,, & \text{d. h. } \omega_3 = 2\,\omega_1 \end{array}\right\} \tag{28}$$

gilt. Nur wenn η in die Nähe dieser Werte kommt, kann $|\mathfrak{Cof}\, 2\pi\varrho| > 1$ werden und Instabilität eintreten. Das ist allerdings eine durch unsere Näherung beschränkte Aussage. Würde man die Entwicklung in (27) zu höheren Potenzen von ε weiterführen, so kämen noch weitere Instabilitäten heraus, auf die wir nicht mehr eingehen. Wir behandeln von den beiden gleichwertigen Möglichkeiten (28) den Fall $\eta = 2/n_2$ weiter.

Man findet aus (27) durch Grenzwertbildung $\eta \to 2/n_2$ nach der *de l'Hospital*schen Regel

$$\mathfrak{Cof}\, 2\pi\varrho = (-1)^{n_2}\left(1 + \frac{\pi^2 n_2^2}{32}\varepsilon^2\right) + 0(\varepsilon^3) \tag{29}$$

tatsächlich mit dem Betrag >1 für genügend kleine ε. Damit ist die Instabilität der Grundbewegung nachgewiesen. Der für das Anwachsen der Lösung (11) maßgebende Realteil von ϱ läßt sich aus (29) nur bis zum linearen Glied in ε ermitteln, und zwar bekommt man durch Reihenentwicklung des $\mathfrak{Cof}$

$$Re(\varrho) = n_2\,\varepsilon/8 + 0(\varepsilon^2)\,.$$

Der mit der Zeit aufklingende Faktor des ersten Teils der Lösung (11), auf den es ja allein ankommt, wird dann mit $n_2 = 2/\eta = 2\,\omega_1/\Omega\,,\ \tau = \Omega\,t$

$$e^{Re\,(\varrho)\,\tau} = e^{\varepsilon\,\omega_1\,t/4}\,. \tag{30}$$

Die Instabilität tritt wie erwähnt nicht nur auf, wenn die Frequenzbedingung $\eta = 2/n_2$ oder $\omega_2 = 2\,\omega_1$ genau erfüllt ist, sondern in einem ganzen Frequenzbereich. Betrachten wir in (27) η und ε als Variable, so gibt es in der (η, ε)-Ebene einen Instabilitätsbereich, innerhalb dessen die rechte Seite von (27) dem Betrage nach >1 ausfällt. Die Grenzen dieses Bereichs sind folglich durch $|\mathfrak{Cof}\, 2\pi\varrho| = 1$ bestimmt, genauer gesagt durch

$$\mathfrak{Cof}\, 2\pi\varrho = \begin{cases} +1 & \text{für gerade } n_2\,, \\ -1 & \text{für ungerade } n_2\,, \end{cases} \tag{31}$$

wie man durch Vergleich mit (29) sofort sieht. Die Grenzkurven des Instabilitätsbereichs in der (η, ε)-Ebene, die an sich durch (31), (27) gegeben sind, lassen sich nun in eine übersichtliche Form bringen, indem man in (31) den Ausdruck (27) einsetzt, dann durch Ausmultiplizieren die Nenner beseitigt, für η die Reihenentwicklung

$$\eta = 2/n_2 + \eta^{(1)}\,\varepsilon + \eta^{(2)}\,\varepsilon^2 + \cdots \tag{32}$$

einführt, alle Glieder der Gleichung damit nach Potenzen von ε entwickelt und schließlich einen Vergleich dieser Potenzen vornimmt. Nach einer längeren, aber elementaren Rechnung findet man dann für die Reihe (32) nach Multiplikation mit n_2 unter gleichzeitiger Berücksichtigung der schon benützten Beziehung $\eta = \Omega/\omega_1 = \omega_2/n_2\,\omega_1$

$$n_2\,\eta = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \pm \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon^2\left[\frac{a^2}{8\left(\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 - 1\right)} - \frac{1}{32}\right] + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{33}$$

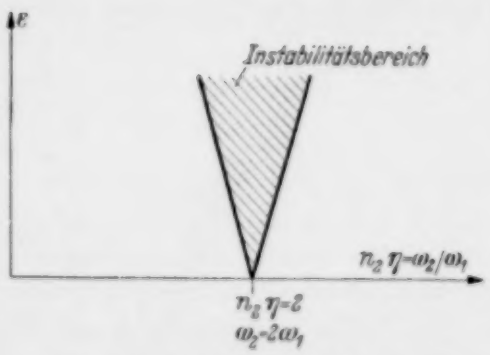


Abb. 5. Der wichtigste Instabilitätsbereich für das zweite Beispiel.

Die beiden durch (33) dargestellten Grenzlinien und der von ihnen eingeschlossene Instabilitätsbereich sind in Abb. 5 schematisch gezeichnet. Auf der Abszissenachse ist als physikalisch angemessene Größe nicht η, sondern $n_2\,\eta = \omega_2/\omega_1$ aufgetragen. Das Bild kann als Teil der zu Gleichung (26) gehörigen *Ince-Strutt*schen Karte aufgefaßt werden. Von allen sonstigen Instabilitätsbereichen ist dabei abgesehen.

Die vorstehenden Rechenergebnisse sind nun folgendermaßen zu interpretieren. Die Grundbewegung (24), eine beliebige Überlagerung von zwei lotrechten Normalschwingungen, ist als zweifach periodische Bewegung des Systems stets möglich, aber sie ist bei Eintreten einer Bedingung $\omega_2 = 2\,\omega_1$ oder $\omega_3 = 2\,\omega_1$ instabil und bringt die dritte Normalschwingung in Querrichtung durch nichtlineare Kopplung mit in Gang. Wegen der Konstanz der Gesamtenergie muß das notwendig die Amplituden der Längsbewegung vermindern. Der gesamte Bewegungsvorgang wurde zwar jetzt im Gegensatz zum vorigen Beispiel nicht berechnet; soviel kann man aber doch sagen, daß die lineare Theorie der kleinen Schwingungen in diesem Fall wiederum wesentlich unzureichend wird. Die Instabilitätsbedingung $\omega_2 = 2\,\omega_1$ ist nach (13) dieselbe wie beim einfachen elastischen Pendel. D. h. die eine Normalschwingung $\mathring{q}_2$ in Längsrichtung regt die Querschwingung an unabhängig vom Vorhandensein, von Amplitude, Frequenz und Phase der zweiten Normalschwingung $\mathring{q}_3$ (wobei die Indizes 2 und 3 vertauscht werden können). Auch quantitativ hat die zweite Normalschwingung in erster Näherung keinen Einfluß auf den Aufschaukelungsvorgang der Querschwingung: Der Exponent in (30) und die Glieder bis ε in (33) sind genau dieselben, die auch bei der *Mathieu*-Gleichung (10) des einfachen elastischen Pendels herauskommen. Erst das Glied mit ε^2 in (33) wird von der zweiten Normalschwingung beeinflußt, wie der dortige Term mit a^2 zeigt. An diesem Term ist wesentlich, daß die Zahlen n_2 und n_3 nur in der Verbindung des Quotienten n_3/n_2 auftreten, der nach (25) das Frequenzverhältnis ω_3/ω_2 annähert. Man darf diese Annäherung treiben, soweit man will und kann, d. h. man darf die Zahlen n_2 und n_3 beliebig weit steigern, ohne daß an der Größe des Exponenten in (30) und den Grenzen (33) des Instabilitätsbereichs etwas Wesentliches geändert wird. Dies bestätigt nachträglich die Berechtigung des Ansatzes (25), der den fastperiodischen Koeffizienten der Gleichung (24) zu einem periodischen macht.

5. Drittes Beispiel. Wir erweitern schließlich die bisher behandelten Fälle zur Schwingungskette oder zum mehrfachen elastischen Pendel, von dem wir wieder nur ebene Bewegungen betrachten. Abb. 6 zeigt eine solche einseitig gefesselte Schwingungskette mit N Massen $M_1, \ldots, M_N$ und N masselosen Federn der Federkonstanten $c_1, \ldots, c_N$. Die leeren Kreise geben die statischen Ruhelagen der Massen an, die vollen Kreise ihre Lagen während der Bewegung, die sich wiederum aus Längs- und Querkomponenten zusammensetzt. Abb. 6 gibt nicht den einzig möglichen Fall wieder. Es dürfen einige Federn durch starre Fäden ersetzt sein ($c_j = \infty$), was eine Beschränkung der Freiheitsgrade in Längsrichtung bedeutet. Es kann auch ein Teil der Kette ähnlich wie im zweiten Beispiel (Abb. 4) in Längsrichtung geführt sein, was eine Beschränkung der Freiheitsgrade in Querrichtung darstellt. Auch zweiseitig gefesselt kann die Schwingungskette sein. Solche Details, die hier nicht näher ausgeführt werden sollen, sind für technische Anwendungen wichtig. Das Beispiel läßt sich einer größeren Klasse von mechanischen Systemen unterordnen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die kinetische Energie eine quadratische Form der Geschwindigkeiten mit konstanten Koeffizienten, die potentielle Energie eine Funktion der Koordinaten allein, nicht der Geschwindigkeiten ist. Für solche Systeme wird (1) einfacher

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2\, q_k + f_k(q_i) = 0\,, \qquad (k = 1, \ldots, n)\,. \tag{34}$$

Nehmen wir im Beispiel der Schwingungskette die Verschiebungen x_k, y_k aus der statischen Ruhelage als Koordinaten (Abb. 6), so hat das System offenbar die Merkmale der genannten Klasse.

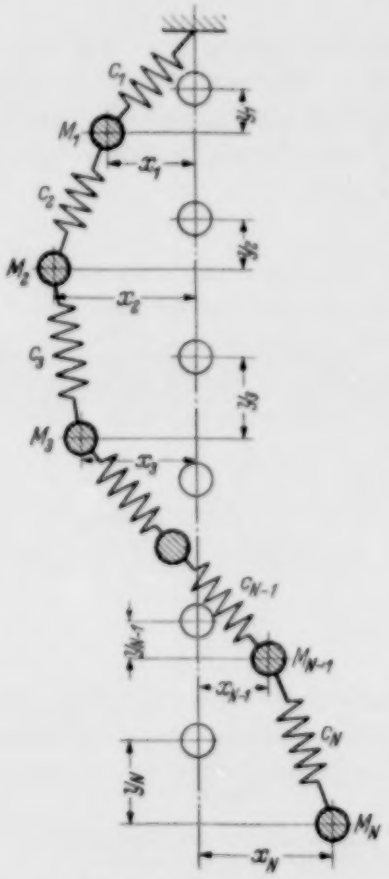


Abb. 6. Drittes Beispiel: Schwingungskette mit N Massen in der Ebene.

Die Grundbewegung der Schwingungskette ist die lotrechte Längsbewegung. Wenn m Massen an der Querbewegung, $n - m$ Massen an der Längsbewegung beteiligt sind, wird die Grundbewegung durch

$$\left.\begin{aligned} \mathring{q}_1 = \cdots = \mathring{q}_m = 0\,, \qquad q_l = Q_l \cos(\omega_l\, t + \vartheta_l) \\ (l = m+1, \ldots, n;\quad Q_l = \vartheta_l = \text{const}) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

dargestellt. Haben alle Federn lineare Kennlinien, so gilt (35) streng. Bei nichtlinearen Federn oder in anderen Fällen mechanischer Systeme ist die Grundbewegung aus nichtlinearen Gleichungen (34) zu berechnen und wird nach Abschnitt 1 durch $(n - m)$-fach periodische Funktionen darge-

stellt, für die (35) als Näherung brauchbar ist. Bei der Bildung der Gleichungen (8) wollen wir wie bisher die f_k vereinfacht nur bis zu quadratischen Gliedern, $\partial f_k/\partial q_r$ also nur linear berücksichtigen. Dann wird (8)

$$\ddot{\bar{q}}_k + \omega_k^2 \bar{q}_k + \sum_{r=1}^{m} \varphi_{kr}(t)\, \bar{q}_r = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{36}$$

mit

$$\varphi_{kr}(t) = \sum_{l=m+1}^{n} a_{krl} \cos(\omega_l t + \vartheta_l)\,, \tag{36a}$$

$$a_{krl} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial q_r\, \partial q_l} Q_l\,, \qquad a_{krl} = a_{rkl}\,.$$

Die letztere Symmetriebedingung für die Konstanten a_{krl} gilt, weil f_k die Ableitung des quadratischen Teils der potentiellen Energie nach q_k ist. In (36) liegt ein System linearer Differentialgleichungen mit fastperiodischen Koeffizienten vor, das es soweit zu lösen gilt, daß man das Stabilitätsverhalten der Lösung erkennt.

Wählt man $m = n - 1$, d. h. ersetzt man in der Schwingungskette alle Federn bis auf eine einzige durch starre Fäden, so erhält (36) lauter periodische Koeffizienten $\varphi_{kr}(t)$ mit dem gemeinsamen Faktor $\cos(\omega_n t + \vartheta_n)$. In diesem besonderen Fall kann man das Stabilitätsproblem vollständig überblicken. Man weiß aus der Theorie solcher Gleichungen (36), daß die allgemeine Lösung sich aus m Partikularlösungen der Form (11) additiv zusammensetzt und daß Instabilität, d. h. ein ϱ mit einem Realteil $\neq 0$ auftritt, wenn eine Frequenzbeziehung

$$\omega_n = (\omega_k + \omega_r)/p \qquad (p > 0, \text{ ganz}) \tag{37}$$

genau oder innerhalb gewisser Grenzen genähert erfüllt ist, wobei ω_n die Eigenfrequenz der Längsbewegung, ω_k und ω_r zwei beliebige Eigenfrequenzen (die verschieden oder gleich sein können) der Querbewegung bedeuten. Aus einer früheren Arbeit des Verfassers[1] ist das Nähere über diesen Sonderfall der Gleichungen (36) zu entnehmen.

Ist $m < n - 1$, so kann man die Koeffizienten $\varphi_{kr}(t)$ mit beliebiger Annäherung als periodisch ansehen, indem man in Erweiterung der Betrachtung des Abschnitts 4

$$\omega_{m+1} : \omega_{m+2} : \cdots : \omega_n = n_{m+1} : n_{m+2} : \cdots : n_n$$

($n_{m+1}, \ldots, n_n > 0$, ganz, teilerfremd) setzt. Die $\varphi_{kr}(t)$ haben dann die gemeinsame Periode $2\pi/\Omega$ bzw. Frequenz

$$\Omega = \omega_{m+1}/n_{m+1} = \cdots = \omega_n/n_n\,.$$

Nun kann man (36) als System *Hill*scher Differentialgleichungen auffassen. Dieses könnte man grundsätzlich mit der gleichen Methode angreifen, mit der in Abschnitt 4 die einfache Gleichung (24) behandelt wurde, was aber zu verwickelten Rechnungen führt. Wir werden uns deshalb darauf beschränken, die wichtigsten Instabilitäten des Systems (36) mit der sehr viel einfacheren Methode der langsam veränderlichen Amplitude und Phase, die in Abschnitt 3 verwendet wurde, genähert zu erfassen.

Wir machen den Ansatz

$$\bar{q}_k = Q_k \sin(\omega_k t + \vartheta_k) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{38}$$

und nehmen damit an, daß eine Störung das System in seitliche Schwingungen versetzt, die klein sind und deshalb in der äußeren Form der linearen Normalschwingungen angesetzt werden dürfen. Abweichungen davon, die voraussichtlich durch instabile Anfachung infolge der nichtlinearen Kopplung mit den Längsschwingungen eintreten werden, berücksichtigen wir dadurch, daß wir $Q_k = Q_k(t)$ und $\vartheta_k = \vartheta_k(t)$ langsam zeitlich veränderlich annehmen. Zur Abkürzung sei $\omega_k t + \vartheta_k = \alpha_k$ gesetzt. Dann erhält man durch Differenzieren von (38) und Einsetzen in (36) unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\dot{Q}_k \sin\alpha_k + Q_k \dot{\vartheta}_k \cos\alpha_k = 0\,, \tag{39}$$

die (15) entsprechen, die Gleichungen

$$\dot{Q}_k\, \omega_k \cos\alpha_k - Q_k\, \dot{\vartheta}_k\, \omega_k \sin\alpha_k + \sum_{r=1}^{m} \varphi_{kr}\, Q_r \sin\alpha_r = 0\,. \tag{40}$$

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 418.

Die Auflösung von (39) und (40) nach $\dot{Q}_k$ und $Q_k\,\dot{\vartheta}_k$ ergibt

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_k &= -\frac{1}{\omega_k}\sum_{r=1}^{m}\varphi_{kr}\,Q_r\sin\alpha_r\cos\alpha_k\,,\\ Q_k\,\dot{\vartheta}_k &= \frac{1}{\omega_k}\sum_{r=1}^{m}\varphi_{kr}\,Q_r\sin\alpha_r\sin\alpha_k\,. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Setzt man dann in (41) für φ_{kr} (36a) ein, so kommt nach kurzer Umformung

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_k &= -\frac{1}{4\,\omega_k}\sum_{r=1}^{m}\sum_{l=m+1}^{n}a_{krl}\,Q_r\,[\sin(\alpha_l+\alpha_r+\alpha_k)-\sin(\alpha_l-\alpha_r-\alpha_k)\\ &\qquad +\sin(\alpha_l+\alpha_r-\alpha_k)-\sin(\alpha_l-\alpha_r+\alpha_k)]\,,\\ Q_k\,\dot{\vartheta} &= -\frac{1}{4\,\omega_k}\sum_{r=1}^{m}\sum_{l=m+1}^{n}a_{krl}\,Q_r\,[\cos(\alpha_l+\alpha_r+\alpha_k)+\cos(\alpha_l-\alpha_r-\alpha_k)\\ &\qquad -\cos(\alpha_l+\alpha_r-\alpha_k)-\cos(\alpha_l-\alpha_r+\alpha_k])\,. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Nun wird die für die Methode charakteristische Mittelung der rechten Seite von (42) über eine Periode $2\pi/\Omega$ vorgenommen, indem man nach t von 0 bis $2\pi/\Omega$ integriert und mit $\Omega/2\pi$ multipliziert. Q_k und ϑ_k werden dabei als Konstante behandelt. Durch dieses Vorgehen bringt man normalerweise alle Glieder rechts in (42) zum Verschwinden. Lediglich in den Sonderfällen, in denen zwischen drei Frequenzen ω_l, ω_r und ω_k eine Beziehung

$$\omega_l \pm \omega_r \pm \omega_k = 0 \tag{43}$$

besteht, bleiben in (42) die entsprechenden Glieder $\sin(\vartheta_l \pm \vartheta_r \pm \vartheta_k)$ und $\cos(\vartheta_l \pm \vartheta_r \pm \vartheta_k)$ stehen. Wir betrachten die beiden hauptsächlich wichtigen Möglichkeiten, im folgenden unter a) und b) aufgeführt.

a) Für zwei bestimmte Indizes $l = L$ (zwischen $m+1$ und n) und $r = R$ (zwischen 1 und m) gelte

$$\omega_L = 2\,\omega_R\,. \tag{44}$$

Damit ist (43) erfüllt für $l = L$, $r = k = R$ mit Minuszeichen am zweiten und dritten Glied. Für alle anderen Indextripel sei (43) nicht erfüllt. Dann reduziert sich (42) auf

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_R &= \frac{1}{4\,\omega_R}\,a_{RRL}\,Q_R\sin(\vartheta_L-2\,\vartheta_R)\,,\\ Q_R\,\dot{\vartheta}_R &= -\frac{1}{4\,\omega_R}\,a_{RRL}\,Q_R\cos(\vartheta_L-2\,\vartheta_R)\,,\\ \dot{Q}_k &= Q_k\,\dot{\vartheta}_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq R\,, \quad k = 1,\ldots,m\,. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Wir suchen hiervon nur Partikularlösungen $\vartheta_R = \vartheta_L = \text{const}$, was nach der zweiten Gleichung (45) für $\vartheta_L - 2\,\vartheta_R = \pi/2 + N\pi$ mit ganzzahligem N möglich ist. Dann bleibt von (45) nur

$$\dot{Q}_R = \pm\frac{1}{4\,\omega_R}\,a_{RRL}\,Q_R\,, \qquad \dot{Q}_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq R$$

übrig. Das Pluszeichen gilt für gerade, das Minuszeichen für ungerade N. Es wird also

$$Q_R = Q_{R0}\,e^{\pm\frac{a_{RRL}}{4\,\omega_R}\cdot t}\,, \qquad Q_k = \text{const} \quad \text{für} \quad k \neq R\,, \quad Q_{R0} = \text{const}\,. \tag{46}$$

Darunter ist für eines der beiden Vorzeichen eine e-Funktion mit positivem Exponenten, also eine mit der Zeit anwachsende Funktion. Auf diese allein beschränken wir uns. Man kann also feststellen:

Wenn nach (44) eine Längseigenfrequenz ω_L mit dem Doppelten einer Quereigenfrequenz ω_R übereinstimmt, so ist die Längsbewegung (35) instabil derart, daß nach einem beliebig kleinen quergerichteten Anstoß die R-te Quereigenschwingung nach (38), (46) in der Form

$$\bar{q}_R = Q_{R0}\,e^{\frac{|a_{RRL}|}{4\,\omega_R}\,t}\,\sin(\omega_R\,t+\vartheta_R)$$

angefacht wird, während die übrigen Quereigenschwingungen ihre kleinen konstanten Amplituden behalten. Dieser Fall heißt Instabilität erster Art entsprechend der Terminologie der Theorie erzwungener Schwingungen.

b) Nun gelte für drei verschiedene Indizes $l = L$ (zwischen $m+1$ und n), $k = K$ und $r = R$ (zwischen 1 und m)

$$\omega_L = \omega_K + \omega_R . \tag{47}$$

Damit ist (43) erfüllt für $l = L$, $k = K$ und $r = R$ und soll für andere Indextripel wiederum nicht gelten. Aus (42) wird dann

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_R &= \frac{1}{4\,\omega_K}\, a_{KRL}\, Q_R \sin(\vartheta_L - \vartheta_R - \vartheta_K) , \\ \dot{Q}_R &= \frac{1}{4\,\omega_R}\, a_{RKL}\, Q_K \sin(\vartheta_L - \vartheta_K - \vartheta_R) , \end{aligned}\right\} \tag{48.1}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_K\,\dot{\vartheta}_K &= -\frac{1}{4\,\omega_K}\, a_{KRL}\, Q_R \cos(\vartheta_L - \vartheta_K - \vartheta_R) , \\ Q_R\,\dot{\vartheta}_R &= -\frac{1}{4\,\omega_R}\, a_{RKL}\, Q_K \cos(\vartheta_L - \vartheta_K - \vartheta_R) , \end{aligned}\right\} \tag{48.2}$$

$$\dot{Q}_k = Q_k\,\dot{\vartheta}_k = 0 \quad \text{für} \quad k \neq K,\ R \qquad (k = 1, \ldots, m) .$$

Auch hier gibt es wieder Partikularlösungen ϑ_K, ϑ_R, $\vartheta_L = \text{const}$, die wir allein verfolgen. Sie müssen wegen (48.2) in der Beziehung $\vartheta_L - \vartheta_K - \vartheta_R = \pi/2 + N\pi$ miteinander stehen. Dann folgt aus (48.1) durch Elimination von Q_R

$$\ddot{Q}_K = \frac{a_{KRL}^2}{16\,\omega_K\,\omega_R}\, Q_K ,$$

und genau dieselbe Gleichung erhält man für Q_R. Folglich ist

$$\left.\begin{aligned} Q_K &= Q_{K0} \\ Q_R &= Q_{R0} \end{aligned}\right\} \cdot e^{\pm \frac{a_{KRL}}{4\sqrt{\omega_K\,\omega_R}}\, t} , \qquad \begin{aligned} &Q_{K0},\ Q_{R0} = \text{const} , \\ &Q_k = \text{const} \quad \text{für} \quad k \neq K, R . \end{aligned} \tag{49}$$

Bei Beschränkung auf die anwachsenden Lösungen mit positiven Exponenten der e-Funktionen kann man daher folgern:

Wenn nach (47) eine Längseigenfrequenz ω_L mit der Summe zweier Quereigenfrequenzen ω_K und ω_R zusammenfällt, so ist die Längsbewegung instabil derart, daß nach einem beliebig kleinen quergerichteten Anstoß die K-te und die R-te Quereigenschwingung nach (38), (49) in der Form

$$q_K = Q_{K0}\, e^{\frac{|a_{KRL}|}{4\sqrt{\omega_K\,\omega_R}}\, t} \sin(\omega_K t + \vartheta_K) , \qquad q_R = Q_{R0}\, e^{\frac{|a_{KRL}|}{4\sqrt{\omega_K\,\omega_R}}\, t} \sin(\omega_R t + \vartheta_R)$$

gleichzeitig angefacht werden, während die übrigen Querschwingungen ihre kleinen konstanten Amplituden beibehalten. Dieser Fall heißt nach der Terminologie der Theorie erzwungener Schwingungen Instabilität zweiter Art.

Man könnte vermuten, daß weitere Instabilitäten auftreten, wenn eine Beziehung

$$\omega_L = \omega_K - \omega_R \qquad \text{oder} \qquad \omega_L = \omega_R - \omega_K$$

besteht, denn auch dann bleiben aus (42) Differentialgleichungen ähnlich (48) mit langsam veränderlichen rechten Seiten $Q_R \sin(\vartheta_L - \vartheta_K + \vartheta_R)$ usw. stehen. Die weitere Ausrechnung liefert allerdings Gleichungen der Form

$$\ddot{Q}_R + \frac{a_{KRL}^2}{16\,\omega_K\,\omega_R}\, Q_K = 0 ,$$

also keine anwachsende Lösung und keine Instabilität.

Dagegen besteht die Möglichkeit, daß mehr als zwei Quereigenschwingungen angefacht werden, wenn weitere Beziehungen (43) zwischen den Freqzenzen auftreten. Liegt z. B. (47) vor, gleichzeitig aber für zwei weitere Indizes $l = L'$, $r = R'$ eine Beziehung $\omega_{L'} = 2\,\omega_{R'}$ entsprechend (44), so werden, wie man rasch im einzelnen nachrechnet, drei Quereigenschwingungen gleichzeitig angeregt, nämlich diejenigen mit den Nummern K, R und R'. Die verschiedenen Möglichkeiten sollen hier nicht vollständig durchdiskutiert werden; wir begnügen uns mit den Fällen a) und b).

Aus den Rechenergebnissen zum 3. Beispiel ist zu folgern, daß das klassische Bild der linearen Normalschwingungen bei Vorliegen der Abstimmung (44) oder (47) wieder in wesentlichen Zügen verändert ist; die Unabhängigkeit der einzelnen Normalschwingungen und die Konstanz ihrer Amplituden ist teilweise aufgehoben. Die Bedingung (4), unter die ja (44) und (47) gemeinsam fallen, spielt also in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle.

Im erwähnten Sonderfall $m = n - 1$ (eine einzige Längs-Normalschwingung) stimmen die Ergebnisse, nämlich die Bedingungen (44) bzw. (47) für das Eintreten der Instabilität erster Art bzw. zweiter Art sowie die Größe der Exponenten in (46) bzw. (49), mit den zitierten[1] Untersuchungsergebnissen ganz anderer Herkunft überein. Allerdings liefert die jetzt benutzte Näherungstheorie der langsam veränderlichen Amplituden und Phasen nur die wichtigsten Instabilitätsfälle, nämlich (37) für $p = 1$, während ihr die höheren Ordnungen $p > 1$ entgehen. Es ist bemerkenswert, daß auch im allgemeinen Fall beliebig vieler überlagerter Längsschwingungen unsere Ergebnisse unverändert erhalten bleiben. Hier wiederholt sich die Erscheinung, die sich bei dem einfacheren System des 2. Beispiels auf anderem Wege ergab: Die eine Längsschwingung wirkt so, als ob die anderen Längsschwingungen nicht da wären, und bringt allein die auf sie abgestimmten Querschwingungen zum Aufklingen.

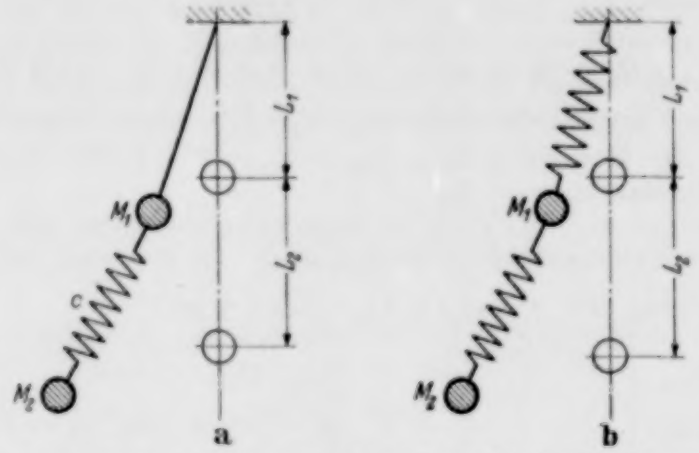


Abb. 7. Versuchsanordnungen: a) teilweise elastisches und b) elastisches Doppelpendel.

Es ist ziemlich leicht, die theoretisch gefundenen Erscheinungen experimentell zu demonstrieren, wobei man sich am einfachsten auf Anordnungen der Form Abb. 7a oder 7b mit zwei Massen beschränkt. Der Weg zu einem solchen Versuch sei für das System Abb. 7a, einem Zweimassenpendel mit einem starren Faden und einer Feder, näher beschrieben. Bezeichnen die leeren Kreise in Abb. 7a wieder die statische Ruhelage der Massen unter Eigengewicht, so sind die beiden Eigenfrequenzen der Querbewegung einfach die Frequenzen des mathematischen Doppelpendels mit den Längen L_1 und L_2, und es ist[2]

$$\left.\begin{matrix}\omega_1^2\\ \omega_2^2\end{matrix}\right\} = \frac{g}{L_2}\frac{1}{2\,\lambda\,\mu}\left[(1+\lambda) \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 - 4\,\lambda\,\mu}\right]$$

mit $\lambda = L_1/L_2$, $\mu = M_1/(M_1 + M_2)$. Für die dritte Eigenfrequenz (der Längsschwingung) gilt

$$\omega_3^2 = c/M_2 = g/y_0 = g\,\zeta/L_2,$$

wenn wir mit y_0 die statische Federverlängerung unter dem Eigengewicht $M_2 g$ bezeichnen und $\zeta = L_2/y_0$ setzen. Die Bedingungen $\omega_3 = 2\,\omega_k$ $(k = 1, 2)$ der Instabilität erster Art führen jetzt auf die Gleichung

$$\lambda = \frac{4\,(\zeta - 4)}{\zeta\,(\mu\,\zeta - 4)},$$

die so zu benutzen ist: Man wählt eine leichte zylindrische Schraubenfeder und zwei wesentlich schwerere Massen, bestimmt die Gewichte $M_1 g$ und $M_2 g$ sowie die Längen y_0 und L_2 durch Wiegen und Abmessen und hat damit die Verhältnisse μ und ζ. Daraus berechnet man λ und bekommt

[1] Fußnote 1 von S. 223.

[2] Vgl. z. B. *Cl. Schäfer*, Einführung in die theoretische Physik, Bd. 1 Nr. 65, 5. Aufl. Berlin 1950.

eine bestimmte Länge $L_1 = \lambda L_2$, die durch einen ungefederten Faden herzustellen ist. Die Bedingung $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ der Instabilität zweiter Art bringt die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 (\zeta \mu - 1)^2 + 2\lambda [1 - \mu (\zeta + 2)] + 1 = 0 ,$$

aus der bei ebenso festgelegtem μ und ζ wieder λ und L_1 bestimmt werden können.

In beiden Fällen war in praktisch ausgeführten Versuchen trotz ziemlich grober Bemessung aller Bestimmungsstücke[1] nach Einleitung einer möglichst genau lotrechten Längsschwingung die zuerst ganz langsame und dann immere raschere Aufschaukelung der Querbewegung unter gleichzeitiger Abnahme der Längsbewegung deutlich und eindrucksvoll zu beobachten, und zwar im erstgenannten Fall die Anfachung der Grundschwingung allein, im zweiten Fall der Grund- und Oberschwingung gemeinsam mit sichtbar unregelmäßiger Gesamtbewegung. Ebenso leicht kann man zeigen, daß bei einer Verstimmung des Systems, z. B. durch Veränderung der Länge L_1, die Längsschwingung sogleich stabil wird. Die Bedeutung dieses Versuchs liegt nicht nur in der Vorführung solcher Instabilitäten der Längsschwingungen elastischer Pendel; vielmehr ist er in weiterer Sicht als die wohl einfachste experimentelle Demonstration der Instabilität zweiter Art schlechthin anzusehen, die ja in der Theorie erzwungener Schwingungen eine wichtige Rolle spielt[2], aber der Anschauung schwer zugänglich ist. Eine Anordnung nach Abb. 7b kann man in ähnlicher Weise zu instabilen Längsschwingungen bringen, was aber nicht mehr in Einzelheiten angegeben sei. Man beobachtet bei solchen Versuchen tatsächlich, daß eine zweite Längs-Normalschwingung die erste keineswegs daran hindert, instabil in eine Querschwingung überzugehen. Voraussetzung dazu ist lediglich die richtige Abstimmung der Frequenzen.

Zum Schluß fügen wir eine kurze Bemerkung über technische Anwendungen an. Grundsätzlich können die in vorliegender Arbeit angestellten Überlegungen überall da von Bedeutung werden, wo ein mechanisches System Eigenschwingungen ausführt, insbesondere dort, wo an einem schwingungsfähigen System nicht periodische Erregerkräfte, sondern einzelne Impulse in unregelmäßigen Abständen angreifen, die zu einer Folge von Eigenschwingungen führen. Auf zwei Beispiele sei hingewiesen. Eine Schachtförderanlage (Abb. 8) besteht aus einigen geführten Einzelmassen, nämlich der Treibscheibe, den Seilscheiben und den Förderkörben, und dazwischen liegenden

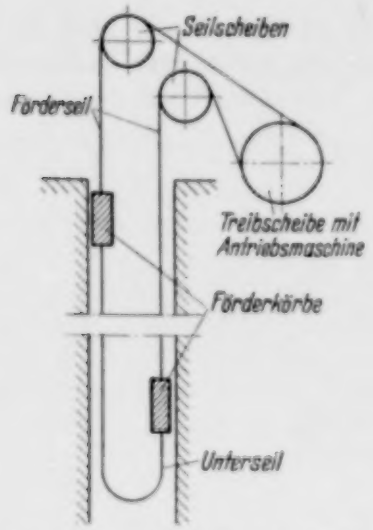


Abb. 8. Schema einer Schachtförderanlage.

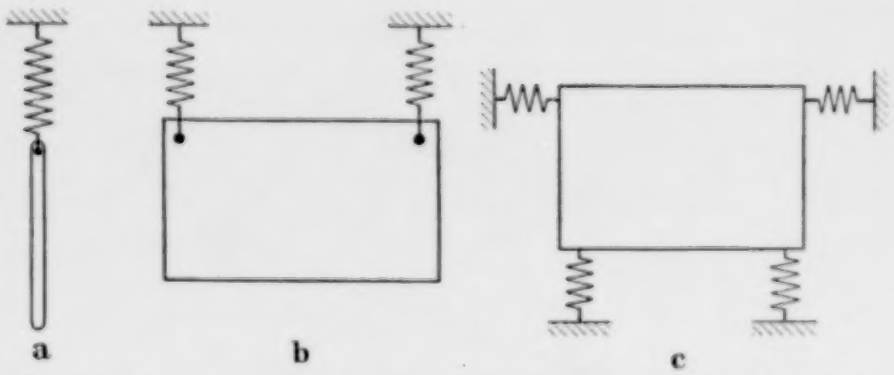


Abb. 9. Zur Verwandtschaft des teilweise elastischen Doppelpendels (a) mit einem federnd gelagerten Maschinenfundament (c).

elastischen Seilstücken des Ober- und Unterseils. Ersetzt man die kontinuierlichen Seile näherungsweise durch eine Anzahl von Einzelmassen mit zwischengeschalteten masselosen Federn, so liegt eine Schwingungskette vor, von der einzelne Teile, nämlich die Seile, zu Querschwingungen befähigt sind. Die Längsschwingungen der Kette hat man schon lange beobachtet und theoretisch studiert[3],

[1] Da es sich bei solchen Versuchen stets um ganze Instabilitätsbereiche handelt, in denen das Phänomen auftritt (vgl. Abb. 5), genügt eine recht geringe Genauigkeit bei der Herstellung der Modelle.

[2] *E. Mettler*, Fußnote 1 von S. 223 und IX^e Congr. Intern. de Mec. appl. Actes t. V, Brüssel 1957, S. 5.

[3] *E. Mettler* und *S. Bär*, Glückauf 85 (1949) S. 849. *E. Mettler*, Theorie der Schwingungsdämpfer in Schachtförderanlagen. Entwicklungsarbeiten der Gutehoffnungshütte Werk Sterkrade, Reihe Bergbau H. 8 (1950). Dort weitere Literatur.

die Querschwingungen der Seile jedoch, die mitunter recht lästig werden können, bisher nicht näher analysiert. Es erscheint nun durchaus möglich, daß der Ursprung der letzteren wenigstens zu einem gewissen Teil in den Längsbewegungen zu suchen ist, die von den an der Fördermaschine eingeleiteten Antriebs- und Bremskräften primär angeregt werden und dann durch Instabilität in Querbewegungen umschlagen. Darüber soll an anderer Stelle berichtet werden. Ein zweites Beispiel ist in Abb. 9 angedeutet. Ein teilweise elastisches Doppelpendel (Abb. 9a) läßt sich zum Fall des an zwei Federn aufgehängten starren Körpers erweitern (Abb. 9b), der seinerseits durch Umdrehen um 180° und Zufügung von waagerechten Stützfedern zum federnd gelagerten starren Körper, etwa einem Maschinenfundament (Abb. 9c) wird. Bei geeigneter Anordnung von Schwerpunkt und Federn sind rein lotrechte Schwingungen möglich. Aber auch hier muß man, falls bestimmte Frequenzabstimmungen auftreten, mit Instabilität und unerwünschten seitlichen Schwingungen und Drehschwingungen rechnen, wie die Verwandtschaft mit dem Doppelpendel anschaulich zeigt.

(Eingegangen am 16. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *E. Mettler*, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12.

Über allgemeine Eigenschaften der Schwingungszahlen linear-elastischer Systeme

Von **H. Neuber**

1. Einführung und Übersicht. Bei allgemeiner Untersuchung der linear-elastischen Drehschwingungen gelangte der Verfasser zu Gesetzmäßigkeiten, welche die Berechnung oberer und unterer Frequenzschranken ermöglichten[1]. In vorliegender Arbeit wird eine allgemeine Synthese der linearelastischen Punktmassensysteme durchgeführt und gezeigt, daß die für Drehschwingungen gefundenen Gesetze allgemein für alle linearelastischen Punktmassensysteme gelten, einschließlich der Kontinua.

Der grundlegende Gedanke besteht darin, daß anstelle der Verschiebungen die inneren Kräfte als Unbekannte eingeführt werden. Die zur Errechnung der Eigenfrequenzen dienende Determinante wird so wesentlich einfacher und übersichtlicher. Die Federkonstanten treten nur noch in den Diagonalfeldern und dort nur im Nenner des Frequenzquadrates auf, während alle übrigen Glieder lediglich die Kehrwerte der Punktmassen enthalten. Durch diesen vereinfachten Aufbau der Determinante lassen sich in Verbindung mit Regeln der Algebra[2] allgemeine Gesetze für die Eigenfrequenzen linear-elastischer Systeme aufstellen. U. a. gelten folgende Gesetze:

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\bar{\omega}_\lambda^2}, \qquad \sum_{\lambda} \omega_\lambda^2 = \sum_{\lambda} \bar{\omega}_\lambda^2 . \tag{1}$$

Hierbei sind ω_λ die Eigenfrequenzen des Systems, während $\bar{\omega}_\lambda$ die Eigenfrequenzen der Ersatzsysteme kennzeichnen, die sich durch Erstarrung aller Federn bis auf die jeweils für das Zustandekommen des Schwingungsvorganges mindest erforderlichen Federn bilden lassen; andererseits sind $\bar{\bar{\omega}}_\lambda$ die Eigenfrequenzen jener Zweimassensysteme, die durch Herauslösen aller Federn bis auf jeweils eine entstehen.

2. Das Gleichgewicht der inneren Kräfte beim räumlichen Punktmassensystem mit linear-elastischen Verbindungselementen. Die Punktmassen seien mit m_1, m_2, m_3 allgemein m_k, die Federkonstanten der Verbindungselemente mit $c_{12} = c_{21}$ für die Feder zwischen den Massen m_1 und m_2,

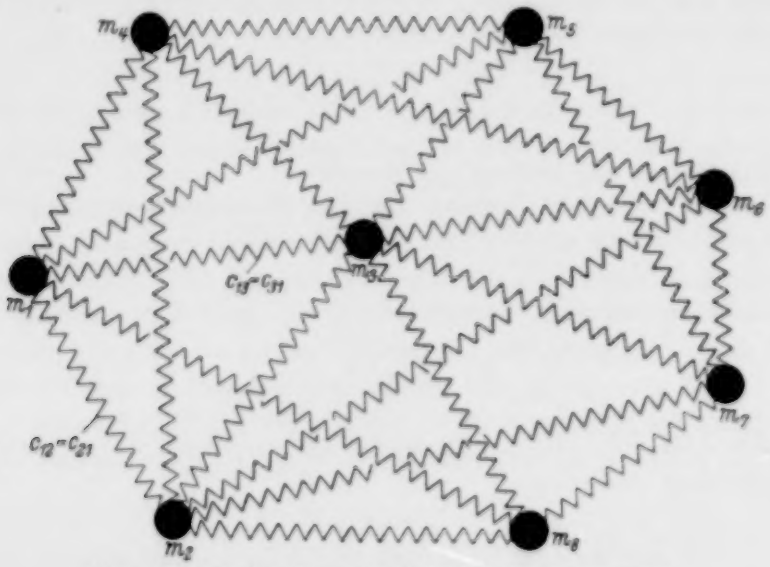


Abb. 1. Beispiel eines linear-elastischen Punktmassensystems

mit $c_{13} = c_{31}$ für die Feder zwischen den Massen m_1 und m_3 usf. bezeichnet (Abb. 1). Allgemein ist $c_{kl} = c_{lk}$ die Konstante der Feder zwischen den Massen m_k und m_l. Ferner sei allgemein $P_{kl} = P_{lk}$ die Kraft, welche in der Feder (Verbindungselement) zwischen den Massen m_k und m_l übertragen

[1] *H. Neuber*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 258—267.

[2] Hierbei wird auf die Theorie der Eigenwertprobleme Bezug genommen, insbesondere auf: *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., III, 12.

wird. Durch Betrachtung des Gleichgewichts an einer herausgeschnittenen Masse (m_k) folgt in bezug auf die Richtung zur benachbarten Masse m_l (Abb. 2):

$$\sum_p P_{kp} \cos \alpha_{lkp} = m_k \ddot{V}_{k,l} . \tag{3}$$

Hierin ist der Winkel zwischen der von der Masse m_k zur Masse m_l führenden Richtung und der von der Masse m_k zur Masse m_p führenden Richtung mit $\alpha_{lkp} = -\alpha_{pkl}$ bezeichnet. Die Verschiebung der Masse m_k in Richtung zur Masse m_l ist mit $V_{k,l}$ bezeichnet. $\ddot{V}_{k,l}$ repräsentiert die

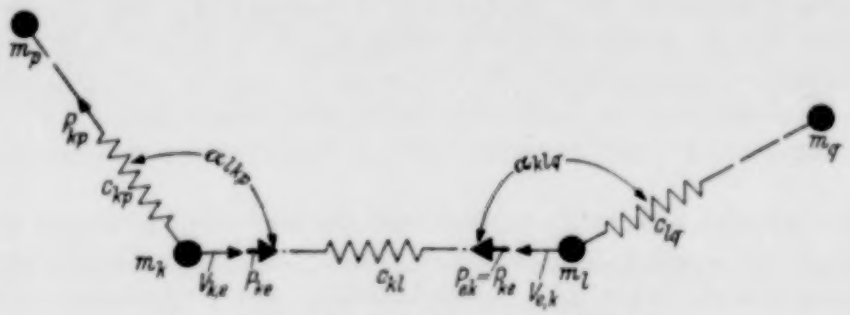


Abb. 2. Kräftespiel an zwei benachbarten Punktmassen.

Beschleunigung der Masse m_k in Richtung zur Masse m_l usw. Die Verschiebungen werden als klein gegenüber den ursprünglichen Abmessungen des Systems angesehen, sodaß die Gleichgewichtsbedingungen am undeformierten System formuliert werden dürfen.

Aus Gl. (3) folgt:

$$\frac{1}{m_k} \sum_p P_{kp} \cos \alpha_{lkp} = \ddot{V}_{k,l} . \tag{4}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\binom{lp}{k} = \frac{\cos \alpha_{lkp}}{m_k} , \qquad \text{also} \qquad \binom{ll}{k} = \frac{1}{m_k} , \tag{5}$$

so geht Gl. (4) in die kürzere Form

$$\sum_p P_{kp} \binom{lp}{k} = \ddot{V}_{k,l} \tag{6}$$

über. Sinngemäß stellt weiterhin $V_{l,k}$ die Verschiebung der Masse m_l in Richtung zur Masse m_k dar, sodaß die zu Gl. (6) analoge Beziehung lautet:

$$\sum_q P_{lq} \binom{kq}{l} = \ddot{V}_{l,k} . \tag{7}$$

Infolge der linearen Elastizität der Federn gilt ferner:

$$\frac{1}{c_{kl}} P_{kl} = - V_{k,l} - V_{l,k} , \tag{8}$$

bzw. nach zweimaliger Differentiation

$$\frac{1}{c_{kl}} \ddot{P}_{kl} = - \ddot{V}_{k,l} - \ddot{V}_{l,k} . \tag{9}$$

Durch Addition der Gln. (6), (7) u. (9) ergibt sich schließlich folgende lineare Differential-Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$\sum_p P_{kp} \binom{lp}{k} + \sum_q P_{lq} \binom{kq}{l} + \frac{1}{c_{kl}} \ddot{P}_{kl} = 0 . \tag{10}$$

Diese Gleichung repräsentiert offenbar die allgemeine Schwingungsgleichung des linear-elastischen Punktmassensystems. Sie läßt sich auch als reine Differenzengleichung schreiben, wenn von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß — infolge des Nichtvorhandenseins von Dämpfungseffekten — nur die nullten und zweiten Ableitungen der Unbekannten auftreten und daher die Zeitabhängigkeit durch den gemeinsamen Faktor $\sin(\omega t)$ erfaßt werden kann (ω Eigenfrequenz, t Zeit); demnach gilt

$$\ddot{P}_{kl} = - \omega^2 P_{kl} . \tag{11}$$

Damit geht die Hauptgleichung (10) in die folgende lineare Differenzgleichung über:

$$\sum_p P_{kp}\binom{lp}{k} + \sum_q P_{lq}\binom{kq}{l} - \frac{\omega^2}{c_{kl}} P_{kl} = 0\,. \tag{12}$$

Zur weiteren rechnerischen Behandlung ist es zweckmäßig, zunächst einmal die auftretenden Koeffizienten näher zu untersuchen. In der nachstehenden Tabelle sind nacheinander mit Bezug auf die ersten 4 Massen m_1, m_2, m_3, m_4 die Koeffizienten der zugehörigen Kräfte $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{24}, P_{34}$ ersichtlich.

$k\,l$	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{23}	P_{24}	P_{34}
12	$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{\omega^2}{c_{12}}$	$\binom{23}{1}$	$\binom{24}{1}$	$\binom{13}{2}$	$\binom{14}{2}$	0
13	$\binom{32}{1}$	$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}-\frac{\omega^2}{c_{13}}$	$\binom{34}{1}$	$\binom{12}{3}$	0	$\binom{14}{3}$
14	$\binom{42}{1}$	$\binom{43}{1}$	$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_4}-\frac{\omega^2}{c_{14}}$	0	$\binom{12}{4}$	$\binom{13}{4}$
23	$\binom{31}{2}$	$\binom{21}{3}$	0	$\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}-\frac{\omega^2}{c_{23}}$	$\binom{34}{2}$	$\binom{24}{3}$
24	$\binom{41}{2}$	0	$\binom{21}{4}$	$\binom{43}{2}$	$\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_4}-\frac{\omega^2}{c_{24}}$	$\binom{23}{4}$
34	0	$\binom{41}{3}$	$\binom{31}{4}$	$\binom{42}{3}$	$\binom{32}{4}$	$\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}-\frac{\omega^2}{c_{34}}$

(13)

Wegen $\cos\alpha_{lkp} = \cos\alpha_{pkl}$ gilt auch

$$\binom{lp}{k} = \binom{pl}{k}. \tag{14}$$

Infolgedessen ist die Matrix der Koeffizienten symmetrisch. Daraus folgt, daß sämtliche Eigenfrequenzen reell[1] sind. Ferner erkennt man, daß die Federkonstanten nur in den Diagonalfeldern und nur im Nenner des Frequenzquadrates auftreten. Diese Tatsache führt zu wichtigen allgemeinen Folgerungen, insbesondere zu einer vollständigen mechanischen Deutung der Koeffizienten, welche in der Gleichung für das Frequenzquadrat auftreten.

3. Der Aufbau der Frequenzdeterminante und ihre Ausrechnung. Zur Durchführung der weiteren Gedankengänge empfiehlt sich eine nochmalige Vereinfachung des Gleichungssystems. Im Hinblick auf die Tatsache, daß Gl. (12) für jedes Verbindungselement angeschrieben werden muß, also genau so viele Gleichungen liefert, als Verbindungselemente vorhanden sind, erscheint es zweckmäßig, die Verbindungselemente zu nummerieren, und zwar von 1 bis v. Sind c_λ die Federkonstanten und P_λ die in den Verbindungselementen übertragenen Kräfte, wobei der Index λ von 1 bis v läuft, sind ferner $a_{\lambda\mu}$ die Koeffizienten in den aus (12) hervorgehenden Gleichungen, jedoch ohne die Glieder mit ω^2, so gilt infolge der Symmetrie ($\mu = 1, 2, \ldots, v$)

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda} \tag{15}$$

und die Gln. (12) gehen allgemein über in die Form:

$$\sum_{\mu=1}^{v}\left(a_{\lambda\mu} - \frac{\omega^2}{c_\lambda}\delta_{\lambda\mu}\right) P_\mu = 0 \qquad \text{für} \quad \lambda = 1, 2 \ldots 0\,. \tag{16}$$

Hierbei ist

$$\delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \mu\,, \\ 0 & \text{für } \lambda \neq \mu \end{cases} \tag{17}$$

das Kroneckersche Symbol.

[1] Vgl. Fußnote 2 auf Seite 229

Die Determinante der Koeffizienten nimmt jetzt folgende übersichtlichere Form an:

λ \ μ	1	2	3	4	5	6	
1	$a_{11} - \frac{\omega^2}{c_1}$	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	...
2	a_{21}	$a_{22} - \frac{\omega^2}{c_2}$	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	...
3	a_{31}	a_{32}	$a_{33} - \frac{\omega^2}{c_3}$	a_{34}	a_{35}	a_{36}	...
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	$a_{44} - \frac{\omega^2}{c_4}$	a_{45}	a_{46}	...
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	$a_{55} - \frac{\omega^2}{c_5}$	a_{56}	...
6	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	$a_{66} - \frac{\omega^2}{c_6}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

(18)

Bei der Ausrechnung dieser Determinante erhält man eine Gleichung vom ν-ten Grade für das Frequenzquadrat, die sich sowohl mit steigenden, als auch mit fallenden Potenzen schreiben läßt. Bei den Koeffizienten der einzelnen Glieder treten entweder die eine oder die andere Art der folgenden Teildeterminanten auf.

Zunächst sei die Determinante bei Verschwinden aller Glieder mit ω^2 (d. h. jene für das völlig erstarrte System mit $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = \infty$) mit $\bar{D}$ bezeichnet, also

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} . \tag{19}$$

Unter Weglassung der Reihe und Spalte λ möge die Determinante in $\bar{D}_\lambda$ übergehen, z. B.

$$\bar{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} . \tag{20}$$

Unter Weglassung der Reihen und Spalten λ und μ möge die Determinante in $\bar{D}_{\lambda\mu}$, wobei $\mu \neq \lambda$ vorausgesetzt sei, übergehen, z. B.

$$\bar{D}_{24} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{16} & \cdots \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} & a_{36} & \cdots \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} & a_{56} & \cdots \\ a_{61} & a_{63} & a_{65} & a_{66} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} . \tag{21}$$

Allgemein soll $\bar{D}_{\lambda\mu\nu}\ldots$ den Wert der Determinante $\bar{D}$ bei Weglassung der Reihen und Spalten $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ bedeuten, wobei $\mu \neq \lambda$, $\nu \neq \mu$, $\nu \neq \lambda$ usw. vorausgesetzt wird

Andererseits sei D_λ der Wert von $\bar{D}$, wenn alle Reihen und Spalten mit Ausnahme jener mit der Nummer λ weggelassen werden, also

$$D_\lambda = a_{\lambda\lambda} . \tag{22}$$

Werden alle Reihen und Spalten weggelassen mit der Ausnahme jener mit den Nummern λ und μ, so geht $\bar{D}$ über in

$$D_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} a_{\lambda\lambda} & a_{\lambda\mu} \\ a_{\mu\lambda} & a_{\mu\mu} \end{vmatrix} \qquad (\lambda \neq \mu)\,. \tag{23}$$

Werden alle Reihen und Spalten weggelassen mit der Ausnahme jener mit den Nummern λ, μ, ν, so geht $\bar{D}$ über in

$$D_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{\lambda\lambda} & a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\nu} \\ a_{\mu\lambda} & a_{\mu\mu} & a_{\mu\nu} \\ a_{\nu\lambda} & a_{\nu\mu} & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad (\lambda \neq \mu,\ \mu \neq \nu,\ \nu \neq \lambda)\,. \tag{24}$$

Allgemein sei $D_{\lambda\mu\nu\ldots}$ der Wert von $\bar{D}$ bei Weglassung aller Reihen und Spalten außer jenen mit den Nummern $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ mit $\mu \neq \lambda$, $\nu \neq \mu$, $\nu \neq \lambda$ usw.

Alle diese Determinanten sind positiv[1].

Wird nunmehr die ursprüngliche Determinante (18) in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ω^2 entwickelt, so erhält man unter Verwendung der in den Gln. (19), (20) und (21) eingeführten Teildeterminanten:

$$\bar{D} - \omega^2 \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{\bar{D}_\lambda}{c_\lambda} + \omega^4 \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda\, c_\mu} D_{\lambda\mu} - + \cdots = 0\,. \tag{25}$$

Wird die Determinante (18) andererseits in eine Reihe nach fallenden Potenzen von ω^2 entwickelt, so ergibt sich unter Verwendung der in den Gln. (22), (23) und (24) eingeführten Teildeterminanten nach Multiplikation mit $c_1\, c_2\, c_3 \ldots\ldots c_\nu$:

$$\omega^{2\nu} - \omega^{2\nu-2} \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda\, D_\lambda + \omega^4 \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} c_\lambda\, c_\mu\, D_{\lambda\mu} - + \cdots = 0\,. \tag{26}$$

Werden die Wurzeln der Frequenzgleichung, also die Eigenfrequenzen des Systems, mit $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_\nu$ gekennzeichnet, so läßt sich die Gleichung ν-ten Grades für ω^2 auch in Produktform schreiben, und zwar entweder unter Benutzung der Kehrwerte der Frequenzquadrate:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right) \cdots \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_\nu^2}\right) = 0\,, \tag{27}$$

oder der Frequenzquadrate selbst:

$$(\omega^2 - \omega_1^2)\,(\omega^2 - \omega_2^2) \ldots (\omega^2 - \omega_\nu^2) = 0\,. \tag{28}$$

Der Vergleich der Koeffizienten in der durch $\bar{D}\,\omega^{2\nu}$ dividierten Gl. (25) und in Gl. (27) liefert:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \frac{1}{\bar{D}} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda} \bar{D}_\lambda\,, \qquad \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2\, \omega_\mu^2} = \frac{1}{\bar{D}} \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda\, c_\mu} \bar{D}_{\lambda\mu}\,, \\ &\sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2\, \omega_\mu^2\, \omega_\nu^2} = \sum_{\lambda}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda\, c_\mu\, c_\nu} D_{\lambda\mu\nu} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Andererseits liefert der Vergleich der Koeffizienten in Gl. (26) und (28):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{\nu} \omega_\lambda^2 = \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda\, D_\lambda\,, \qquad \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \omega_\lambda^2\, \omega_\mu^2 = \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} c_\lambda\, c_\mu\, D_{\lambda\mu}\,, \\ &\sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \omega_\eta^2\, \omega_\mu^2\, \omega_\nu^2 = \sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} c_\lambda\, c_\mu\, c_\nu\, D_{\lambda\mu\nu} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

4. Einführung der Ersatzsysteme und Berechnung ihrer Eigenfrequenzen. Zur mechanischen Deutung der rechten Seiten der Gln. (29) und (30) betrachten wir nunmehr die folgenden zwei Arten von Ersatzsystemen. Die erste Art geht aus dem ursprünglichen System durch Erstarrung einzelner Federn, die zweite Art durch Herauslösen einzelner Federn hervor. Zum Unterschied von den wirklichen Eigenfrequenzen des Systems werden die Eigenfrequenzen der Ersatzsysteme erster Art durch einen oberen Querstrich ($\overline{\omega}_\lambda$) und jene der Ersatzsysteme zweiter Art durch zwei obere Querstriche ($\overline{\overline{\omega}}_\lambda$) gekennzeichnet.

Erstarren alle Federn bis auf jeweils eine (mit der Federkonstanten c_λ), so bleiben in der Frequenzgleichung (25) höchstens die ersten beiden Summanden von Null verschieden. Der dritte Summand (mit ω^4) verschwindet bereits mit Sicherheit, da von den beiden im Nenner stehenden,

[1] Vgl. Fussnote 2 S. 229, ferner *Biezeno-Grammel*, Ing.-Arch. 8 (1937) S. 364.

zu verschiedenen Federn gehörenden Konstanten c_λ und c_μ mindestens eine unendlich wird. Ebenso verschwindet das Glied mit ω^6 und alle weiteren Glieder. Die Frequenzgleichung hat also nur eine Wurzel, welche mit $\bar{\omega}_\lambda$ bezeichnet sei. Es folgt aus der entsprechend verstümmelten Gl. (25):

$$\frac{1}{\bar{\omega}_\lambda^2} = \frac{1}{\bar{D}\, c_\lambda}\, \bar{D}_\lambda . \tag{31}$$

Erstarren alle Federn bis auf zwei (mit den Federkonstanten c_λ und c_μ), so bleiben in der Frequenzgleichung (25) höchstens die ersten drei Glieder von Null verschieden. Der vierte Summand (mit ω^6) verschwindet bereits mit Sicherheit, da im Nenner drei verschiedene Federkonstanten auftreten, von denen mindestens eine unendlich wird. Ebenso verschwinden alle weiteren Glieder. Die so verstümmelte Gl. (25) ist dann vom zweiten Grade in ω^2. Werden ihre beiden Wurzeln, welche die Eigenfrequenzen der durch Erstarrung aller Federn bis auf zwei gewonnenen Ersatzsysteme darstellen, mit $\bar{\omega}_{\lambda\mu,1}$ und $\bar{\omega}_{\lambda\mu,2}$ bezeichnet, so ergibt sich für den Kehrwert des Produktes ihrer Quadrate:

$$\frac{1}{\bar{\omega}_{\lambda\mu,1}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu,2}^2} = \frac{1}{\bar{D}\, c_\lambda\, c_\mu}\, \bar{D}_{\lambda\mu} . \tag{32}$$

Erstarren alle Federn bis auf drei (Federkonstanten c_λ, c_μ, c_ν), so verschwindet in Gl. (25) mit Sicherheit das Glied mit ω^8 und alle weiteren Glieder, da dort jeweils mindestens eine Federkonstante im Nenner unendlich wird; es folgt eine Gleichung dritten Grades mit den drei Wurzeln $\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1}$, $\omega_{\lambda\mu\nu,2}$, $\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,3}$; sie repräsentieren die Eigenfrequenzen des so gewonnenen Ersatzsystems. Für den Kehrwert des Produktes ihrer Quadrate folgt:

$$\frac{1}{\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,2}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,3}^2} = \frac{1}{\bar{D}\, c_\lambda\, c_\mu\, c_\nu}\, \bar{D}_{\lambda\mu\nu} . \tag{33}$$

Ebenso lassen sich die Frequenzen aller weiteren Ersatzsysteme erster Art rechnerisch verfolgen.

Werden andererseits alle Federn herausgelöst bis auf eine mit der Federkonstanten c_λ, so entsteht das einfachste Ersatzsystem zweiter Art. Zur Berechnung der zugehörigen Eigenfrequenz betrachten wir Gl. (26). Es verschwindet hier offenbar mit Sicherheit das dritte und jedes weitere Glied, da jeweils mindestens eine der als Faktor auftretenden Federkonstanten gleich Null wird. Die so verstümmelte Gleichung liefert für das Quadrat der zugehörigen Eigenfrequenz $\bar{\bar{\omega}}_\lambda$ den Ausdruck:

$$\bar{\bar{\omega}}_\lambda^2 = c_\lambda\, D_\lambda . \tag{34}$$

Alle übrigen Frequenzen werden Null.

Werden alle Federkonstanten Null gesetzt bis auf zwei (z. B. c_λ und c_μ), so verschwindet in Gl. (26) mit Sicherheit das vierte und jedes weitere Glied, da dort jeweils mindestens eine der als Faktor auftretenden Federkonstanten Null zu setzen ist. Die Frequenzgleichung (26) geht in eine Gleichung zweiten Grades über mit den beiden Wurzeln $\bar{\omega}_{\lambda\mu,1}$ und $\bar{\omega}_{\lambda\mu,2}$, welche die beiden von Null verschiedenen Eigenfrequenzen dieses Ersatzsystems repräsentieren. Für das Produkt ihrer Quadrate folgt:

$$\bar{\omega}_{\lambda\mu,1}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu,2}^2 = c_\lambda\, c_\mu\, D_{\lambda\mu} . \tag{35}$$

Bei Nullsetzen aller Federkonstanten bis auf drei (z. B. c_λ, c_μ, c_ν) verschwindet das fünfte und jedes weitere Glied wegen mindestens einer als Faktor auftretenden und verschwindenden Federkonstante. Aus der entstehenden Gleichung dritten Grades ergibt sich für das Produkt der Quadrate der drei Wurzeln $\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1}$, $\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,2}$, $\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,3}$, welche die Eigenfrequenzen dieses Systems darstellen:

$$\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,2}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,3}^2 = c_\lambda\, c_\mu\, c_\nu\, D_{\lambda\mu\nu} . \tag{36}$$

Ebenso können die Eigenfrequenzen aller weiteren Ersatzsysteme zweiter Art berechnet werden.

5. Gesetze für den Zusammenhang der Eigenfrequenzen des Systems mit jenen der Ersatzsysteme. Werden nunmehr die Gln. (29) mit den Gln. (31) bis (33) verglichen, so ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Eigenfrequenzen des Hauptsystems und jenen der Ersatzsysteme erster Art:

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\bar{\omega}_\lambda^2} , \tag{37}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2\, \omega_\mu^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{\bar{\omega}_{\lambda\mu,1}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu,2}^2} , \tag{38}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2\, \omega_\mu^2\, \omega_\nu^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,2}^2\, \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,3}^2} , \quad \text{usw.} \tag{39}$$

Andererseits liefert der Vergleich der Gln. (30) mit den Gln. (34) bis (36) folgende Beziehungen zwischen den Eigenfrequenzen des Hauptsystems und jenen der Ersatzsysteme zweiter Art:

$$\sum_{\lambda=1}^{v} \omega_\lambda^2 = \sum_{\lambda=1}^{v} \overline{\omega}_\lambda^2 , \tag{40}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{v-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{v} \omega_\lambda^2 \omega_\mu^2 = \sum_{\lambda=1}^{v-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{v} \overline{\omega}_{\lambda\mu,1}^2 \overline{\omega}_{\lambda\mu,2}^2 , \tag{41}$$

$$\sum_{\lambda}^{v-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{v-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{v} \omega_\lambda^2 \omega_\mu^2 \omega_\nu^2 = \sum_{\lambda=1}^{v-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{v-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{v} \overline{\omega}_{\lambda\mu\nu,1}^2 \overline{\omega}_{\lambda\mu\nu,2}^2 \overline{\omega}_{\lambda\mu\nu,3}^2 . \tag{42}$$

Den Beziehungen (37) und (40) kommt besondere Bedeutung zu. Diese gehen z. B. auch bei Aufteilung des Hauptsystems in zwei Ersatzsysteme in Aussagen über den Zusammenhang der Eigenfrequenzen des Hauptsystems mit jenen der beiden Ersatzsysteme über.

6. Zerlegung des Hauptsystems in zwei Teilsysteme. Lassen wir zunächst einen Teil des Hauptsystems erstarren, so ergibt sich das erste Ersatzsystem erster Art (System I), dessen am einen Ende befindliche Masse gleich der Summe der Massen des erstarrten Teiles zu setzen ist, während beim zugehörigen zweiten Ersatzsystem erster Art (System II) alle bisher elastischen Verbindungen erstarren und alle bisher starren wieder elastisch sind. Sind insgesamt v Federn vorhanden und enthält System I w Federn, so läßt sich Gl. (37) auch auf System I allein und die aus ihm herstellbaren Teilsysteme mit nur je einer nichtstarren Feder anwenden; werden die Eigenfrequenzen von System I mit $\omega_{1\lambda}$ und die seiner Teilsysteme (mit nur jeweils einer nicht-starren Feder) mit $\overline{\omega}_\lambda$ (mit $\lambda = 1, 2 \ldots w$) bezeichnet, so folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{w} \frac{1}{\omega_{1\lambda}^2} = \sum_{\lambda=1}^{w} \frac{1}{\overline{\omega}_\lambda^2} . \tag{43}$$

Die gleiche Überlegung liefert für System II:

$$\sum_{\lambda=1}^{v-w} \frac{1}{\omega_{11\lambda}^2} = \sum_{\lambda=w+1}^{v} \frac{1}{\overline{\omega}_\lambda^2} . \tag{44}$$

Werden beide Gleichungen addiert, so erscheint auf der rechten Seite offenbar die Summe der Kehrwerte der Frequenzquadrate aller Systeme erster Art mit nur einer nicht-starren Feder, die sich aus dem Hauptsystem herstellen lassen, d. h. die ursprüngliche rechte Seite von Gl. (37) für das Hauptsystem, welche gleich der Summe der Kehrwerte der wirklichen Frequenzquadrate ist. Mithin folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{v} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum_{\lambda=1}^{w} \frac{1}{\omega_{1\lambda}^2} + \sum_{\lambda=1}^{v-w} \frac{1}{\omega_{11\lambda}^2} . \tag{45}$$

Auf diese Weise wurde offenbar eine Beziehung zwischen den Eigenfrequenzen des Systems und jenen von nur zwei Teilsystemen gewonnen.

Lösen wir andererseits s Federn, so verbleibt ein Restsystem mit $v - s$ Federn (III). Das zugehörige Ergänzungssystem entsteht, wenn die bei III gelösten Federn wieder eingesetzt, aber alle übrigen Federn gelöst werden (System IV). Wenden wir auf beide Systeme Gl. (40) separat an, so folgen:

$$\sum_{\lambda=1}^{v-s} \omega_{\mathrm{III}\lambda}^2 = \sum_{\lambda=1}^{v-s} \overline{\omega}_\lambda^2 , \tag{46}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \omega_{\mathrm{IV}\lambda}^2 = \sum_{\lambda=v-s+1}^{v} \overline{\omega}_\lambda^2 . \tag{47}$$

Werden beide Gleichungen addiert, so erscheint auf der rechten Seite offenbar die Summe der Frequenzquadrate aller Zweimassensysteme zweiter Art, welche sich aus dem Hauptsystem bilden lassen. Diese Summe ist aber nach der ursprünglichen Gl. (40) gleich der Summe der wirklichen Frequenzquadrate. Mithin folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{v} \omega_\lambda^2 = \sum_{\lambda=1}^{v-s} \omega_{\mathrm{III}\lambda}^2 + \sum_{\lambda=1}^{s} \omega_{\mathrm{IV}\lambda}^2 . \tag{48}$$

Auch diese Gleichung stellt — ebenso wie Gl. (45) eine Beziehung zwischen den Eigenfrequenzen des Systems und jenen von nur zwei Teilsystemen dar.

7. Aufstellung von Schrankenwerten für die Eigenfrequenzen. Aus den Gleichungen (37) und (40) lassen sich Schrankenwerte für die niedrigste und höchste Eigenfrequenz errechnen. Ist ω_1^* eine untere Schranke für die niedrigste Eigenfrequenz und ω_v^* eine obere Schranke für die

höchste Eigenfrequenz, so ergibt sich unmittelbar:

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \frac{1}{\omega_1^{*2}} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\bar{\omega}_1^2} > \frac{1}{\omega_1^2}, \tag{49}$$

$$\sum_{\lambda} \omega_\lambda^2 = \omega_\nu^{*2} = \sum_{\lambda} \bar{\omega}_\lambda^2 > \omega_\nu^2 \tag{50}$$

Definiert man auch für die im vorigen Abschnitt eingeführten Teilsysteme solche Schrankenwerte, so gilt:

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{I}\,1}^{*2}} = \sum_{\lambda=1}^{w} \frac{1}{\omega_{\mathrm{I}\,\lambda}^2} > \frac{1}{\omega_{\mathrm{I}\,1}^2}; \qquad \frac{1}{\omega_{\mathrm{II}\,1}^{*2}} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-w} \frac{1}{\omega_{\mathrm{II}\,\lambda}^2} > \frac{1}{\omega_{\mathrm{II}\,1}^2}, \tag{51}$$

$$\omega_{\mathrm{III},\nu-s}^{*2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-s} \omega_{\mathrm{III}\,\lambda}^2 > \omega_{\mathrm{III},\nu-s}^2; \qquad \omega_{\mathrm{IV},s}^{*2} = \sum_{\lambda=1}^{s} \omega_{\mathrm{IV}\,\lambda}^2 > \omega_{\mathrm{IV},s}^2. \tag{52}$$

Durch Einsetzen in die Gln. (45) und (48) erhält man (in Verbindung mit den Gln. (49), (50), (37) u. (40):

$$\frac{1}{\omega_1^{*2}} = \frac{1}{\omega_{\mathrm{I}\,1}^{*2}} + \frac{1}{\omega_{\mathrm{II}\,1}^{*2}}, \tag{53}$$

$$\omega_\nu^{*2} = \omega_{\mathrm{III},\nu-s}^{*2} + \omega_{\mathrm{IV},s}^{*2}. \tag{54}$$

8. Besonderheiten bei Systemen mit statisch unbestimmtem Aufbau. Bei Systemen mit statisch unbestimmtem Aufbau enthalten die Ausgangsgleichungen in Wirklichkeit weniger linear von einander unabhängige Bedingungen als ihrer Zahl entspricht. So werden z. B. bei eindimensional statisch unbestimmten Systemen (vgl. Seite 237, 3. Beispiel) für das Gleichgewicht an einzelnen Massen infolge der überzähligen Federn mehr Gleichgewichtsbedingungen vom Typ der Gl. (3) zugrunde gelegt, als Massen vorhanden sind; bei ebenen statisch unbestimmten Systemen treten mehr Gleichungen vom Typ (3) auf als der doppelten Anzahl der Massen entspricht, bei räumlich statisch unbestimmten Systemen mehr Gleichungen vom Typ (3) als der dreifachen Anzahl der Massen entspricht. Nach den Gesetzen der Statik bzw. entsprechend der Vektoreigenschaft der Kraft muß daher ein Teil dieser Gleichungen eine Folge der übrigen sein. In der Frequenzgleichung (25) kommt dieser Sachverhalt darin zum Ausdruck, daß je nach dem Grad der statischen Unbestimmtheit des Systems die Koeffizienten der ersten Glieder der Potenzreihe verschwinden. So wird bei allen Systemen mit einfach statisch unbestimmtem Aufbau $\bar{D} = 0$; bei zweifach unbestimmtem Aufbau verschwinden außer $\bar{D}$ auch alle $\bar{D}_\lambda$, bei dreifach statisch unbestimmtem Aufbau außer $\bar{D}$ auch alle $\bar{D}_\lambda$ und $\bar{D}_{\lambda\mu}$, und so fort. Wird der Grad der statischen Unbestimmtheit mit s bezeichnet, so folgt, daß s Wurzeln der Frequenzgleichung verschwinden, und zwar nicht nur beim wirklichen System, sondern zugleich auch bei allen herstellbaren Ersatzsystemen erster Art. Bei folgerichtiger Anwendung der Überlegungen des vorigen Abschnittes, insbesondere der Tatsache, daß sich die Produktdarstellungen (27) und (28) infolge des Verschwindens von s Frequenzen auf folgende Formen reduzieren lassen:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_{s+1}^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_{s+1}^2}\right) \cdots \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_\varrho^2}\right) = 0, \tag{55}$$

$$(\omega^2 - \omega_{s+1}^2)(\omega^2 - \omega_{s+2}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_\varrho^2) = 0, \tag{56}$$

ergeben sich nacheinander für die Fälle $s = 1$, $s = 2$ usw. die nachstehenden Beziehungen.

$\underline{s = 1}$

$$\bar{D} = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \bar{\omega}_\lambda = 0, \quad \bar{\omega}_{\lambda\mu,1} = 0, \quad \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1} = 0 \quad \text{usw.}, \tag{57}$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda c_\mu} \bar{D}_{\lambda\mu} \Big/ \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda} \bar{D}_\lambda, \tag{58}$$

$$\sum_{\lambda=2}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2 \omega_\mu^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda c_\mu c_\nu} \bar{D}_{\lambda\mu\nu} \Big/ \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda} \bar{D}_\lambda. \tag{59}$$

$\underline{s = 2}$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{D} = 0, \quad \bar{D}_\lambda = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \bar{\omega}_\lambda = 0, \ \bar{\omega}_{\lambda\mu,1} = 0, \quad \bar{\omega}_{\lambda\mu,2} = 0, \\ &\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,1} = 0, \quad \bar{\omega}_{\lambda\mu\nu,2} = 0 \qquad \text{usw.,} \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

$$\sum_{\lambda=3}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda c_\mu c_\nu} \bar{D}_{\lambda\mu\nu} \Big/ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda c_\mu} \bar{D}_{\lambda\mu}, \tag{61}$$

$$\sum_{\lambda=3}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2 \omega_\mu^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu-3} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-2} \sum_{\nu=\mu+1}^{\nu-1} \sum_{\varrho=\nu+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda c_\mu c_\nu c_\varrho} \bar{D}_{\lambda\mu\nu\varrho} \Big/ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu} \frac{1}{c_\lambda c_\mu} \bar{D}_{\lambda\mu} \quad \text{usw.} \tag{62}$$

Man erkennt, daß anstelle von Gl. (37) bei einfach statisch unbestimmten Systemen Gl. (58), bei zweifach unbestimmten Systemen Gl. (61) usw. zu setzen ist. Entsprechend ist die rechte Seite von Gl. (49) für die untere Frequenzschranke zu modifizieren. Wird die Zahl der bei einem s-fach unbestimmten System möglichen Ersatzsysteme erster Art mit der zur Schwingungsfähigkeit mindest erforderlichen Zahl $(s+1)$ elastischer Federn mit t bezeichnet und werden die Größen $\bar{\omega}_{s+1,\varrho}$ (statt $\bar{\omega}_{\lambda\mu\nu\ldots,s+1}$) anstelle der zugehörigen Eigenfrequenzen benutzt, so gilt[1]:

$$\frac{1}{\omega_{s+1}^{*2}} = \sum_{\lambda=s+1}^{\nu} \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum_{\varrho=1}^{t} \frac{1}{\bar{\omega}_{s+1,\varrho}^2} > \frac{1}{\omega_{s+1}^2}. \tag{63}$$

Bei Zerlegung in zwei Teilsysteme erster Art entsprechend den Darlegungen des vorigen Abschnittes seien s_I und s_II die Grade der statischen Unbestimmtheit der beiden Teilsysteme, t_I und t_II die Zahlen der in jedem Teilsystem möglichen Ersatzsysteme erster Art mit $(s_\mathrm{I}+1)$ bzw. $(s_\mathrm{II}+1)$ nicht-starren Federn, so geht Gl. (52) in folgende Form über:

$$\frac{1}{\omega_{s+1}^{*2}} = \frac{1}{\omega_{\mathrm{I},s_\mathrm{I}+1}^{*2}} + \frac{1}{\omega_{\mathrm{II},s_\mathrm{II}+1}^{*2}}. \tag{64}$$

Von Ausnahmefällen abgesehen gilt:

$$t = \binom{\nu}{s+1}, \qquad t_\mathrm{I} = \binom{w}{s_\mathrm{I}+1}, \qquad t_\mathrm{II} = \binom{\nu-w}{s_\mathrm{II}+1}. \tag{65}$$

Die so gewonnenen Regeln haben für alle Systeme Gültigkeit, einschließlich der statisch bestimmten Systeme, für welche sich mit $s=0$ die Beziehungen des vorigen Abschnittes ergeben. Bei den Gln. (40), (41), (42), (46), (47), (48), (50), (52) und (54) stören die bei statischer Unbestimmtheit hereinkommenden Nullfrequenzen nicht, so daß diese Beziehungen auch bei statisch unbestimmten Systemen unmittelbar brauchbar bleiben. Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die einfachsten linearen, ebenen und räumlichen Systeme (n ist Anzahl der Massen):

		ν	n	s	t
Eindimensionale Systeme		1	2	0	0
		2	3	0	2
		3	3	1	3
Ebene Systeme		3	3	0	3
		6	4	1	15
		7	5	0	7
		8	5	1	28
		10	5	3	210
Räumliche Systeme		6	4	0	6
		9	5	0	9
		10	5	1	45

(66)

[1] Die wirklichen Eigenfrequenzen

sind bei $s=1$: $\dfrac{\bar{D}_{\lambda\mu}}{c_\lambda c_\mu}\Big/\left(\dfrac{\bar{D}_\lambda}{c_\lambda}+\dfrac{\bar{D}_\mu}{c_\mu}\right)$ bzw. bei $s=2$: $\dfrac{\bar{D}_{\lambda\mu\nu}}{c_\lambda c_\mu c_\nu}\Big/\left(\dfrac{\bar{D}_{\mu\nu}}{c_\mu c_\lambda}+\dfrac{\bar{D}_{\mu\nu}}{c_\mu c_\nu}+\dfrac{\bar{D}_{\lambda\nu}}{c_\lambda c_\nu}\right)$.

Die in Gl. (63) verwendeten Hilfsgrößen errechnen sich dagegen aus

$$\frac{\bar{D}_{\lambda\mu}}{c_\lambda c_\mu}\Big/\sum_{\lambda=1}^{\nu}\frac{\bar{D}_\lambda}{c_\lambda} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\bar{D}_{\lambda\mu\nu}}{c_\lambda c_\mu c_\nu}\Big/\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu}\frac{\bar{D}_{\lambda\mu}}{c_\lambda c_\mu}$$

9. Anwendungen in der Kontinuumsmechanik. a) Longitudinalschwingungen eines prismatischen Stabes. Wohl das einfachste Beispiel aus der Mechanik der Kontinua bietet sich bei der Untersuchung der Longitudinalschwingungen prismatischer Stäbe an (Abb. 3). E sei der Elastizitätsmodul des als homogen, isotrop und linear-elastisch angenommenen Werkstoffes,

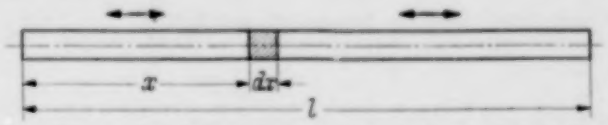


Abb. 3. Zur Longitudinalschwingung prismatischer Stäbe.

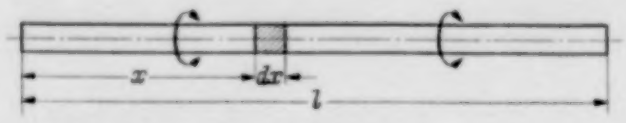


Abb. 4. Zur Torsionsschwingung prismatischer Stäbe.

ϱ seine Masse pro Längeneinheit, F der Stabquerschnitt, x die Koordinate in Längsrichtung und $V(x, t)$ die Verschiebung. Dann lautet bekanntlich die Differentialgleichung der Longitudinalschwingungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E F \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \varrho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 . \tag{67}$$

Alle Lösungen von der Form (für $E F =$ Konst. u. $\varrho =$ Konst.)

$$V_k = A_k \cos\left(\frac{k \pi x}{l}\right) \sin(\omega_k t) \qquad (k = 1, 2, \ldots) , \tag{68}$$

erfüllen die Randbedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l , \tag{69}$$

an den Stabenden (l Stablänge). Die zugehörigen Eigenfrequenzen ω_k errechnen sich aus den Gln. (67) und (68). Es folgt

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{\varrho l^2}{\pi^2 E F k^2} . \tag{70}$$

Zur Kontrolle der in den vorausgehenden Abschnitten entwickelten Theorie denken wir uns nunmehr den Stab erstarrt, bis auf das kleine Element von der Länge dx, sodaß es sich um ein von den beiden Teilmassen ϱx und $\varrho (l - x)$ gebildetes Zweimassensystem handelt. Für die Federkonstante des elastischen Zwischengliedes folgt $E F/dx$. Entsprechend der Frequenzgleichung für das Zweimassensystem gilt:

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{\varrho \, dx}{E F\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{l - x}\right)} = \frac{\varrho}{E F l} x (l - x) \, dx . \tag{71}$$

Die Summe dieser Kehrwerte der Frequenzquadrate muß aber gemäß (Gl. (37) mit der Summe der Kehrwerte der wirklichen Frequenzquadrate übereinstimmen. Da die rechte Seite von Gl. (71) die Größenordnung eines Differentials besitzt, tritt an die Stelle der Summe ein Integral. Es folgt:

$$\sum \frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{\varrho}{E F l} \int_0^l x (l - x) \, dx = \frac{\varrho l^2}{6 E F} . \tag{72}$$

Andererseits liefert die Summation der Gl. (70) (ζ (2) Zetafunktion mit Argument 2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{\varrho l^2}{\pi^2 E F} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\varrho l^2}{\pi^2 E F} \zeta(2) = \frac{\varrho l^2}{6 E F} . \tag{73}$$

Man erkennt die völlige Übereinstimmung mit Gl. (72):

b) Torsionsschwingungen eines prismatischen Stabes. Ähnliche Verhältnisse liegen bei Drehschwingungen prismatischer Stäbe vor (Abb. 4). An die Stelle der Zugsteifigkeit tritt jetzt die Torsionssteifigkeit $G J_T$, an die Stelle der Masse die Drehmasse Θ^* pro Längeneinheit, welche auch Zusatzscheiben berücksichtigt, die ohne Einfluß auf die Drillsteifigkeit sind. Für den Drillwinkel φ kommen Lösungen von der Form (68) mit den analogen Randbedingungen in Betracht, so daß sich für die zugehörigen Eigenfrequenzen ergibt (für $\Theta^* =$ Konst., $G J_T =$ Konst.):

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{\Theta^* l^2}{\pi^2 G J_T k^2} . \tag{74}$$

Die Summe liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{\Theta^* l^2}{6 G J_T} . \tag{75}$$

Läßt man den Stab andererseits vollständig erstarren bis auf ein elastisches Element von der Länge dx, so hat dieses Element die Federkonstante $G J_T/dx$. Die zugehörige Drehschwingungsfrequenz wird

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{\Theta^* \, dx}{G J_T \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x}\right)}. \tag{76}$$

Die Summation aller derartiger Frequenzen liefert das Integral

$$\sum \frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{\Theta^*}{G J_T \, l} \int_0^l x\,(l-x)\, dx\,. \tag{77}$$

Wieder erkennt man Übereinstimmung mit Gl. (75), also Bestätigung der grundlegenden Beziehung (37).

c) **Biegeschwingungen prismatischer Stäbe.** Ein prismatischer Stab mit gleichmäßig verteilter Massenbelegung sei beiderseits gelenkig gelagert (Abb. 5). Ist wieder E der Elastizitäts-

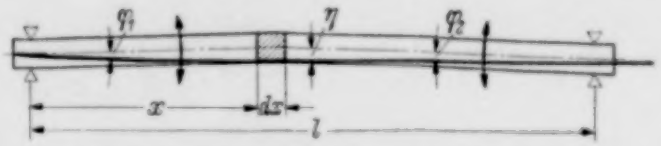


Abb. 5. Zur Biegeschwingung prismatischer Stäbe.

modul, ferner J das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die durch den Querschnittsschwerpunkt gehende und zur Biegeebene senkrechte Achse, welche zugleich Querschnittshauptachse sei, ist ferner wieder ϱ die Masse pro Längeneinheit und $\bar{\Theta}$ das Massenträgheitsmoment des Stabes pro Längeneinheit (bezogen auf dieselbe Achse wie das Flächenträgheitsmoment), so ergibt sich für die Durchbiegung η die bekannte Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(E J \eta'')'' + \varrho \ddot{\eta} - (\bar{\Theta} \eta''')' = 0\,, \qquad (\,)' = \frac{\partial}{\partial x}\,, \tag{78}$$

mit den Randbedingungen

$$\eta = 0 \quad \text{und} \quad \eta'' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = l\,. \tag{79}$$

Infolge dieser Randbedingungen kommen nur Lösungen in folgender Form in Betracht (für $E J$ = konst., ϱ = konst., $\bar{\Theta}$ = konst.):

$$\eta_k = C_k \sin\left(\frac{k \pi x}{l}\right) \sin(\omega_k t)\,. \tag{80}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{l^2}{E J}\left(\frac{\varrho \, l^2}{\pi^4 k^4} + \frac{\bar{\Theta}}{\pi^2 k^2}\right). \tag{81}$$

Die Summation liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} = \frac{l^2}{E J}\left(\frac{\varrho \, l^2}{\pi^4}\zeta(4) + \frac{\bar{\Theta}}{\pi^2}\zeta(2)\right) = \frac{l^2}{E J}\left(\frac{\varrho \, l^2}{90} + \frac{\bar{\Theta}}{6}\right). \tag{82}$$

Läßt man andererseits den Stab erstarren bis auf ein Element von der Länge dx, so entsteht ein Schwingungssystem mit zwei starren Stäben, welche durch ein elastisches Gelenk verbunden sind. Dieses Gelenk überträgt sowohl ein Biegemoment, als auch eine Querkraft. Die äußeren Enden beider Stäbe sind — entsprechend den Randbedingungen des Hauptsystems — gelenkig gelagert[1]. Wird die Querverschiebung am Gelenk (Durchbiegung) wieder mit η bezeichnet, so folgt geometrisch (φ_1 und φ_2 Drehwinkel):

$$\varphi_1 = \frac{\eta}{x}\,, \qquad \varphi_2 = \frac{\eta}{l-x}\,. \tag{83}$$

Ist M das im Gelenk übertragene Biegemoment und V die Querkraft, so folgen für die beiden separat betrachteten Teilstäbe als Bedingungen für das Momentengleichgewicht in bezug auf das jeweilige Auflager

$$-V x + M + \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = 0\,, \tag{84}$$

$$V(l-x) + M + \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 = 0\,. \tag{85}$$

[1] Dort sind unendlich große Punktmassen zu denken.

Hierbei sind Θ_1 und Θ_2 die zugehörigen, auf das jeweilige Auflager bezogenen Massenträgheitsmomente, welche sich definitionsgemäß zu

$$\Theta_1 = \frac{\varrho}{3} x^3 + \bar{\Theta} x , \qquad \Theta_2 = \frac{\varrho}{3} (l-x)^3 + \bar{\Theta} (l-x) \tag{86}$$

ergeben. Wird die Querkraft durch Multiplikation von Gl. (84) mit $(l-x)$ und Gl. (85) mit x und Addition eliminiert und werden die Werte von φ_1 und φ_2 aus den Gln. (83) und von Θ_1 und Θ_2 aus den Gln. (86) eingesetzt, so folgt:

$$M l + \left[\left(\frac{\varrho}{3} x^3 + \bar{\Theta} x \right) \frac{l-x}{x} + \left(\frac{\varrho}{3} (l-x)^3 + \bar{\Theta} (l-x) \right) \frac{x}{l-x} \right] \ddot{\eta} = 0 . \tag{87}$$

Wird noch der durch das lineare Elastizitätsgesetz gegebene Zusammenhang zwischen Biegemoment und Durchbiegung

$$M = E J \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{dx} = E J l \frac{\eta}{x (l-x)\, dx} , \tag{88}$$

berücksichtigt, so ergibt sich durch Kombination mit Gl. (87) für den Kehrwert des Quadrates der Eigenfrequenz des Ersatzsystems die Beziehung:

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{1}{E J l} \left[\frac{\varrho}{3} x (l-x) + \bar{\Theta} \right] x (l-x)\, dx . \tag{89}$$

Die Summation liefert

$$\sum \frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{1}{E J l} \left[\frac{\varrho}{3} \int_0^l x^2 (l-x)^2\, dx + \bar{\Theta} \int_0^l x (l-x)\, dx \right] = \frac{l^3}{E J} \left(\frac{\varrho l^2}{90} + \frac{\bar{\Theta}}{6} \right) , \tag{90}$$

also Übereinstimmung mit Gl. (82).

Damit ist auch für dieses kompliziertere Problem die Gültigkeit des allgemeinen Gesetzes für den Zusammenhang der wirklichen Eigenfrequenzen mit jenen der durch Erstarrung gewonnenen Ersatzsysteme erster Art nachgewiesen.

Es ist leicht einzusehen, daß man sich die rechten Seiten der Gln. (37), (38) u. (39) bei Kontinuaproblemen auch dann verhältnismäßig einfach durch Integration verschaffen kann, wenn die Verteilung der Massen und der Steifigkeitswerte nicht konstant ist, wie hier der Übersichtlichkeit halber und zwecks Durchführung der Kontrollrechnung angenommen wurde. Die Überlegungen liefern insbesondere auch dann wertvolle Frequenzschranken, wenn die exakten Lösungen der jeweiligen Differentialgleichungen nicht bekannt sind. Im Falle der Longitudinalschwingungen von Stäben mit veränderlicher Masse $\varrho = \varrho(x)$ und veränderlicher Steifigkeit $E F = f(x)$ erhält man beispielsweise für die mit A, B und C bezeichneten rechten Seiten der Gln. (37) bis (39) die nachstehend angegebenen Integrale.

d) Longitudinalschwingungen bei veränderlicher Masse und Steifigkeit. Mit Einführung der Hilfsfunktion (Masse bis zur Stelle x, vgl. Abb. 6)

$$\mu(x) = \frac{1}{m} \int_0^x \varrho(\xi)\, d\xi \qquad \text{mit} \qquad m = \int_0^l \varrho(x)\, dx , \tag{91}$$

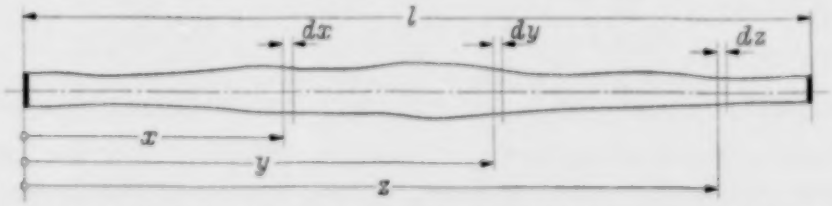


Abb. 6. Zur Longitudinalschwingung bei veränderlicher Masse und Steifigkeit.

erhält man für die rechten Seiten der Gln. (37), (38), (39):

$$\left.\begin{aligned} A &= m \int_0^l \mu(x) [1-\mu(x)] \frac{dx}{f(x)} , \\ B &= m^2 \int_0^l \frac{dx}{f(x)} \mu(x) \int_x^l \frac{dy}{f(y)} [\mu(y)-\mu(x)] [1-\mu(y)] , \\ C &= m^3 \int_0^l \frac{dx}{f(x)} \mu(x) \int_x^l \frac{dy}{f(y)} [\mu(y)-\mu(x)] \int_y^l \frac{dz}{f(z)} [\mu(z)-\mu(y)] [1-\mu(z)] \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

und so fort.

Nach Ermittlung dieser Größen lassen sich außer der Schranke (49) für die Grundfrequenz weitere verbesserte Schrankenwerte — wie folgt — angeben.

10. Aufstellung verbesserter Frequenzschranken. Wird Gleichung (37) quadriert, so erhält man mit Bezug auf Gl. 38)

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\omega_{\lambda}^4} = A^2 - 2\,B\,. \tag{93}$$

Hieraus ergibt sich die genauere Schranke ω_1^{**} für die Grundfrequenz:

$$\frac{1}{\omega_1^{**4}} = A^2 - 2\,B\,. \tag{94}$$

Weiter liefert die dritte Potenz von Gl. (37) in Verbindung mit den Gln. (38) und (39) die noch genauere Schranke ω_1^{***} für die Grundfrequenz

$$\frac{1}{\omega_1^{***6}} = A^3 - 3\,A\,B + 3\,C \tag{95}$$

und so fort.

Mit Verwendung einer der höheren Schranken der Grundfrequenz läßt sich weiter auch die zweite Eigenfrequenz abschätzen, z. B.:

$$\frac{1}{\omega_2^{*2}} = A - \frac{1}{\omega_1^{**2}}\,. \tag{96}$$

Sind genügend viele der Größen A, B, C usw. errechnet, so lassen sich eine Reihe von Frequenzen mit praktisch ausreichender Genauigkeit abschätzen.

11. Schlußbemerkung. Die aufgestellten Frequenzregeln gestatten, die wirklichen Eigenfrequenzen des jeweiligen Systems in guter Näherung aus den Eigenfrequenzen einfach gebauter Ersatzsysteme zu errechnen. Bei Kontinuaproblemen treten Integrale auf, welche auch bei veränderlicher Massen- und Steifigkeitsverteilung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereiten. Es lassen sich auch beliebige Auflagerbedingungen durch Einführung unendlich großer Punktmassen berücksichtigen. Dadurch eröffnen sich neue Wege zur vereinfachten Berechnung von Frequenzschranken, welche insbesondere bei kompliziert gelagerten Problemen der technischen Praxis wertvolle Hilfe leisten können.

(Eingegangen am 15. Dezember 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Neuber*, Starnberg bei München, Max-Emanuel-Str. 10.

Die Näherungsformel von Dunkerley und ähnliche Formeln für die Eigenwerte bei Schwingungsaufgaben

Von Folke K. G. Odqvist

Wenn man das Problem der kleinen Schwingungen von n Massen Q_i $(i = 1 \ldots n)$ behandelt, kann man von der Beziehung zwischen Verschiebung y_i und Rückstellkraft P_i in der Form

$$y_i = \alpha_{i1} P_1 + \alpha_{i2} P_2 + \cdots + \alpha_{in} P_n = \sum_j^n \alpha_{ij} P_j \tag{1}$$

ausgehen und P_j mit den Trägheitskräften

$$Q_j y_j \omega^2$$

des mit dem Eigenwert ω der Winkelfrequenz schwingenden Systems identifizieren. Mit der Bezeichnung $\alpha_{ij} Q_j = 1/\omega_{ij}^2$ gelangt man so zur Frequenzdeterminante

$$\begin{vmatrix} 1/\omega_{11}^2 - 1/\omega^2, & \ldots & 1/\omega_{1n}^2 \\ 1/\omega_{n1}^2, & \ldots & 1/\omega_{nn}^2 - 1/\omega^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{2}$$

Andererseits kann man aber auch das System (1) nach P_j in der Form

$$P_j = k_{i1} y_i + \cdots k_{in} y_n = \sum_i^n k_{ij} y_i \tag{3}$$

auflösen und gelangt dann mit der Bezeichnung

$$\overline{\omega}_{ij}^2 = k_{ij}/Q_i$$

zu der mit (2) gleichwertigen Frequenzdeterminante

$$\begin{vmatrix} \overline{\omega}_{11}^2 - \omega^2, & \ldots & \overline{\omega}_{1n}^2 \\ \overline{\omega}_{n1}^2, & \ldots & \overline{\omega}_{nn}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{4}$$

Die beiden Determinanten (2) und (4) lassen sich in der gemeinsamen Form

$$\begin{vmatrix} c_{11} - z, & \ldots & c_{1n} \\ c_{n1}, & \ldots & c_{nn} - z \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

zusammenfassen und sodann entwickeln

$$z^n - A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} \ldots (-1)^n A_n = 0\,, \tag{6}$$

worin

$$A_1 = \sum_i^n c_{ii}\,, \qquad A_2 = \sum_{i<j}^n \begin{vmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{vmatrix}\,, \qquad A_3 = \sum_{i<j<k}^n \begin{vmatrix} c_{ii} & c_{ij} & c_{ik} \\ c_{ji} & c_{jj} & c_{jk} \\ c_{ki} & c_{kj} & c_{kk} \end{vmatrix} \ldots A_n = \begin{vmatrix} c_{11} \ldots c_{1n} \\ c_{n1} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

gesetzt worden ist, und man je nachdem für c_{ij} die Größen $1/\omega_{ij}^2$ bzw. $\overline{\omega}_{ij}^2$ und für z die Größe $1/\omega^2$ oder aber ω^2 einzusetzen hat. Bei numerischen Rechnungen empfiehlt es sich, wie wir später an Hand eines Beispiels sehen werden, die Größen c_{ij} mit einem konstanten Faktor zu multiplizieren und die Größe z entsprechend zu modifizieren.

Wenn man bei der Auflösung der Gleichung (6) beachtet, daß unter Umständen die nachfolgenden Glieder im Vergleich zu den vorangehenden klein sind, so erhält man als erste Annäherung für die größte Wurzel

$$z_1 = A_1\,. \tag{8}$$

Die eben erwähnte Identifizierung der Gleichung (6) mit (2) bzw. (4) liefert dann die bekannte Näherungsformel von *J. Dunkerley* für den niedrigsten bzw. diejenige von *R. V. Southwell*[1, 2] für den höchsten Eigenwert unseres Schwingungsproblems und zwar erhält man mit (8) eine untere Schranke für den niedrigsten Eigenwert und eine obere Schranke für den höchsten Eigenwert.[3]

[1] *H. Lamb* u. *R. V. Southwell*, Proc. Roy. Soc. A, 99, (1921) S. 272.
[2] *R. V. Southwell*, Proc. Roy. Soc. A., 101 (1922) S. 133.
[3] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. II, S. 190—191 u. Bd. I, S. 97—104. Berlin/Göttingen/Heidelberg: 1953.

Es liegt nun der Gedanke nahe, einen Schritt weiter zu gehen und ein weiteres Glied der Entwicklung (6) zu berücksichtigen. In der Tat ist dies der Weg, den schon *E. Hahn*[1] bei der theoretischen Begründung der zum ersten Mal von *J. Dunkerley*[2] auf experimentellen Wege gefundenen Formel (8), gegangen ist.

Bekanntlich hat die Gleichung (6) genau n reelle positive Wurzeln z_i ($i = 1 \ldots n$), von denen wir voraussetzen, daß $z_1 > z_2 > \cdots > z_n > 0$. Die Matrix c_{ij} ist zwar nicht selbst symmetrisch, aber man kann leicht zeigen, daß die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ der Gleichung (6) alle positiv sind, vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*[3]. Somit hat die Gleichung (6) genau n Zeichenwechsel im Sinne der Zeichenregel von *Cartesius*. Als Verallgemeinerung der Lösung (8) für die größte Wurzel läßt sich dann in erster Annäherung anschreiben ($A_0 = 1$)

$$z_i = A_i / A_{i-1}, \qquad i = 1 \ldots n. \tag{9}$$

Diese Gleichung enthält als Spezialfälle die Formel von *Dunkerley* für $i = 1$ und die Formel von *Southwell* für $i = n$ falls die Gleichung (5) mit der Gleichung (2) identifiziert wird. Unter Verallgemeinerung der *Hahn*schen Betrachtungsweise erhält man in zweiter Annäherung

$$\left.\begin{matrix} z_i \\ z_{i+1} \end{matrix}\right\} = [A_i \pm (A_i^2 - 4\, A_{i+1}\, A_{i-1})^{1/2}]/2\, A_{i-1} \qquad i = 1 \ldots n-1. \tag{10}$$

Eine allgemeine Voraussetzung für die Güte der Annäherung ist, daß die Wurzeln z_i weit auseinander liegen, was zur Folge hat, daß die Koeffizienten A_i mit i rasch abnehmen.

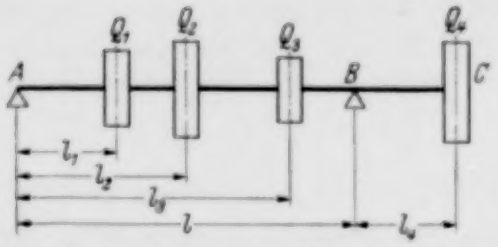


Abb. 1. Berechnungsbeispiel eines frei gestützten Balkens mit vier konzentrierten Massen.

Wir wollen die obige Betrachtungsweise an Hand eines praktischen Beispiels näher erläutern. Es handelt sich um den Fall der Querschwingungen eines in A und B frei gestützten, mehrfach mit konzentrierten Massen besetzten massenlosen Balkens ABC mit Überhang BC nach Abb. 1. Es ist dies im allgemeinen ein Fall starker elastischer Kupplung, genau wie bei dem ursprünglich von *J. Dunkerley* experimentell angeschnittenen Fall. Wir haben also vier Punktmassen $Q_1 \cdots Q_4$ und setzen speziell

$$\left.\begin{aligned} Q_2 &= 1{,}4\, Q_1, & Q_3 &= 1{,}2\, Q_1, \\ Q_4 &= 4\lambda\, Q_1, & l_1/l &= 0{,}3, \\ l_2/l &= 0{,}5, & l_3/l &= 0{,}8. \\ l_4/l &= 0{,}3, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Biegesteifigkeit sei konstant $= E\,I$ auf der Strecke AB und $= E\,I/4$ auf der Strecke BC. Hierdurch ergibt sich für die Matrix

$$E\,I\,\alpha_{ij}/l^3 = \begin{Bmatrix} 0{,}0147000 & 0{,}0165000 & 0{,}0087000 & 0{,}0136500 \\ 0{,}0165000 & 0{,}0208333 & 0{,}0118333 & 0{,}0187500 \\ 0{,}0087000 & 0{,}0118333 & 0{,}0085333 & 0{,}0144000 \\ 0{,}0136500 & 0{,}0187500 & 0{,}0144000 & 0{,}0066000 \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Um den Einfluß des gegenseitigen Abstands der Wurzeln der Gleichung (6) näher zu beleuchten, wollen wir dem Faktor λ je sechs verschiedene Werte geben: 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 und 0. Der Fall $\lambda = 0$, d. h. der Fall von nur drei Massen und Balken ohne Überhang, deckt sich genau mit einem von *E. Hübner*[4], S. 123, behandelten Beispiel. Bei *Hübner* finden sich numerische Fehler bei Berechnung der Eigenwerte, die hier berichtigt werden.

[1] *E. Hahn*, Schweiz. Bauztg. 72 (1918) S. 191.
[2] *J. Dunkerley*, Phil. Trans. Roy. Soc. A., 185 (1894) S. 279.
[3] Siehe Fußnote 3 S. 242.
[4] *E. Hübner*, Technische Schwingungslehre, Berlin 1957.

Wir setzen nun $z = 100\, E\, I/Q_1\, l^3\, \omega^2$ und bekommen alsdann für die Matrix $c_{ij} = 100\, \alpha_{ij}\, Q_j$ mit den obigen speziellen Annahmen (11)

$$c_{ij} = \begin{Bmatrix} 1{,}47000 & 2{,}31000 & 1{,}04400 & 5{,}46000\ \lambda \\ 1{,}65000 & 2{,}91666 & 1{,}42000 & 7{,}50000\ \lambda \\ 0{,}87000 & 1{,}65666 & 1{,}02400 & 5{,}76000\ \lambda \\ 1{,}36500 & 2{,}62500 & 1{,}72800 & 26{,}40000\ \lambda \end{Bmatrix} \tag{13}$$

und die Formeln (7) liefern

λ	A_1	A_2	A_3	A_4
0	5,41066	1,707193	0,087695	0
0,0001	5,41330	1,717768	0,090654	0,000145005
0,001	5,43706	1,812941	0,117288	0,001450055
0,01	5,67466	2,764670	0,383624	0,01450055
0,1	8,05066	12,281967	3,046987	0,1450055
1	31,81066	107,454973	29,680618	1,450055

Die Tabelle S. 245 zeigt das Ergebnis der Rechnung mit den Formeln (9) bzw. (10) sowie die exakten Wurzeln der Gleichung (6) mit dem *Newton*schen Verfahren bestimmt. Die Abhängigkeit der Wurzeln von λ geht deutlich aus der Abb. 2 im doppeltlogarithmischen Maßstab hervor. Offenbar ist der

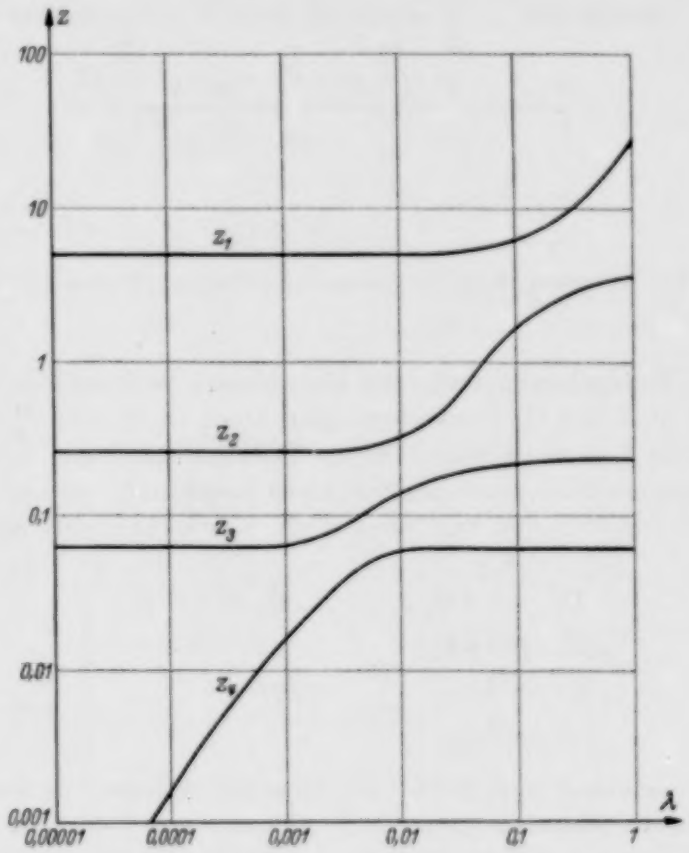


Abb. 2. Abhängigkeit der vier Eigenwerte von der vierten Masse ($\lambda = Q_4/4\, Q_1$).

Variationsbereich von λ genügend groß um die Einwirkung je auf alle vier Wurzeln hervortreten zu lassen. Es ist erstaunlich, daß die rauhe Formel (9) ziemlich gute Näherungswerte liefert, auch in solchen Teilgebieten des Lösungsfeldes, wo die Wurzeln stark von λ abhängen. Die Formel (10) liefert im allgemeinen eine Verbesserung, besonders für die größte Wurzel, wie schon von *E. Hahn* erkannt, aber auch z. B. für die kleinste. Es kann jedoch zutreffen, daß überhaupt keine Verbesserung erhältlich ist und zwar wegen Imaginärwerden der Wurzeln. Dies ist dann ein Zeichen dafür, daß man sich im Gebiet der starken Abhängigkeit von λ befindet. Die Näherungsformeln liefern unter allen Umständen brauchbare Ausgangswerte für eine genaue Bestimmung der Wurzeln, z. B. mit dem *Newton*schen Verfahren. Sie dürften auch für die angenäherte Bestimmung z. B. von kritischen Drehzahlen von Rotoren Verwendung finden und zwar nicht nur für die niedrigste, wie bis jetzt üblich, sondern auch für alle praktisch wichtige Eigenwerte.

Die numerischen Rechnungen wurden von Herrn *P. Hörnquist* kontrolliert.

	λ	0	0,0001	0,001	0,01	0,1	1,0
	Formel						
z_1	(9) $i=1$	5,411	5,413	5,437	5,675	8,051	31,81
	(10) $i=1$	5,074	5,075	5,080	5,136	6,006	27,97
	exakt	5,0779	5,0786	5,0851	5,1524	6,1265	28,013
z_2	(9) $i=2$	0,316	0,318	0,333	0,487	1,53	3,38
	(10) $i=1$	0,336	0,338	0,357	0,538	2,05	3,84
	(10) $i=2$	0,252	0,251	0,245	—	1,22	3,08
	exakt	0,2685	0,2687	0,2710	0,3172	1,6304	3,5003
z_3	(9) $i=3$	0,0514	0,0527	0,0647	0,139	0,249	0,276
	(10) $i=2$	0,0645	0,0668	0,0882	—	0,309	0,305
	(10) $i=3$	0,0514	0,0511	0,0481	—	0,184	0,212
	exakt	0,06433	0,06436	0,06479	0,1430	0,2309	0,2350
z_4	(9) $i=4$	0	0,00160	0,0124	0,0378	0,0475	0,0489
	(10) $i=3$	0	0,00165	0,0167	—	0,0642	0,0635
	exakt	0	0,001651	0,01624	0,06205	0,06287	0,06292

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß durch neuere Arbeiten von *T. Kato*[1] und besonders von *G. Temple*[2, 3] das Problem der oberen und unteren Schranken beliebiger Eigenwerte von sehr allgemeinen schwingenden Systemen vom theoretischen Gesichtspunkt aus behandelt und gewissermaßen zum Abschluß gebracht worden ist. Die Bemerkungen der vorliegenden Arbeit dürften trotzdem für numerische Berechnungen von Interesse sein.

(Eingegangen am 25. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor *Folke K. G. Odqvist*, Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm.

[1] *T. Kato*, Journal Phys. Soc. Jap. 4 (1949) S. 334.
[2] *G. Temple*, Proc. Roy. Soc. A, 211 (1952) S. 204.
[3] *G. Temple*, Mathematika 2 (1955) S. 39.

Variational Theorems in General Viscoelasticity

By **W. Olszak** and **P. Perzyna**

The available extremum theorems in the mechanics of rheological bodies are formulated for variations of the strain rates and stress rates or, which is equivalent, for variations of their increments[1,2,3].

The object of this paper is to derive variational theorems for various models of anisotropic rheological bodies the quantities undergoing variations being stresses and strains. This will be shown to have a considerable technical importance.

It will be proved that a formal treatment consisting in introducing operational symbolism presents not only the advantage of compact and uniform notation, but also enables some generalizations impossible to obtain with classical treatment.

The operational notation is extensively used in some investigations, cf. for instance the papers by *T. Alfrey*[4], *M. A. Biot*[5,6,7], *A. M. Freudenthal*[8]. It enabled these authors to obtain some results of general nature, for instance the demonstration of the visco-elastic analogy[4,6].

In the present paper, by using the operational notation for phenomenological relations, as was done by *M. A. Biot*[6], the notion of matrices is introduced the elements of which are analytic functions of the differential operator p or the integral operator $p^{-1} = l$.

These matrices may be treated as ordinary matrices with constant elements, as pointed out by *M. A. Biot*[6]; their operational character should only be taken into account in the final results.

In view of the commutative property of the differential and variational operations as well as integral and variational operations, the original property of a matrix may be preserved during the formulation of the variational theorems.

1. In the first part of the paper we shall be concerned with formulating *the phenomenological relations* for inelastic anisotropic bodies.

It will be shown that for any linear rheological model the physical relations may be written in the following form:

$$\tau^{ij} = H^{ij\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,, \tag{1.1}$$

where the matrix $[H^{ijkl}]$ is defined as a certain operational matrix. The form of this matrix will be shown for the most important rheological models.

The Voigt Model of an Anisotropic Body. Denoting by $[E^{ijkl}]$ the matrix of the moduli of elasticity, and by $[\eta^{ijkl}]$ the matrix of the moduli of viscosity, the physical law for this model may be expressed in the form

$$\tau^{ij} = (E^{ij\varkappa\lambda} + p\,\eta^{ij\varkappa\lambda})\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,. \tag{1.2}$$

We have, therefore,

$$[H^{ijkl}] = [E^{ijkl} + p\,\eta^{ijkl}]\,. \tag{1.3}$$

The Maxwell Model of an Anisotropic Body. Denoting by $[\gamma^{ij}_{kl}]$ the matrix the elements of which are inverted relaxation times, different for different directions (in view of the anisotropy assumed), we obtain the relation

$$p\,\tau^{ij} = p\,E^{ij\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda} - \gamma^{ij}_{\varkappa\lambda}\,\tau^{\varkappa\lambda}\,, \tag{1.4}$$

which may be written thus

$$(p\,\delta^{ik}_{\varkappa\lambda} + \gamma^{ij}_{\varkappa\lambda})\,\tau^{\varkappa\lambda} = p\,E^{ij\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,. \tag{1.5}$$

---

[1] *A. Wang* and *W. Prager*, Journal of the Aeronautical Sciences 21 (1954) p. 343.
[2] *R. Hill*, J. Mech. Phys. Solids 5 (1956) p. 66.
[3] *W. Olszak* and *P. Perzyna*, Arch. Mech. Stos. 6 (1957) p. 695.
[4] *T. Alfrey*, Non-Homogeneous Stresses in Visco-Elastic Media, Quarterly of Applied Mathematics, (1944), p. 113.
[5] *M. A. Biot*, J. Applied Physics 25 (1954) p. 1385.
[6] *M. A. Biot*, Variational and Lagrangian Methods in Viscoelasticity, Deformation and Flow of Solids, ed. *R. Grammel*, IUTAM Colloquium, Madrid (1955), Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer (1956), p. 251.
[7] *M. A. Biot*, J. Applied Physics 27 (1956) p. 140.
[8] *A. M. Freudenthal*, *H. Geiringer*, Handbuch der Physik-Encyclopedia of Physics, vol. 6, Elasticity and Plasticity, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1958.

Let us denote $[A^{ij}_{kl}] = [p\,\delta^{ij}_{kl} + \gamma^{ij}_{kl}]$, and by $[B^{kl}_{ij}] = [A^{ij}_{kl}]^{-1}$ the inverse matrix. Multiplying the Eq. (1.5) by the matrix $[B^{kl}_{ij}]$ we obtain

$$A^{\mu\nu}_{\varkappa\lambda}\, B^{kl}_{\mu\nu}\, \tau^{\varkappa\lambda} = p\, E^{\mu\nu\varkappa\lambda}\, B^{kl}_{\mu\nu}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}, \tag{1.6}$$

$$\delta^{kl}_{\varkappa\lambda}\, \tau^{\varkappa\lambda} = p\, E^{\mu\nu\varkappa\lambda}\, B^{kl}_{\mu\nu}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}. \tag{1.7}$$

Hence, in the case of a *Maxwell* body, the physical relations may be expressed in the form of the relation

$$\tau^{ij} = p\, E^{\mu\nu\varkappa\lambda}\, B^{ij}_{\mu\nu}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}. \tag{1.8}$$

We have, therefore,

$$[H^{ijkl}] = [p\, E^{\mu\nu kl}\, B^{ij}_{\mu\nu}]. \tag{1.9}$$

The Standard Model of an Anisotropic Body. The physical relations for this model have the form

$$p\,\tau^{ij} + \gamma'^{ij}_{\varkappa\lambda}\,\tau^{\varkappa\lambda} = E^{ij\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda} + p\,\eta^{ij\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda} \tag{1.10}$$

which, after transformation, may be written thus

$$\tau^{ij} = (E^{\mu\nu\varkappa\lambda} + p\,\eta^{\mu\nu\varkappa\lambda})\, B^{ij}_{\mu\nu}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}. \tag{1.11}$$

Hence, we have

$$[H^{ijkl}] = [(E^{\mu\nu kl} + p\,\eta^{\mu\nu kl})\, B^{ij}_{\mu\nu}]. \tag{1.12}$$

The Boltzmann Model of an Anisotropic Body. For this model we have the following basic relation:

$$\tau^{ij} = \{E^{ij\varkappa\lambda} - l\, R^{ij\varkappa\lambda}(t-\tau)\}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}. \tag{1.13}$$

Hence,

$$[H^{ijkl}] = [E^{ijkl} - l\, R^{ijkl}(t-\tau)]. \tag{1.14}$$

In further considerations, we shall use the phenomenological relation expressed by the Eq. (1.1)[1]. Next, two fundamental properties of the matrix $[H^{ijkl}]$, important for the proof of the variational theorem, will be demonstrated.

The first property of the matrix $[H^{ijkl}]$ follows from the assumption of Onsager's theory. This theory[2, 3, 4] shows that if the rheological law is linear, which is the case for (1.1), the matrix $[H^{ijkl}]$ is symmetric.[5]

Hence the matrix $[H^{ijkl}]$ contains 21 different elements which are constituted by certain operators[2].

The second property of the matrix $[H^{ijkl}]$ will be derived from the principles of thermodynamics of irreversible processes; we shall show that the matrix $[H^{ijkl}]$ is positive definite.

This will be demonstrated in detail for the Voigt model. Let us introduce the following two functions

$$V = \frac{1}{2} E^{\varkappa\lambda\mu\nu}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}\, \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{1.15}$$

$$D = \frac{1}{2} p\, \eta^{\varkappa\lambda\mu\nu}\, \varepsilon_{\varkappa\lambda}\, \varepsilon_{\mu\nu}. \tag{1.16}$$

The first represents the potential energy of an anisotropic body (the energy of pure elastic deformation), the second stands for the energy of dissipation. Using Lagrangian methods[2, 6], we obtain

$$\tau^{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}, \tag{1.17}$$

which leads to Voigt's relation (1.2).

[1] The rheological relations (1.1) yield the relations derived by *M. A. Biot* (cf. references in footnotes 5 and 6 on page 246) if we assume

$$[H^{ijkl}] = [P^{ijkl}] = \left[\int_0^\infty \frac{p}{p+r}\, E^{ijkl}(r)\, \gamma(r)\, dr + E^{ijkl} + p\,\eta^{ijkl}\right].$$

[2] Cf. footnote 6 on page 246.

[3] *S. R. De Groot*, Thermodynamics of Irreversible Processes, Interscience Publishers Inc., New York, 1952.

[4] *H. Ziegler*, Ing.-Archiv 25 (1957) p. 58.

[5] An attempt to generalize Onsager's relations to non-linear phenomenological laws is given in the paper by *H. Ziegler*, ZAMP. 96 (1958) p. 748.

[6] Cf. footnote 7 on page 246.

The functions (1.15) and (1.16) are quadratic positive definite forms: the first in view of the definition of the elastic potential, the second on the basis of the second law of thermodynamics.

If s denotes the entropy of the system, the entropy increment is such

$$ds = ds_e + ds_i\,, \tag{1.18}$$

where ds_e is the entropy increment due to the external agents, ds_i being the internal entropy increment of the irreversible process[1].

The second law of thermodynamics for irreversible processes may be written thus

$$ds_i > 0\,. \tag{1.19}$$

The increment ds_i of the internal entropy is the result of dissipation. Hence, the function D must also be positive definite.

In consequence of the dissipation, the entropy of the system increases, entropy production taking place.

It follows that the operational matrix for a Voigt body

$$[H^{ijkl}] = [E^{ijkl} + p\,\eta^{ijkl}]$$

is positive definite, being a sum of two positive definite matrices.

Similarly, on the basis of the second law of thermodynamics (1.19), we may demonstrate the matrix $[H^{ijkl}]$ to be positive for other models of rheological bodies.

2. Let us formulate now *the variational problem*. For this purpose let us consider a body of volume V, bounded by a closed surface S. We shall assume that the surface S is sufficiently regular. The boundary conditions are expressed in a mixed form, the forces F_i being known on the surface S_F, and the displacements u_i on the surface S_u; the relation $S_F + S_u = S$ is satisfied. Let $(\tau^{ij}, \varepsilon_{ij})$ denote the real states of stress and strain corresponding to the given boundary conditions.

Next, let us define the comparative states. The state $(\tau^{ij}_*, \varepsilon^*_{ij})$ will be called an admissible state of the first kind. Such a state is obtained by adding to the real strain ε_{ij} the variation $\delta\varepsilon_{ij}$; so $\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}$ follows from the displacement field u_i^*, that is

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{1}{2}\,(u^*_{i,j} + u^*_{j,i})\,, \tag{2.1}$$

the boundary conditions being also satisfied on the surface S_u. The state of stress τ^{ij}_* is obtained from the physical relations (1.1)

$$\tau^{ij}_* = H^{ij\varkappa\lambda}\,\varepsilon^*_{\varkappa\lambda}\,; \tag{2.2}$$

it may not satisfy the conditions of equilibrium.

The state $(\tau^{ij}_0, \varepsilon^0_{ij})$ will be called an admissible state of the second kind. This state is obtained by adding to the real state of stress τ^{ij} the variation $\delta\tau^{ij}$; so $\tau^{ij}_0 = \tau^{ij} + \delta\tau^{ij}$ satisfies the boundary conditions on the surface S_F, and the conditions of equilibrium

$$\tau^{ij}_{0,j} = 0\,. \tag{2.3}$$

The state of strain

$$\varepsilon^0_{ij} = K_{ij\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}_0\,, \tag{2.4}$$

following from the physical relations, may not follow from the displacement field.

Let us introduce the following functionals

$$I(\tau^{ij}, \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\int_{S_u}(F^\varkappa\,u_\varkappa)\,dS - \frac{1}{2}\int_{S_F}(F^\varkappa\,u_\varkappa)\,dS\,, \tag{2.5}$$

$$I^*(\tau^{ij}_*, \varepsilon^*_{ij}) = \frac{1}{2}\int_V(\tau^{\varkappa\lambda}_*\,\varepsilon^*_{\varkappa\lambda})\,dV - \int_{S_F}(F^\varkappa\,u^*_\varkappa)\,dS\,, \tag{2.6}$$

$$I^0(\tau^{ij}_0, \varepsilon^0_{ij}) = \int_{S_u}(F^\varkappa_0\,u_\varkappa)\,dS - \frac{1}{2}\int_V(\tau^{\varkappa\lambda}_0\,\varepsilon^0_{\varkappa\lambda})\,dV\,. \tag{2.7}$$

We proceed now to prove the following theorem:

Of all the admissible states of the first kind, the functional $I^*(\tau^{ij}_*, \varepsilon^*_{ij})$ takes its minimum value for the real state; this value is equal to the functional $I(\tau^{ij}, \varepsilon_{ij})$. On the other hand, of all

[1] Cf. footnote 8 on page 246.

the admissible states of the second kind, the functional $I_0(\tau_0^{ij}, \varepsilon_{ij}^0)$ takes, for the real state, its maximum value, this being equal to the functional $I(\tau^{ij}, \varepsilon_{ij})$.

To prove this, we shall show first that the physical relations (1.1) follow from the following generalized potential[1],

$$\Pi = \frac{1}{2} H^{\varkappa\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\varkappa\lambda} \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

that is

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{2.9}$$

The possibility of constructing the potential Π follows from the first property of the operational matrix $[H^{ijkl}]$.

Bearing in mind that the quantities ε_{ij} are linearly independent (they do not satisfy any additional relation such as, for instance, the incompressibility condition of the theory of plasticity), we obtain the determinant

$$|H^{ijkl}| \neq 0. \tag{2.10}$$

This condition secures the possibility of inverting the physical relations (1.1). Therefore, we can write

$$\varepsilon_{ij} = K_{ij\varkappa\lambda} \tau^{\varkappa\lambda}, \tag{2.11}$$

where the matrix $[K_{ijkl}]$ satisfies the condition

$$[H^{ijkl}]\,[K_{mnrs}] = [\delta^{ijkl}_{mnrs}]. \tag{2.12}$$

Therefore, there exists the generalized potential

$$\Omega = \frac{1}{2} K_{\varkappa\lambda\mu\nu} \tau^{\varkappa\lambda} \tau^{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

from which follows the physical relations (2.11)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau^{ij}}. \tag{2.14}$$

The generalized potentials Π and Ω satisfy the condition

$$\Pi + \Omega = \tau^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{\varkappa\lambda} \tag{2.15}$$

and, on the basis of the second property proved for the matrix $[H^{ijkl}]$, *Legendre*'s conditions

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda} \partial \varepsilon_{\mu\nu}} \eta_{\varkappa\lambda} \eta_{\mu\nu} > 0, \qquad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tau^{\varkappa\lambda} \partial \tau^{\mu\nu}} \bar{\eta}^{\varkappa\lambda} \bar{\eta}^{\mu\nu} > 0. \tag{2.16}$$

These conditions secure the positiveness of the *Weierstrass*' functions constructed for the potentials Π and Ω. We obtain, therefore, the following inequalities.

$$\Pi(\varepsilon_{ij}^*) - \Pi(\varepsilon_{ij}) - (\varepsilon_{\varkappa\lambda}^* - \varepsilon_{\varkappa\lambda}) \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{\varkappa\lambda}} > 0, \tag{2.17}$$

$$\Omega(\tau_0^{ij}) - \Omega(\tau^{ij}) - (\tau_0^{\varkappa\lambda} - \tau^{\varkappa\lambda}) \frac{\partial \Omega}{\partial \tau^{\varkappa\lambda}} > 0, \tag{2.18}$$

which, after transformation, lead to the relations

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_{\varkappa\lambda}^* \tau_*^{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda} \tau^{\varkappa\lambda}) - (\varepsilon_{\varkappa\lambda}^* - \varepsilon_{\varkappa\lambda}) \tau^{\varkappa\lambda} > 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_{\varkappa\lambda}^0 \tau_0^{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda} \tau^{\varkappa\lambda}) - (\tau_0^{\varkappa\lambda} - \tau^{\varkappa\lambda}) \varepsilon_{\varkappa\lambda} > 0. \tag{2.20}$$

Integrating these and taking the boundary conditions assumed into consideration, we obtain the proof of the validity of the above variational theorem, which may be expressed in the form of the following inequalities

$$\int_{S_u} (F_0^\varkappa u_\varkappa)\, dS - \frac{1}{2} \int_V (\tau_0^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^0)\, dV < \frac{1}{2} \int_{S_u} (F^\varkappa u_\varkappa)\, dS - \frac{1}{2} \int_{S_F} (F^\varkappa u_\varkappa)\, dS <$$
$$< \frac{1}{2} \int_V (\tau_*^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{\varkappa\lambda}^*)\, dV - \frac{1}{2} \int_{S_F} (F^\varkappa u_\varkappa^*)\, dS. \tag{2.21}$$

[1] *W. Olszak* and *P. Perzyna*, Arch. Mech. Stos. 4 (1958).

The theorem just proved is expressed in finite quantities (not by the rates or increments as in the papers[1] and[2]). This result is a consequence of the linearity of the physical relations (1.1).

On the other hand, in the theory of plasticity, when taking the strain hardening effect into consideration, the physical relations are non-linear and unintegrable. In the theory of plasticity, the variational theorem may, therefore, not be represented in the integral form (2.21).

This determines also the boundary conditions. If these are to be stated in a correct way, the form of the physical relations should be taken into consideration.

From the point of view of practical applications, the theorem formulated in the form of the inequality (2.21) may be directly used, thus enabling the solution of quasi-static rheological problems by approximate methods.

3. In this part of the paper we shall proceed to the formulation of the variational theorem for the general model of an anisotropic rheological body taklng the influence of *the temperature* Θ into consideration.

This is done by writing the physical relations in the form[3],

$$\tau^{ij} = H^{ij\varkappa\lambda}\varepsilon_{\varkappa\lambda} - \beta^{ij}\Theta\,. \tag{3.1}$$

Now, the generalized potentials (2.8) and (2.13) will be given by the following functions

$$\overline{\Pi} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda} + \frac{1}{2}\Theta\beta^{\varkappa\lambda}\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,, \tag{3.2}$$

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda} - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\varkappa\lambda}\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,. \tag{3.3}$$

Since

$$\left[\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{kl}}\right] = [H^{ijkl}]\,, \qquad \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial\tau^{ij}\,\partial\tau^{kl}}\right] = [K_{ijkl}]\,, \tag{3.4}$$

are positive definite matrices known from the second part of this paper, we can obtain, from the condition of positiveness of the *Weierstrass'* functions constructed for the potentials (3.2) and (3.3), the following inequalities

$$\frac{1}{2}(\varepsilon^{*}_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}_{*} - \varepsilon_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}) - \frac{1}{2}\Theta\beta^{\varkappa\lambda}(\varepsilon^{*}_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda}) - (\varepsilon^{*}_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda})\tau^{\varkappa\lambda} > 0\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon^{0}_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}_{0} - \varepsilon_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}) + \frac{1}{2}\Theta\beta^{\varkappa\lambda}(\varepsilon^{0}_{\varkappa\lambda} - \varepsilon_{\varkappa\lambda}) - (\tau^{\varkappa\lambda}_{0} - \tau^{\varkappa\lambda})\varepsilon_{\varkappa\lambda} > 0\,. \tag{3.6}$$

Assuming the boundary conditions as in the second part of the paper and integrating the inequalities (3.5) and (3.6), we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{S_u}(F^{\varkappa}_{0}\,u_{\varkappa})\,dS - \frac{1}{2}\int_{V}(\varepsilon^{0}_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}_{0})\,dV + \frac{1}{2}\int_{V}(\Theta\beta^{\varkappa\lambda}\varepsilon^{0}_{\varkappa\lambda})\,dV < \\
&< \frac{1}{2}\int_{S_u}(F^{\varkappa}\,u_{\varkappa})\,dS - \frac{1}{2}\int_{S_F}(F^{\varkappa}\,u_{\varkappa})\,dS + \frac{1}{2}\int_{V}(\Theta\beta^{\varkappa\lambda}\varepsilon_{\varkappa\lambda})\,dV < \\
&< \frac{1}{2}\int_{V}(\varepsilon^{*}_{\varkappa\lambda}\tau^{\varkappa\lambda}_{*})\,dV - \int_{S_F}(u^{*}_{\varkappa}\,F^{\varkappa})\,dS + \frac{1}{2}\int_{V}(\Theta\beta^{\varkappa\lambda}\varepsilon^{*}_{\varkappa\lambda})\,dV\,.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(Eingegangen am 31. Oktober 1958.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. Ing. Dr. techn. *W. Olszak* u. Mgr. Ing. *P. Perzyna*, Abt. f. Mechanik der kontinuierlichen Medien, Polnische Akademie der Wissenschaften, Palac Kultury i Nauki, Warschau/Polen.

[1] Cf. footnote 3 on page 246.
[2] Cf. footnote 1 on page 249.
[3] Cf. footnote 7 on page 246.

Spannungen beim Abkühlen einer Kugel

Von **H. Parkus**

Wenn ein Körper ungleichmäßig erwärmt wird, können die entstehenden Spannungen so große Werte annehmen, daß örtlich die Fließgrenze überschritten wird. Nach dem Abkühlen ist der Körper dann nicht spannungsfrei.

Die Berechnung der „Restspannungen" ist im allgemeinen ziemlich schwierig und gelingt, wenn man nicht auf rein numerische Verfahren zurückgreifen will, nur bei Körpern mit hinreichend einfacher geometrischer Form und nur unter sehr weitgehend vereinfachenden Voraussetzungen bezüglich der Werkstoffeigenschaften. Ein solcher Fall liegt z. B. bei einer Kugel aus ideal elastisch-plastischem, inkompressiblem Werkstoff vor, die sich auf einer vorgegebenen Anfangstemperatur T_0 befindet und deren Oberfläche zur Zeit $t = 0$ plötzlich auf die Temperatur Null[1] abgekühlt und weiterhin auf dieser Temperatur gehalten wird. *Lomakin* hat diesen Fall behandelt.[2] Seine Untersuchungen geben aber zu einigen Zweifeln Anlaß. Das Problem soll deshalb im Nachstehenden neuerlich aufgegriffen werden.

Die Werkstoffbeiwerte seien von der Temperatur unabhängig angenommen. Da inkompressibles Material vorausgesetzt wird, ist die Volumdehnung proportional der Temperaturänderung (von dynamischen Effekten sehen wir ab):

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\,\frac{u}{r} = 3\,\alpha\,(T - T_0)\,. \tag{1}$$

Hierin ist $u(r, t)$ die Radialverschiebung und α die Wärmedehnzahl. Mit Berücksichtigung von $u(0, t) = 0$ folgt aus (1) durch Integration

$$u(r, t) = \alpha\, r\,[\overline{T}(r, t) - T_0]\,, \tag{2}$$

wobei

$$\overline{T}(r, t) = \frac{3}{r^3}\int_0^r x^2\, T(x, t)\, dx\,. \tag{3}$$

die mittlere Temperatur in der Kugel vom Radius r ist.

Der Verschiebungszustand ist also vom Spannungszustand und damit vom Auftreten etwaiger Fließbereiche unabhängig. Man kann nun aus ihm mittels des Spannungs-Dehnungsgesetzes und der Fließbedingung den Spannungszustand berechnen.

Im elastischen Bereich möge das *Hooke*sche Gesetz gelten, während als Fließbedingung die *Huber-Mises*sche Bedingung angenommen sei, die hier mit σ_r als Radial- und σ_φ als Umfangsspannung lautet

$$\sigma \equiv \sigma_\varphi - \sigma_r = \pm\,\sigma_0\,.$$

σ_0 ist die Fließgrenze für Zug. Drückt man die Spannungen mittels des *Hooke*schen Gesetzes durch die Verschiebungen aus und berücksichtigt Gleichung (2), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma} &= 6\,G\,\alpha\,(\overline{T} - T) \quad \text{für} \quad \overline{T} - T \leq \sigma_0/(6\,G\,\alpha)\,. \\ \bar{\sigma} &= \sigma_0 \qquad\qquad\quad \text{für} \quad \overline{T} - T \geq \sigma_0/(6\,G\,\alpha)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bei der Vorzeichenwahl in $\bar{\sigma}$ wurde davon Gebrauch gemacht, daß im vorliegenden Fall der Abkühlung der Kugel stets $\overline{T} - T \geq 0$ ist. Der Temperaturverlauf ist in Abb. 1 dargestellt[3]. Er wird als Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,T)}{\partial r^2}$$

[1] Es handelt sich hier natürlich um Temperaturdifferenzen gegenüber einer beliebigen Bezugstemperatur.

[2] *V. A. Lomakin*, Elastisch-plastisches Gleichgewicht einer Kugel in einem instationären Temperaturfeld. (Russisch.) Prikl. Mat. Mekh, 19 (1955) 244.

[3] *Carslaw-Jaeger:* Conduction of heat in solids. Oxford 1947, S. 200.

mit der Anfangsbedingung $T = T_0$ für $t = 0$ und der Randbedingung $T = 0$ in $r = R$ für $t > 0$ erhalten[1] und lautet:

$$T(r, t) = \frac{2 R T_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n \pi r}{R} e^{-a n^2 \pi^2 t / R^2} .$$

Die Beziehungen (4) gelten solange, als an der betreffenden Stelle die „Vergleichspannung" $\bar{\sigma}$ zunimmt oder zumindest nicht abnimmt, d. h. solange $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T} - T) \geq 0$ ist. Für $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T} - T) < 0$ tritt Entlastung ein und die Spannungen folgen wieder dem *Hooke*schen Gesetz.

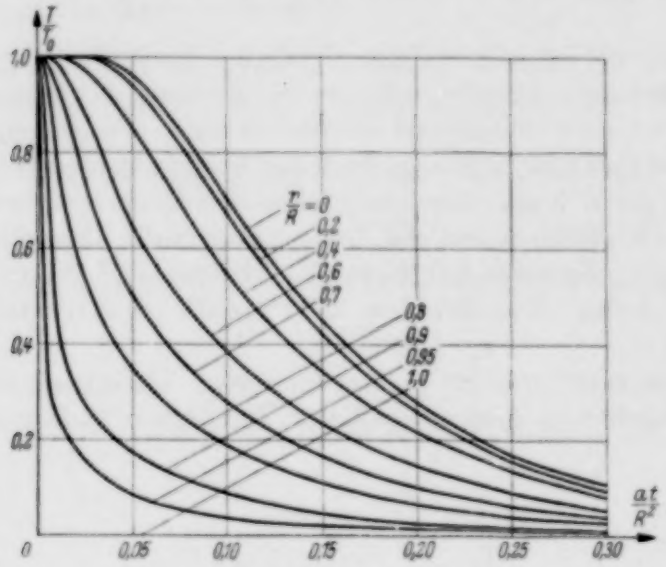


Abb. 1. Temperaturverlauf in der Kugel.

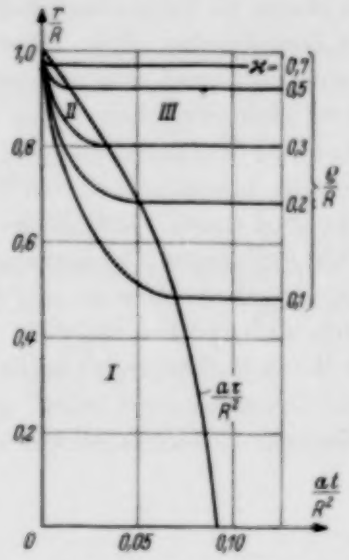


Abb. 2. Elastischer Fließ- und Entlastungsbereich.

Wir bezeichnen jetzt mit $\varrho(t)$ diejenige Stelle $r = \varrho$, an der zur Zeit t Fließen beginnt, und mit $\tau(r)$ denjenigen Zeitpunkt, in dem an der Stelle r Entlastung einsetzt. $\varrho(t)$ ist gemäß Gleichung (4) durch

$$\overline{T}(\varrho, t) - T(\varrho, t) = \frac{\sigma_0}{6 G \alpha} \tag{5}$$

und $\tau(r)$ ist durch

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T} - T)\Big|_{t=\tau} = 0 \tag{6}$$

bestimmt. In Abb. 2 sind ϱ/R und $a\tau/R^2$ als Funktionen des dimensionslosen Radius r/R und der dimensionslosen Zeit at/R^2 aufgetragen[1], wobei der Kugeldurchmesser $2R$ beträgt. ϱ hängt von der Fließgrenze für Zug $\sigma_0 = \varkappa K$ ab, mit $K = 6 G \alpha T_0$. Den Kurven wurden die Werte $\varkappa = 0{,}1$, 0,2, 0,3, 0,5 und 0,7 zugrundegelegt.

Man entnimmt der Abbildung, daß bei noch nicht zu weit fortgeschrittener Abkühlung drei Bereiche auftreten: ein elastischer Bereich I, ein plastischer Bereich II, in dem $\overline{T} - T$ zunächst noch weiter ansteigt, und schließlich ein ursprünglich plastischer Bereich III, in dem aber bereits Entlastung eingetreten ist. Während also die Gleichungen (4) nur für $t \leq \tau(r)$ gelten, ist nach dem Entlastungsgesetz für beliebiges t

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\sigma} = 6 G \alpha [\overline{T}(r, t) - T(r, t)] , && \text{Bereich I} \\ &\bar{\sigma} = \sigma_0 , && \text{Bereich II} \\ &\bar{\sigma} = \sigma_0 - 6 G \alpha [\overline{T}(r, \tau) - T(r, \tau) - \overline{T}(r, t) + T(r, t)] . && \text{Bereich III} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mit weiter fortschreitender Zeit tritt schließlich im ganzen plastischen Bereich — und anschließend natürlich auch im elastischen Gebiet — Entlastung ein. Der Bereich II verschwindet dann und die Grenze zwischen den Bereichen I und III wird durch $r = \varrho_0 = \varrho(\tau)$ gebildet.

Der Spannungszustand kann jetzt sofort angegeben werden. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{2}{r}(\sigma_\varphi - \sigma_r) = \frac{2}{r} \bar{\sigma}$$

[1] a ist die „Temperaturleitzahl" des Werkstoffes.

ergibt sich durch Integration unter Berücksichtigung der Randbedingung $\sigma_r = 0$ in $r = R$:

$$\sigma_r = -2 \int_r^R \frac{\bar{\sigma}(x,t)}{x}\, dx \,. \tag{8}$$

$\bar{\sigma}$ ist durch Gleichung (7) gegeben. Im besonderen erhält man für die vor allem interessierenden Restspannungen mit $T = 0$ für $t \to \infty$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^0 &= 12\, G\, \alpha \int_{\varrho_0}^R \{\overline{T}[x,\tau(x)] - T[x,\tau(x)]\} \frac{dx}{x} - 2\,\sigma_0 \ln \frac{R}{\varrho_0} \quad \text{für} \quad r \le \varrho_0\,, \\ \sigma_r^0 &= 12\, G\, \alpha \int_r^R \{\overline{T}[x,\tau(x)] - T[x,\tau(x)]\} \frac{dx}{x} - 2\,\sigma_0 \ln \frac{R}{r} \quad \text{für} \quad r \ge \varrho_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Restspannung in Umfangsrichtung ist mit $\sigma_\varphi = \sigma_r + \bar{\sigma}$ gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\varphi^0 &= \sigma_r^0 \quad \text{für} \quad r \le \varrho_0\,, \\ \sigma_\varphi^0 &= \sigma_r^0 + \sigma_0 - 6\, G\, \alpha\, \{\overline{T}[r,\tau(r)] - T[r,\tau(r)]\} \quad \text{für} \quad r \ge \varrho_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Der Kugelkern $r \le \varrho_0$ befindet sich also nach dem Abkühlen in einem Zustand allseits gleichen Zuges.

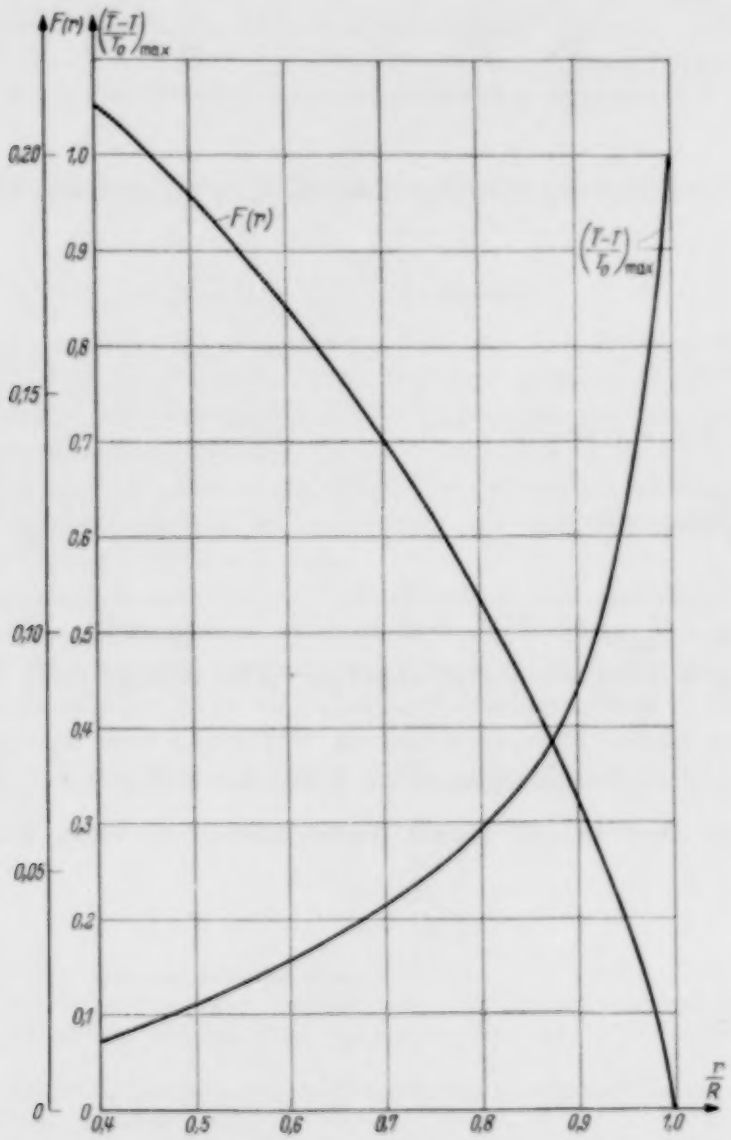


Abb. 3. Die Funktionen $\left(\frac{\overline{T}-T}{T_0}\right)_{max}$ und $F(r)$.

Die Formeln (7) bis (10) gelten nur dann, wenn beim Abkühlen die Fließgrenze nicht neuerlich (in der entgegengesetzten Richtung) überschritten wird. Der Maximalwert von $\overline{T} - T$ tritt an der Oberfläche $r = R$ zur Zeit $t = 0$ auf und ist gleich T_0. Somit ist gemäß Gleichung (10)

$$|\bar{\sigma}|_{max} = |\sigma_0 - 6\, G\, \alpha\, T_0| = (1 - \varkappa)\, K = \frac{1-\varkappa}{\varkappa}\sigma_0$$

und dieser Wert darf nicht größer sein als der Betrag σ_0' der Fließgrenze für Druck. Da die Fließgrenze mit wachsender Temperatur abnimmt, wird im allgemeinen $\sigma_0' > \sigma_0$ sein. Ist im besonderen $\sigma_0' = \sigma_0$, so muß $1/2 \leq \varkappa < 1$ sein, damit neuerliches Fließen nicht eintritt. Für $\varkappa \geq 1$ bleibt die gesamte Kugel elastisch. Restspannungen sind dann nicht vorhanden.

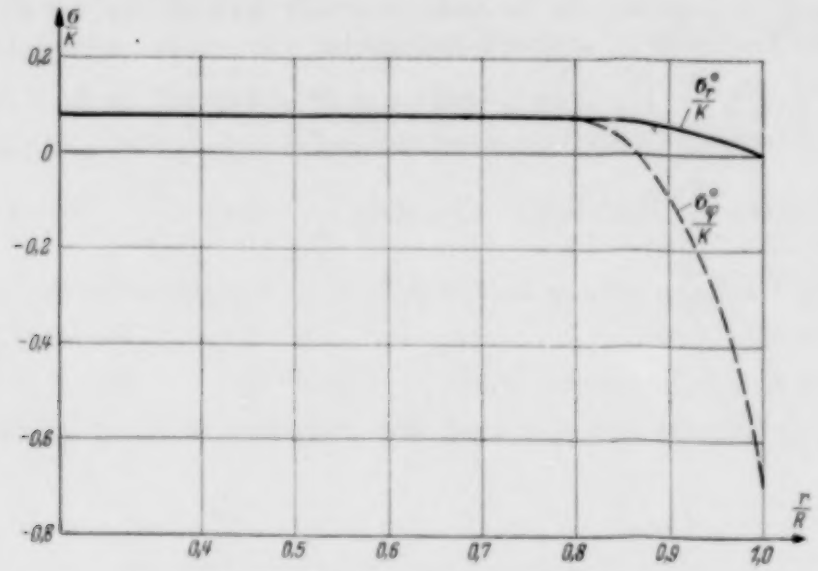


Abb. 4. Restspannungen nach dem Auskühlen.

Für die numerische Auswertung schreibt man die Gleichungen mit Einführung der Funktion

$$F(r) = \int_{r/R}^{1} \left(\frac{\overline{T} - T}{T_0}\right)_{max} \frac{dx}{x}$$

zweckmäßig in der Form

$$\sigma_r^0(r) = \begin{cases} 2K\left[F(\varrho_0) + \varkappa \ln\frac{\varrho_0}{R}\right], & r \leq \varrho_0 \\ 2K\left[F(r) + \varkappa \ln\frac{r}{R}\right], & r \geq \varrho_0 \end{cases} \qquad \sigma_\varphi^0(r) = \begin{cases} \sigma_r^0, & r \leq \varrho_0 \\ \sigma_r^0 + K\left[\varkappa - \left(\frac{\overline{T} - T}{T_0}\right)_{max}\right], & r \geq \varrho_0 . \end{cases}$$

Die Funktionen $\left(\frac{\overline{T} - T}{T_0}\right)_{max}$ und $F(r)$ sind in Abb. 3 dargestellt. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Restspannungen für beliebiges $\varkappa$ sofort angeben. Abb. 4 zeigt ihren Verlauf für $\varkappa = 0{,}3$.

(Eingegangen am 4. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Parkus*, Techn. Hochschule Wien, Wien IV/50, Karlsplatz 13.

Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen

Von **E. Pestel** und **O. Mahrenholtz**

Die Eigenfrequenzen linearer schwingungsfähiger Systeme werden heute in zunehmendem Maße mit Hilfe des Verfahrens der Übertragungsmatrizen bestimmt[1,2,3,4,5,6], das man z. B. bei Stabwerken häufig wie folgt anwendet: Das gegebene System wird in ein Ersatzsystem mit n Abschnitten umgeformt, deren erster die Länge Null habe (vgl. Abb. 1)[7]. Von links beginnend numerieren wir die Orte unmittelbar hinter den Ersatzmassen mit $i = 1, 2, \ldots, n$. Mit $i = 0$ bezeichnen wir den Ort am Anfang des Systems. Der Eigenschwingungszustand am Ort i, gekennzeichnet durch $2r$ Zustandsgrößen wie Auslenkung, Neigung, Moment, Querkraft, Drillwinkel, Drillmoment etc., wird durch den Zustandsvektor $\mathfrak{z}_i$ beschrieben. Die Eigenschaften des Abschnittes i — d. i. derjenige Abschnitt, hinter dessen Ersatzmasse der Ort i liegt — fassen wir in den Elementen einer „Übertragungsmatrix" $\mathfrak{U}_i$ zusammen. Ausgehend vom Zustand am Ort i ergibt sich dann für den Zustand am Ort $i+1$

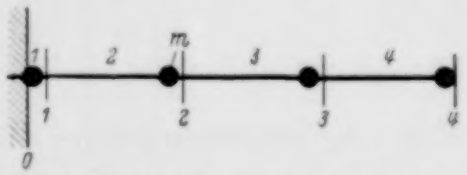


Abb. 1. Einseitig eingespannter Träger. Biegesteifigkeit $E \cdot J = 1/6$; Länge der Abschnitte $l_2 = l_3 = l_4 = 1$; $l_1 = 0$; Gesamtmasse M; Einzelmassen $m_i = m$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\mathfrak{z}_{i+1} = \mathfrak{U}_{i+1} \cdot \mathfrak{z}_i \,. \tag{1}$$

Durch Elimination aller zwischen 0 und n liegenden Zustandsvektoren erhalten wir dann

$$\mathfrak{z}_n = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{z}_0 \tag{2}$$

mit

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_n \cdot \mathfrak{U}_{n-1} \ldots \mathfrak{U}_2 \cdot \mathfrak{U}_1 \,. \tag{3}$$

An den Orten $i = 0$ und $i = n$ verschwinden aufgrund der Randbedingungen i. a. je r Zustandsgrößen. Damit liefert (2) für die r unbekannten Zustandsgrößen am Ort 0 ein homogenes Gleichungssystem mit r Gleichungen, das nichttriviale Lösungen nur für die i. a. diskreten Eigenwerte $\omega = \omega_k$ (Kreiseigenfrequenz) besitzt, deren Index $k = 1, 2, 3, \ldots$ ihre Ordnung angibt. Für $\omega = \omega_k$ verschwindet also die Determinante Δ des obigen Gleichungssystems; damit ist das Aufsuchen von Eigenfrequenzen hier gleichbedeutend mit dem Bestimmen der Nullstellen einer Parabel $\Delta = \Delta(\omega^2)$ von i. a. $(n-1)$-ten Grade.

Wir wollen die vorstehend beschriebene Methode an einem einfachen Beispiel erläutern, das uns gestattet, auf numerische Mängel des Verfahrens hinzuweisen, die zu beseitigen Ziel dieser Arbeit ist. Gegeben sei ein einseitig eingespannter Balken mit der konstanten Biegesteifigkeit $E \cdot I$. Wir teilen die Balkenmasse M in vier gleiche Einzelmassen $m = M/4$ auf, von denen eine in die Einspannstelle gelegt wird (Abb. 1)[8]. Es sei $E\,I = 1/6$, ferner entsprechend Abb. 1 die Länge der Abschnitte 2, 3, 4 gleich $l = 1$. Wir führen den Zustandsvektor $\mathfrak{z}_i$ wie folgt ein:

$$\mathfrak{z}_i = \begin{bmatrix} -w_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ Q_i \end{bmatrix}$$

[1] *Falk* bezeichnet diese Methode als Reduktionsverfahren.

[2] *H. Fuhrke*, Exakte und näherungsweise Bestimmung von Stabwerkschwingungen. Diss. T. H. Darmstadt 1953, Ref. Prof. *K. Marguerre*, Korref. Prof. *K. Karas*. Ing.-Arch. 23 (1955) S. 329 und Ing.-Arch. 24 (1956) S. 27.

[3] *H. Unger*, Matrizenverfahren bei linearen Differentialgleichungsproblemen. Internat. Kolloquium ü. Probleme der Rechentechnik, Dresden 1955.

[4] *G. Schumpich*, Beitrag zur Kinetik und Statik ebener Stabwerke mit gekrümmten Stäben. Diss. T. H. Hannover, Ref. Prof. *E. Pestel*, Korref. Prof. *K. Jaeckel*. Oesterr. Ing.-Arch. 11 (1957) S. 194.

[5] *S. Falk*, Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 7 (1955) S. 74.

[6] *E. Pestel*, Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 6 (1954) S. 227.

[7] Natürlich sind auch Ersatzsysteme mit kontinuierlicher Massenbelegung verwendbar.

[8] Wir haben dann drei Eigenfrequenzen zu berechnen, denen folgende Werte entsprechen: $m\,\omega_1^2 = 0{,}0145$; $m\,\omega_2^2 = 0{,}55$; $m\,\omega_3^2 = 4{,}40$ (vgl. Abb. 2). Für den gleichen Balken mit der kontinuierlich verteilten Gesamtmasse M ergeben sich die folgenden (analytisch berechneten) Werte $m\,\omega_1^2 = 0{,}0190$; $m\,\omega_2^2 = 0{,}746$; $m\,\omega_3^2 = 5{,}87$.

mit w_i als Auslenkung, ψ_i als Neigung, M_i als Moment und Q_i als Querkraft. Für die Übertragungsmatrizen erhalten wir[1]

$$\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{U}_4 = \begin{bmatrix} 1 & l = 1 & \frac{l^2}{2E \cdot I} = 3 & \frac{l^2}{6E \cdot I} = 1 \\ 0 & 1 & \frac{l}{E \cdot I} = 6 & \frac{l^2}{2E \cdot I} = 3 \\ 0 & 0 & 1 & l = 1 \\ m\,\omega^2 & m\,l\,\omega^2 = m\,\omega^2 & \frac{m\,l^2\,\omega^2}{2E \cdot I} = 3\,m\,\omega^2 & 1 + \frac{m\,l^3\,\omega^2}{6E \cdot I} = 1 + m\,\omega^2 \end{bmatrix}$$

und entsprechend

$$\mathfrak{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\,\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Randbedingungen am Ort 0 ist

$$\mathfrak{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{bmatrix},$$

während die am Ort 4

$$\mathfrak{z}_4 = \begin{bmatrix} -w_4 \\ \psi_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vorschreiben. Zur Erfüllung des Gleichungssystems

$$\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{U}_4\,\mathfrak{U}_3\,\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_1\,\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{z}_0$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} u_{11}\,0 + u_{12}\,0 + u_{13}\,M_0 + u_{14}\,Q_0 &= -w_4 \\ u_{21}\,0 + u_{22}\,0 + u_{23}\,M_0 + u_{24}\,Q_0 &= \psi_4 \\ u_{31}\,0 + u_{32}\,0 + u_{33}\,M_0 + u_{34}\,Q_0 &= 0 \\ u_{41}\,0 + u_{42}\,0 + u_{43}\,M_0 + u_{44}\,Q_0 &= 0 \end{aligned}$$

ist erforderlich

$$\Delta = \Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} u_{33} & u_{34} \\ u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir brauchen also nur vier der insgesamt 16 Elemente von $\mathfrak{U}$ zu berechnen. Für $m\,\omega^2 = 1$ folgt[2]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 22 & 14 \\ 84 & 55 \end{vmatrix} = 22 \cdot 55 - 14 \cdot 84 = 1210 - 1176 = 34,$$

für $m\,\omega^2 = 3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 82 & 42 \\ 558 & 289 \end{vmatrix} = 82 \cdot 289 - 42 \cdot 558 = 23\,698 - 23\,436,$$

$$\Delta = 262.$$

So fortschreitend könnten wir $\Delta(\omega^2)$ punktweise berechnen und aus den Nullstellen dieser Funktion die Eigenfrequenzen ermitteln. Wir sehen jedoch, daß die Elemente von $\mathfrak{U}$ verglichen mit denen von $\mathfrak{U}_i$ mit steigendem ω stark anwachsen und Δ somit eine kleine Differenz sehr großer Zahlen wird (die gewählten Werte $m\,\omega^2 = 1$ und $m\,\omega^2 = 3$ liegen zwischen der zweiten und dritten Eigenfrequenz). Je nach der verfügbaren Stellenzahl liefert das Verfahren bei höheren Eigenfrequenzen ungenaue Werte und kommt schließlich zum Erliegen.

Dieser rein rechnerischen Schwierigkeit kann man dadurch begegnen, daß man für die von Null verschiedenen Zustandsgrößen des Zustandsvektors $\mathfrak{z}_0$ in Abhängigkeit von ω geschätzte Werte einsetzt, die den „wirklichen" Werten nahekommen und danach die $\mathfrak{z}_i$ schrittweise von

[1] Die Übertragungsmatrizen sind dem Katalog von Übertragungsmatrizen zur Berechnung technischer Schwingungsprobleme von *E. Pestel, G. Schumpich* und *S. Spierig* entnommen. Er erscheint demnächst im VDI-Verlag, Düsseldorf.

[2] Dabei ist davon Gebrauch gemacht, daß im vorliegenden Falle $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{U}_1 \cdot \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_0$ und damit $\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{U}_4 \cdot \mathfrak{U}_3 \cdot \mathfrak{U}_2 \cdot \mathfrak{z}_0$ ist, was auch mit Hinweis auf Abb. 1 sofort einleuchtet.

$i = 1$ bis $i = n$ berechnet[1]. Hat der Vektor $\mathfrak{z}_{\delta 0}$ $2r$ Zustandsgrößen, so verschwinden i. a. r von ihnen. Um die Beschreibung zu vereinfachen, ordnen wir $\mathfrak{z}_{\delta 0}$ (und damit $\mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{U}$) so um, daß jene die Zeilen $p = 1, 2, \ldots, r$ belegen. Auf die $r+1$-te Zeile wird eine mit der Dimension der betreffenden Zustandsgröße behaftete „1" gesetzt, da bei Eigenschwingungen nur das Verhältnis der Zustandsgrößen zueinander interessiert:

$$\mathfrak{z}^0_{\delta 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ \lambda^0_1 \\ \lambda^0_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \lambda^0_{r-1} \end{bmatrix} \Big\} r + \varkappa^0_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} + \varkappa^0_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \varkappa^0_{r-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Die Größen λ^0_p sind die vorerwähnten geschätzten (Zahlen-)Werte und die Größen $\varkappa^0_p$ aus den Randbedingungen bei $\mathfrak{z}_{\delta n}$ zu bestimmende Korrekturfaktoren, mit deren Hilfe λ^0_p in der Form

$$\lambda^1_p = \lambda^0_p + \varkappa^0_p \tag{5}$$

verbessert wird. Bevor diese allgemeine Entwicklung der Methode fortgesetzt wird, soll die Vorgehensart zunächst mit Hilfe eines einfachen Zahlenbeispiels erläutert werden, für das wir den Fall des einseitig eingespannten Trägers (Abb. 1) nochmals heranziehen. Im Hinblick darauf, daß hier $2r = 4$ ist, folgt

$$\mathfrak{z}^0_{\delta 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda^0_1 \end{bmatrix} + \varkappa^0_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Wir beginnen die Rechnung mit einer Frequenz entsprechend $m\,\omega^2 = 1$; da dieser Wert nur wenig oberhalb der zweiten Eigenfrequenz liegt sind noch keine rechnerischen Schwierigkeiten zu erwarten. Daher wird der Einfachheit halber $\lambda^0_1 = 1$ gesetzt. Mit (1) erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \varkappa^0_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}^0_{\delta 1},$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \varkappa^0_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}^0_{\delta 2},$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 24 \\ 36 \\ 7 \\ 29 \end{bmatrix} + \varkappa^0_1 \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}^0_{\delta 3},$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 110 \\ 165 \\ 36 \\ 139 \end{bmatrix} + \varkappa^0_1 \begin{bmatrix} 44 \\ 66 \\ 14 \\ 55 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}^0_{\delta 1}.$$

[1] *D. Csupor*, Methoden zur Berechnung der freien Schwingungen des Schiffskörpers. Diss. T. H. Hannover 1955, Ref. Prof. *G. Weinblum*, Korref. Prof. *E. Pestel* und Prof. *K. Wendel*. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 50 (1956) S. 206. — Diese Art der Bestimmung von Eigenfrequenzen geht auf *Csupor* zurück, der sie für die Fälle $2r = 4$ und $2r = 6$ verwendet hat. *Csupor* verbesserte die geschätzten Anfangswerte nicht systematisch, sondern wenn die Rechnung zahlenmäßig auszubrechen drohte.

Aus $\mathfrak{z}_{\delta 1}^{0}$ folgen unter Beachtung der Randbedingungen zwei Gleichungen für die Unbekannte $\varkappa_1^0$:

$$36 + 14\,\varkappa_1^0 = 0\,, \qquad 139 + 55\,\varkappa_1^0 = 0\,.$$

Für den Fall, daß beide Gleichungen denselben Wert $\varkappa_1^0$ liefern, wären sie voneinander linear abhängig, d. h. ihre Determinante würde verschwinden. Somit ließen sich bei dem gewählten ω beide Randbedingungen gleichzeitig erfüllen, d. h. ω wäre eine Eigenfrequenz ω_k. Für $\omega \neq \omega_k$ ergeben vorstehende Gleichungen zwei verschiedene Lösungen für $\varkappa_1^0$, die mit x_1^0 und y_1^0 bezeichnet werden und im vorliegenden Fall folgende Werte annehmen:

$$x_1^0 = -\,36/14 = -\,2{,}5714\,, \qquad y_1^0 = -\,139/55 = -\,2{,}5273\,.$$

Die Differenz $x_1^0 - y_1^0$ wollen wir mit „Restgröße" $R^0 = R^0(\omega^2)$ bezeichnen. Sie steht mit der Determinante $\Delta = \Delta(\omega^2)$ in folgender Beziehung:

$$-\,R_0\,u_{34}\,u_{44} = \Delta(\omega^2)$$

und tritt damit an die Stelle der Determinantenberechnung des üblichen Verfahrens.

$$R^0 = x_1^0 - y_1^0 = 0$$

ist also die Bedingung für $\omega = \omega_k$. Im hier erörterten Beispiel ergibt sich

$$x_1^0 - y_1^0 = -\,0{,}044.$$

Wir bilden nun das arithmetische Mittel der beiden Zahlenwerte x und y für den Korrekturfaktor $\varkappa$ und setzen diesen Wert

$$\frac{1}{2}\,(x_1^0 + y_1^0) = -\,2{,}55$$

als Korrekturfaktor $\varkappa_1^0$ in (6) ein. Dann ist der Anfangsvektor

$$\mathfrak{z}_{\delta 0}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\,1{,}55 \end{bmatrix},$$

der wie folgt verbessert werden soll

$$\mathfrak{z}_{\delta 1}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\,1{,}55 \end{bmatrix} + \varkappa_1^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mit diesem $\mathfrak{z}_{\delta 1}^{0}$ wiederholen wir nun die Rechnung für dasselbe ω:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\,1{,}55 \end{bmatrix} + \varkappa_1^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}_{\delta 1}^{1}\,,$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}45 \\ 1{,}35 \\ -\,0{,}55 \\ -\,0{,}10 \end{bmatrix} + \varkappa_1^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}_{\delta 2}^{1}\,,$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1{,}05 \\ -\,2{,}25 \\ -\,0{,}65 \\ 0{,}95 \end{bmatrix} + \varkappa_1^1 \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}_{\delta 3}^{1}\,,$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\,2{,}20 \\ -\,3{,}30 \\ 0{,}30 \\ -\,1{,}25 \end{bmatrix} + \varkappa_1^1 \begin{bmatrix} 44 \\ 66 \\ 14 \\ 55 \end{bmatrix} = \mathfrak{z}_{\delta 4}^{1}\,.$$

Wir erkennen, daß die Elemente der ersten Spalte von $\mathfrak{z}_{\delta i}^{1}$ im Gegensatz zu denjenigen von $\mathfrak{z}_{\delta i}^{0}$ klein geblieben sind und daß sich daher x_1^1 und y_1^1 bei gleichem Rechenaufwand genauer berechnen lassen. Mit den Randbedingungen am Ort 4 ergibt sich

$$x_1^1 = -0{,}30/14 = -0{,}0214\,,$$
$$y_1^1 = +1{,}25/55 = +0{,}0227$$

und damit

$$R^1(\omega^2) = x_1^1 - y_1^1 = -0{,}044 = R^0(\omega^2) = R(\omega^2)\,,$$

unabhängig von λ_1. Ferner erhalten wir

$$\varkappa_1^1 = 1/2\,(x_1^1 + y_1^1) = 0 \text{ (im Rahmen der Rechengenauigkeit)},$$

d. h. die Iteration ist folglich nach dem ersten Schritt bereits beendet.

Bei der Berechnung von $R(\omega^2)$ geht man nun allgemein so vor, daß man von ω_h^2 kommend um $\Delta\omega^2$ fortschreitend $R\,(\omega_{h+1}^2 = \omega_h^2 + \Delta\omega^2)$ mit $\lambda_1^0\,(\omega^2 = \omega_{h+1}^2) = \lambda_1^1\,(\omega^2 = \omega_h^2)$ berechnet. Die so gewonnene Restgröße zeigt Abb. 2, in der $R(\omega^2)$ über $m\,\omega^2$ aufgetragen ist. Diesem Bild können wir die den drei Eigenfrequenzen entsprechenden Werte $m\omega_1^2 = 0{,}0145$, $m\omega_2^2 = 0{,}55$ und $m\omega_3^2 = 4{,}40$ entnehmen.

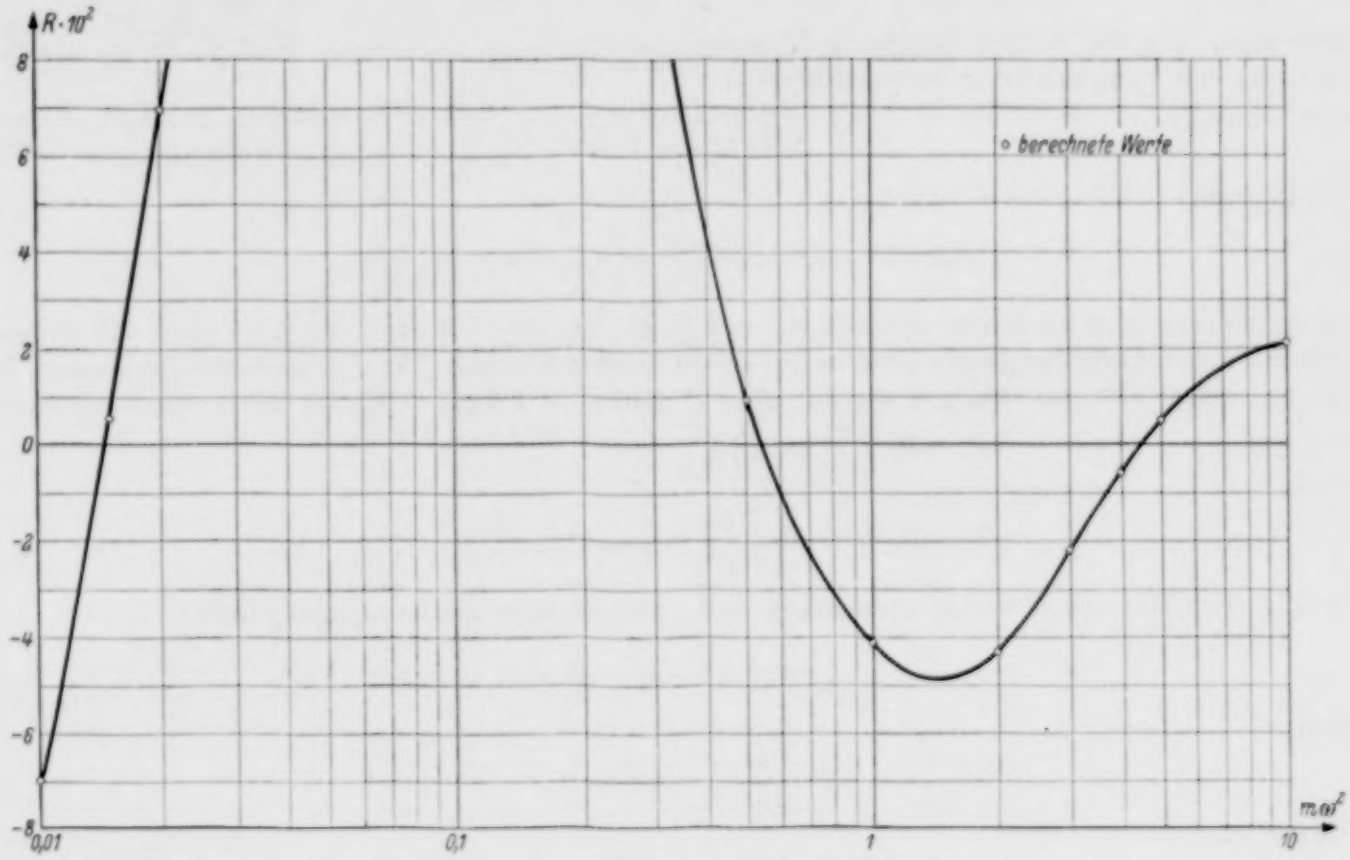


Abb. 2. Restgröße R abhängig vom Frequenzmaß $m\,\omega^2$.

Bevor wir den allgemeinen Fall eines Systems mit $2\,r$ Zustandsgrößen behandeln, wenden wir uns dem technisch wichtigen Fall $2\,r = 6$ (z. B. Biegung mit Längskraft oder Biegung mit Torsion; Rahmen etc.) zu. Hier ist

$$\mathfrak{z}_{\delta 0}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \end{bmatrix} + \varkappa_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \varkappa_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aus (1) folgt

$$\mathfrak{z}_{\delta n}^{0} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{z}_{\delta 0}^{0}.$$

Die Gesamtübertragungsmatrix $\mathfrak{U}$ [vgl. (3)], deren Elemente u_{ik} seien, betrachten wir hier lediglich, um $\varkappa_1, \varkappa_2$ analytisch zu bestimmen. Den Zustandsvektor $\mathfrak{z}_{\delta n}^0$ ordnen wir so um, daß seine ersten drei Elemente Null sind. Dann erhalten wir mit (5) drei nichthomogene Gleichungen für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$:

$$\left.\begin{aligned} u_{14} + u_{15}(\lambda_1^0 + \varkappa_1^0) + u_{16}(\lambda_2^0 + \varkappa_2^0) &= 0\,, \\ u_{24} + u_{25}(\lambda_1^0 + \varkappa_1^0) + u_{26}(\lambda_2^0 + \varkappa_2^0) &= 0\,, \\ u_{34} + u_{35}(\lambda_1^0 + \varkappa_1^0) + u_{36}(\lambda_2^0 + \varkappa_2^0) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Es gebe eine von Null verschiedene Unterdeterminante, etwa

$$\begin{vmatrix} u_{15} & u_{16} \\ u_{25} & u_{26} \end{vmatrix} \neq 0\,;$$

ferner sei z. B. $u_{36} \neq 0$. Aus den beiden ersten Gleichungen (7) ergeben sich dann (mit $\varkappa_p = x_p$)

$$x_1^0 = -\lambda_1^0 + \Delta_1/\Delta_3$$

und

$$x_2^0 = -\lambda_2^0 + \Delta_2/\Delta_3\,,$$

worin

$$\Delta_1 = \begin{matrix} u_{16} & u_{14} \\ u_{26} & u_{24} \end{matrix}\,, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u_{14} & u_{15} \\ u_{24} & u_{25} \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} u_{15} & u_{16} \\ u_{25} & u_{26} \end{vmatrix}$$

bedeuten. Aus der dritten Gleichung (7) errechnen wir mit $\varkappa_1^0 = x_1^0$ einen Wert y_2^0 für $\varkappa_2^0$, der für $\omega \neq \omega_k$ von x_2^0 verschieden ist [vgl. $R(\omega^2)$]:

$$y_2^0 = -\lambda_2^0 - \left[\left(u_{34} + u_{35}\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)\frac{1}{u_{36}}\right].$$

Dann ergibt sich für die Restgröße

$$R_2(\omega^2) = x_2^0 - y_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} + \left[u_{34} + u_{35}\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)\frac{1}{u_{36}}\Bigg].$$

R ist bei festem ω wiederum unabhängig von λ_1^0, λ_2^0. Für $R_2 = 0$ ist $\omega = \omega_k$, da dann alle vorgeschriebenen Randbedingungen gleichzeitig erfüllt werden können. Für den nächsten Rechendurchgang bei demselben ω erhalten wir mit $\varkappa_1^0 = x_1^0$ und $\varkappa_2^0 = 1/2\,(x_2^0 + y_2^0)$ die neuen Ausgangswerte

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^0 + \varkappa_1^0 = \Delta_1/\Delta_3$$

und

$$\lambda_2^1 = \lambda_2^0 + \varkappa_2^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_2}{\Delta_3} - \left(u_{34} + u_{35}\frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)\frac{1}{u_{36}}\right],$$

welche ebenfalls von λ_1^0 und λ_2^0 unabhängig sind. Ein erneuter Rechnungsgang liefert

$$\varkappa_1^1 = x_1^1 = -\lambda_1^1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_3} = 0$$

und

$$\varkappa_2^1 = \frac{1}{2}\,(x_2^1 + y_2^1) = 0\,.$$

Damit wird

$$x_2^1 = -y_2^1$$

und wegen

$$R_2(\omega^2) = x_2^1 - y_2^1$$

gilt

$$x_2^1 = -y_2^1 = \frac{1}{2}\,R(\omega^2)\,,$$

d. h. x_2^1 und y_2^1 sind bei festem ω nach der ersten Verbesserung von gleicher Größenordnung wie R_2 selbst, so daß sich das Kriterium für die Eigenfrequenzen nicht als kleine Differenz großer Zahlen wie beim üblichen Verfahren, sondern als Differenz kleiner Zahlen ergibt.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß für den allgemeinen Fall eines Systems mit $2\,r$ Zustandsgrößen alle Korrekturwerte $\varkappa_p^1$ für festes ω Null werden, d. h. daß alle λ_p^1 $(p = 1, 2, \ldots, r-1)$ von den λ_p^0 unabhängig sind. Aus $\mathfrak{z}_{\delta n}^0 = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{z}_{\delta 0}^0$ ergeben sich r Gleichungen für die $r-1$ Unbekannten $\varkappa_p^0$, die nur für $\omega = \omega_k$ lösbar sind. Für $\omega \neq \omega_k$ beschränken wir uns auf ein Gleichungssystem vom Rang $r-1$. Dann gibt es ein nichthomogenes Teilgleichungssystem mit nicht verschwindender Determinante. Es besitze die Lösungen x_p^0 $(p = 1, 2, \ldots, r-1)$. In der bisher nicht verwendeten

Gleichung trete wenigstens eine Unbekannte — z. B. $\varkappa_s^0$ — mit von Null verschiedenem Koeffizienten auf[1]. Für die anderen $\varkappa_p^0$ $(p \neq s)$ dieser Gleichung substituieren wir die errechneten x_p^0 und gewinnen ebenso wie in den beiden bereits behandelten Fällen für $\varkappa_s^0$ einen weiteren Wert, nämlich y_s^0. Die Restgröße definieren wir wiederum durch

$$R_s(\omega^2) = x_s^0 - y_s^0 . \tag{8}$$

Ferner gelte auch hier

$$\varkappa_p^0 = \begin{cases} x_p^0 & \text{für} \quad p \neq s \\ 1/2\,(x_s^0 + y_s^0) & \text{für} \quad p = s \end{cases} . \tag{9}$$

Aus $\mathfrak{z}_n^0$ erhalten wir das folgende System von r linearen, nichthomogenen Gleichungen für $\varkappa_p^0$ $(p = 1, 2, \ldots, r-1)$:

$$\left.\begin{aligned}
&u_{11}(\lambda_1^0 + \varkappa_1^0) + \cdots + u_{1p}(\lambda_p^0 + \varkappa_p^0) + \cdots + u_{1s}(\lambda_s^0 + \varkappa_s^0) + \cdots \\
&\qquad + u_{1,r-1}(\lambda_{r-1}^0 + \varkappa_{r-1}^0) + u_1 = 0 \quad (1) , \\
&\vdots \\
&u_{p1}(\lambda_1^0 + \varkappa_1^0) + \cdots + u_{pp}(\lambda_p^0 + \varkappa_p^0) + \cdots + u_{ps}(\lambda_s^0 + \varkappa_s^0) + \cdots \\
&\qquad + u_{p,r-1}(\lambda_{r-1}^0 + \varkappa_{r-1}^0) + u_p = 0 \quad (p) , \\
&\vdots \\
&u_{r1}(\lambda_1^0 + \varkappa_1^0) + \cdots + u_{rp}(\lambda_p^0 + \varkappa_p^0) + \cdots + u_{rs}(\lambda_s^0 + \varkappa_s^0) + \cdots \\
&\qquad + u_{r,r-1}(\lambda_{r-1}^0 + \varkappa_{r-1}^0) + u_r = 0 \quad (r) .
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Das Gleichungssystem (10) (1), ..., (p), ..., $(r-1)$ möge eine von Null verschiedene Determinante haben. Für $\varkappa_p^0$ gilt dann mit (9)

$$\varkappa_p^0 = x_p^0 = -\lambda_p^0 + \Delta_p/\Delta_N$$

mit Δ_N als der Determinante des Gleichungssystems vom Rang $r-1$ und Δ_p als der x_p^0 zugehörigen Zählerdeterminante dieses Systems:

$$\Delta_N = \begin{vmatrix}
u_{11} & \cdots & u_{1p} & \cdots & u_{1s} & \cdots & u_{1,r-1} \\
u_{21} & \cdots & u_{2p} & \cdots & u_{2s} & \cdots & u_{2,r-1} \\
\vdots & & & & & & \\
u_{p1} & \cdots & u_{pp} & \cdots & u_{ps} & \cdots & u_{p,r-1} \\
\vdots & & & & & & \\
u_{r-2,1} & \cdots & u_{r-2,p} & \cdots & u_{r-2,s} & \cdots & u_{r-2,r-1} \\
u_{r-1,1} & \cdots & u_{r-1,p} & \cdots & u_{r-1,s} & \cdots & u_{r-1,r-1}
\end{vmatrix} ,$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix}
u_{1,p+1} & \cdots & u_{1,r-1} & u_1 & u_{11} & \cdots & u_{1,p-1} \\
u_{2,p+1} & \cdots & u_{2,r-1} & u_2 & u_{21} & \cdots & u_{2,p-1} \\
\vdots & & & & & & \\
u_{p,p+1} & \cdots & u_{p,r-1} & u_p & u_{p1} & \cdots & u_{p,p-1} \\
\vdots & & & & & & \\
u_{r-2,p+1} & \cdots & u_{r-2,r-1} & u_{r-2} & u_{r-2,1} & \cdots & u_{r-2,p-1} \\
u_{r-1,p+1} & \cdots & u_{r-1,r-1} & u_{r-1} & u_{r-1,1} & \cdots & u_{r-1,p-1}
\end{vmatrix} .$$

Mit (5) wird

$$\lambda_p^1 = \lambda_p^0 + \varkappa_p^0 = \Delta_p/\Delta_N \qquad \text{für} \quad p \neq s$$

unabhängig von λ_p^0. Dann folgt

$$\varkappa_p^1 = -\lambda_p^1 + \Delta_p/\Delta_N = x_p^1 = 0 \quad \text{für} \quad p \neq s .$$

Entsprechendes gilt für $\varkappa_s^1 = 1/2\,(x_s^1 + y_s^1)$. Aus der r-ten Gleichung (10) erhalten wir mit $\varkappa_p^0 = x_p^0$ für $p \neq s$ für $\varkappa_s^0$ den Wert y_s^0 wie folgt:

$$y_s^0 = -\lambda_s^0 - \frac{1}{u_{rs}}\left(u_r + u_{r1}\frac{\Delta_1}{\Delta_N} + \cdots + u_{rp}\frac{\Delta_p}{\Delta_N} + \cdots + u_{r,s-1}\frac{\Delta_{s-1}}{\Delta_N} + u_{r,s+1}\frac{\Delta_{s+1}}{\Delta_N} + \cdots + u_{r,r-1}\frac{\Delta_{r-1}}{\Delta_N}\right).$$

Die Restgröße wird somit wieder unabhängig von λ_p^0:

$$R_s(\omega^2) = x_s^0 - y_s^0 = \left\{\frac{\Delta_s}{\Delta_N} + \frac{1}{u_{rs}}\left(\quad\right)\right\} .$$

[1] Technische Probleme erfüllen i. a. die beiden gestellten Bedingungen.

Weiter folgt

$$\varkappa_s^0 = \frac{1}{2}(x_s^0 + y_s^0) = -\lambda_s^0 + \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_s}{\Delta_N} - \frac{1}{u_{rs}}\left(\quad\right)\right].$$

Entsprechend wird der verbesserte Wert

$$\lambda_s^1 = \lambda_s^0 + \varkappa_s^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_s}{\Delta_N} - \frac{1}{u_{rs}}\left(\quad\right)\right],$$

also ebenfalls unabhängig von λ_p^0. Damit ergeben sich x_s^1 und y_s^1 zu

$$x_s^1 = -y_s^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_s}{\Delta_N} + \frac{1}{u_{rs}}\left(\quad\right)\right] = \frac{1}{2}R(\omega^2),$$

d. h. auch

$$\varkappa_s^1 = \frac{1}{2}(x_s^1 + y_s^1) = 0.$$

Wir fassen das Ergebnis des allgemeinen Falles, der natürlich die Resultate der Spezialfälle $2r = 4$ und $2r = 6$ enthält, zusammen: Für ein festes ω wird $\varkappa_p^1 = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, r-1)$ unabhängig von λ_p^0 und $R_s(\omega^2) = 1/2\,[R_s - (-R_s)]$ eine Differenz, deren Glieder von gleicher Größenordnung sind und die nicht mehr kleine Differenz sehr großer Zahlen ist.

Bei der theoretischen Betrachtung der Werte $\varkappa_p$ wurde aus Gründen vereinfachter Darstellung mit der Gesamtübertragungsmatrix $\mathfrak{U}$ gerechnet. Bei der zahlenmäßigen Durchführung des Verfahrens gehen wir jedoch wie im vorgeführten Zahlenbeispiel $(2r = 4)$ schrittweise von einem Zustandsvektor zum nächsten über und erhalten so schließlich

$$\mathfrak{z}_n^0 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{2\cdot r} \end{bmatrix} + \varkappa_1^0 \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \vdots \\ g_{2\cdot r,1} \end{bmatrix} + \cdots + \varkappa_p^0 \begin{bmatrix} g_{1p} \\ g_{2p} \\ \vdots \\ g_{2\cdot r,p} \end{bmatrix} + \cdots + \varkappa_s^0 \begin{bmatrix} g_{1s} \\ g_{2s} \\ \vdots \\ g_{2\cdot r,s} \end{bmatrix} + \cdots + \varkappa_{r-1}^0 \begin{bmatrix} g_{1,r-1} \\ g_{2,r-1} \\ \vdots \\ g_{2\cdot r,r-1} \end{bmatrix}.$$

Im Hinblick auf die Randbedingungen bei n müssen r Gleichungen von $\mathfrak{z}_n^0$ gleich Null sein. Aus diesen n Gleichungen bestimmt man in der gezeigten Weise $\varkappa_p^0 = x_p^0$ für $p \neq s$ und $\varkappa_s^0 = 1/2\,(x_s^0 + y_s^0)$ für $p = s$, woraus sich $\lambda_p^1 = \lambda_p^0 + \varkappa_p^0$ $(p = 1, 2, \ldots, r-1)$ bestimmen läßt, das als λ_p^0 des folgenden Rechnungsganges dient, der mit einem neuen benachbarten Wert von ω durchgeführt wird (vgl. hierzu den bereits behandelten Fall $2r = 4$).

Die zu den Eigenfrequenzen gehörigen Eigenschwingungsformen findet man leicht durch Zusammenfassen der Spaltenvektoren von $\mathfrak{z}_{\delta i}^0$, wobei die errechneten Werte $\varkappa_p^0$ einzusetzen sind.

Als weiteres Zahlenbeispiel zu der beschriebenen Berechnungsmethode wurden die Biegeeigenfrequenzen $(2r = 4)$ eines zweifach gestützten homogenen Balkens durchgerechnet, der in $n = 30$ gleiche Abschnitte aufgeteilt wurde. Für die Zahlenrechnung wurde ein elektronisch arbeitender Digitalrechner (Typ IBM 650) eingesetzt, der bei sog. einfacher Genauigkeit acht Ziffern je Zahl besitzt. Die Rechnung wurde bei der 16. Eigenfrequenz abgebrochen, obwohl auch da noch keine Rechenschwierigkeiten aufgetreten waren. Dagegen konnte bei gleicher Stellenzahl mit dem üblichen Verfahren der Übertragungsmatrizen bereits die 7. Eigenfrequenz nicht mehr bestimmt werden.

(Eingegangen am 9. Dezember 1958.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel* und Dipl.-Ing. *O. Mahrenholtz*, Lehrstuhl für Mechanik, Technische Hochschule, Hannover.

Zur Theorie der Plattenbeulung im plastischen Materialbereich

Von **K.-A. Reckling**

1. Einleitung und Zielsetzung. Das Problem der plastischen Plattenbeulung ist schon häufig behandelt worden, kann aber immer noch nicht als theoretisch völlig geklärt angesehen werden. Die ersten Arbeiten auf diesem Gebiet brachten halb-empirische Lösungen, die dem Konstrukteur schon durchaus brauchbare Richtlinien vermittelten. Vom Standpunkt der mathematischen Plastizitätstheorie aus konnten sie jedoch nicht befriedigen. In den letzten beiden Jahrzehnten sind dann verschiedene Beultheorien aufgestellt worden, die von den Grundannahmen der Plastizitätstheorie ausgingen und teilweise auch schon die *Shanley*sche Konzeption der Instabilität im plastischen Materialbereich einschlossen; unter Ziffer 3 wird noch im einzelnen über diese Theorien berichtet werden. Wir können sie nach den ihnen zugrundeliegenden Spannungs-Deformationsgesetzen in zwei Hauptgruppen einteilen. Die Beultheorien der einen Gruppe gehen von den sog. differentiellen Gesetzen nach *Prandtl* und *Reuß* aus, durch welche die Komponenten des Tensors der Deformationsänderungen mit denen des Spannungstensors in der einfachsten überhaupt möglichen Form verknüpft sind, während die Theorien der anderen Gruppe die sog. finiten Gesetze nach *Hencky* voraussetzen, nach denen die Komponenten des Deformationstensors selbst den Komponenten des Spannungstensors proportional sind.

In der mathematischen Plastizitätstheorie[1] wird gezeigt, daß die finiten Gesetze nur dann zu in sich widerspruchsfreien Lösungen führen, die mit den aus differentiellen Gesetzen gewonnenen übereinstimmen, wenn sie auf solche Fälle angewendet werden, bei denen die Verhältnisse der Spannungskomponenten sich bei fortschreitender Belastung nicht ändern. Gerade bei der Beulung von Platten z. B. durch Normalspannungen ändern sich jedoch die Hauptspannungsachsen infolge der hinzutretenden Schubspannungen. Für die Behandlung von Beulproblemen sollten also die differentiellen Gesetze maßgebend sein; ihre Gültigkeit wurde für bestimmte Spannungskombinationen überdies auch bereits mehrmals (z. B. durch Rohrversuche) direkt experimentell nachgewiesen. Dem scheint jedoch der merkwürdige Sachverhalt entgegenzustehen, daß speziell die mit differentiellen Gesetzen errechneten Beulspannungen beträchtlich über den experimentell ermittelten liegen, während die aus finiten Gesetzen gewonnenen gut mit den Versuchswerten übereinstimmen.

Hieraus zu schließen, daß die differentiellen Gesetze ausgerechnet bei der Plattenbeulung nicht gelten, während sie sonst zu vernünftigen Resultaten führen, muß als eine etwas gewaltsame Beseitigung der geschilderten Diskrepanz erscheinen. Eher ist es naheliegend, bei der Aufstellung einer in sich widerspruchsfreien Beultheorie, deren Ergebnisse auch mit der Wirklichkeit übereinstimmen sollen, von erweiterten differentiellen Gesetzen auszugehen. Da sich das Material der in der Praxis verwendeten Bleche vielfach infolge des Walzvorgangs anisotrop verhält, erscheint es sinnvoll, die differentiellen Gesetze so zu erweitern, daß sie von vornherein eine orthogonale Walzanisotropie auch für den plastischen Materialbereich mitberücksichtigen. Dieser Weg soll — unter gleichzeitiger Anwendung der *Shanley*schen Theorie — im folgenden beschritten werden. Dazu wird zunächst einiges über diejenigen Grundlagen der isotropen mathematischen Plastizitätstheorie vorausgeschickt, an die bei der Aufstellung der anisotropen Gesetze unter Ziffer 4 anzuknüpfen sein wird.

2. Grundannahmen der mathematischen Plastizitätstheorie für isotropes Material. Der Spannungszustand wird durch den symmetrischen Spannungstensor σ_{ik} beschrieben, den man zweckmäßigerweise in den hydrostatischen Spannungszustand

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ik}\,\delta_{ik} \tag{1}$$

[1] Vgl. als Gesamtdarstellungen hierzu z. B.: *I. Szabó*, Höhere Technische Mechanik, S. 319, Berlin 1958; *A. M. Freudenthal* und *H. Geiringer* in Handbuch d. Physik, VI (1958) S. 229; *W. Prager* and *P. Hodge*, Theory of Perfectly Plastic Solids, London 1951; *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, 1950; *A. Nadai*, Theory of Flow and Fracture of Solids, New-York and London 1950; *W. Prager*, Journ. Appl. Physics 20 (1949) S. 235; *W. Prager*, Journ. of Appl. Mech., 15 (1948) S. 226.

und den Spannungsdeviator

$$\sigma'_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma\,\delta_{ik} \tag{2}$$

aufspaltet.[1]

Da der hydrostatische Spannungszustand erfahrungsgemäß die plastischen Deformationen praktisch nicht beeinflußt, hat die Aufspaltung den Vorzug, daß sich der Spannungszustand — wie man zeigen kann — besonders einfach durch die beiden Invarianten

$$I'_2 = \frac{1}{2}\sigma'_{ik}\,\sigma'_{ik}\,; \qquad I'_3 = \frac{1}{3}\sigma'_{ik}\,\sigma'_{kl}\,\sigma'_{li} \tag{3}$$

des Deviators ausdrücken läßt, wenn man beachtet, daß die Invariante

$$I'_1 = \sigma'_{ik}\,\delta_{ik} = 0 \tag{4}$$

ist.

Um einen in einem Bauteil aus verfestigendem Material herrschenden Spannungszustand mit einem anderen, insbesondere mit der einachsigen sog. Vergleichsspannung σ_v des Zug- bzw. Druckversuches in Beziehung setzen zu können, muß eine Belastungsfunktion von der allgemeinen Form $f(I'_2, I'_3) = h(\sigma_v)$ — für idealplastisches Material mit $h(\sigma_v) =$ konst. „Fließgesetz" genannt — bekannt sein. Die einfachste, überhaupt mögliche, stetig differenzierbare Beziehung dieser Art ist das Gesetz

$$f(I'_2) = I'_2 = \frac{1}{2}\sigma'_{ik}\,\sigma'_{ik} = \frac{1}{3}\sigma_v^2 \tag{5}$$

nach *R. von Mises*[2], in dem der Einfluß der Invariante I'_3 zwar vernachlässigt ist, das jedoch trotzdem nach Versuchen[3] auch für verfestigendes Material recht gut mit der Wirklichkeit übereinstimmt und daher dem folgenden zugrundegelegt werden soll. Das Vorzeichen von $df = dI'_2 = \sigma'_{ik}\,d\sigma'_{ik} = \frac{2}{3}\sigma_v d\sigma_v$ ist das Kriterium für Belastung und Entlastung: Während beim einachsigen Spannungszustand nur die Spannungsvariationen $d\sigma_v \gtrless 0$ einen physikalischen Sinn haben und $d\sigma_v = 0$ einfach anzeigt, daß die Spannung konstant gehalten wird, können sich die einzelnen Komponenten eines mehrachsigen Spannungszustandes auch bei $df = 0$ noch ändern. Durch $df = 0$ wird eine sog. „neutrale Spannungsvariation" gekennzeichnet, bei der die äquivalente Vergleichsspannung σ_v konstant bleibt, und bei der außerdem die plastische Arbeit pro Volumeneinheit

$$dA^p = dA - dA^e = \sigma_{ik}\,(d\varepsilon_{ik} - d\varepsilon^e_{ik}) = \sigma_{ik}\,d\varepsilon^p_{ik} \tag{6}$$

Null ist, so daß für $df = 0$ keine permanente Deformationsänderung $d\varepsilon^p_{ik} = d\varepsilon_{ik} - d\varepsilon^e_{ik}$ stattfindet.

Man kann dann die Beziehungen zwischen den Spannungen und den plastischen Deformationen in der allgemeinen Form[4]

$$d\varepsilon^p_{ik} = G_{ik}\,df = G_{ik}\,\sigma'_{lm} d\sigma'_{lm}$$

ansetzen, indem man einen symmetrischen, zu $d\varepsilon^p_{ik}$ koaxialen Tensor G_{ik} einführt, der von den Spannungskomponenten und evtl. vom vorhergegangenen Deformationsgeschehen abhängt. Da erfahrungsgemäß bei plastischen Deformationen keine Volumendilatation auftritt, muß wegen $d\varepsilon^p_{ik}\,\delta_{ik} = 0$ auch $G_{ik}\,\delta_{ik} = 0$ sein. Man kann nun den Tensor $G_{ik} = p\,\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ik}}$ aus einem plastischen Potential $g(\sigma_{ik})$ ableiten. Am einfachsten werden die Beziehungen, wenn man die Belastungsfunktion f selbst als plastisches Potential verwendet und die skalare Funktion p nur von der zweiten Invariante des Spannungsdeviators abhängen läßt. Wegen $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}\,\delta_{ik} = \sigma'_{ik}\,\delta_{ik} = I'_1 = 0$ nach (4) ist die Bedingung $d\varepsilon^p_{ik}\,\delta_{ik} = 0$ erfüllt, außerdem ist G_{ik} wegen $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}} = \sigma'_{ik}$ zu ε^p_{ik} koaxial. Das Spannungs-Deformationsgesetz lautet dann

$$d\varepsilon^p_{ik} = p(I'_2)\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}\,df = p(I'_2)\,\sigma'_{ik}\,dI'_2 = \sigma'_{ik}\,d\lambda \tag{7}$$

---

[1] In der zur Abkürzung gewählten Tensorschreibweise hat man den i, k die Werte 1, 2, 3 zu erteilen, so daß zum Vergleich mit der üblichen Schreibweise z. B. $\sigma_{11} = \sigma_x$; $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ usw. gilt; δ_{ik} bezeichne das *Kronecker*-Symbol. Ferner gelte die Summierungsvorschrift, nach der wiederholte Indizes in einer Größe wie z. B. $\sigma'_{ik}\,\sigma'_{ik}$ anzeigen, daß eine Summierung für alle Werte 1, 2, 3 von i und k auszuführen ist.

[2] Gött. Nachr., math.-phys. Klasse. (1913), S. 582—592.

[3] Vgl. z. B. die in *R. Hill*, (Fußn. 1) S. 14ff. angegebenen Arbeiten.

[4] Die beiden letzten Faktoren sind mit den Indizes $l\,m$ ausgezeichnet, da sie nur untereinander zu summieren sind.

für den plastischen Materialbereich ($d\lambda = p(I_2')\, dI_2' \geqq 0$). Es geht auf *R. von Mises*[1] zurück und ist die einfachste mögliche Form eines differentiellen Spannungs-Deformationsgesetzes („incremental law" in der angelsächsischen Literatur). Eine allgemeinere, wesentlich kompliziertere Form ergibt sich nach *W. Prager*[2], wenn man den Einfluß der Invariante I_3' berücksichtigt. Schreibt man (7), d. h. $d\varepsilon_{ik}^p = p(I_2')\, \sigma_{ik}'$ $(\sigma_{lm}'\, d\sigma_{lm}')$ in Komponentenform, so zeigt sich an den einzelnen Gliedern des in Klammern gesetzten Faktors dI_2', daß durch die Spannungen eine Art von Anisotropie hervorgerufen wird, insofern als z. B. die Schubspannungen die plastischen Dehnungen beeinflussen. Diese Anisotropie verschwindet aber bei Entlastung wieder und ist nicht mit einer von vornherein im Material vorhandenen, z. B. orthogonalen Walzanisotropie zu verwechseln.

L. Prandtl[3] und *E. Reuß*[4] haben das Gesetz (7) für solche Fälle erweitert, in denen die elastischen Deformationsänderungen $d\varepsilon_{ik}^e = d\varepsilon_{ik} - d\varepsilon_{ik}^p$ von gleicher Größenordnung wie die plastischen sind. Für die deviatorische Variation $d\varepsilon_{ik}' = d\varepsilon_{ik} - d\varepsilon\, \delta_{ik}$ erhielten sie mit $d\varepsilon_{ik}^p\, \delta_{ik} = 0$, $d\varepsilon = \frac{1}{3}\, d\varepsilon_{ik}^e\, \delta_{ik}$ und mit dem Schubelastizitätsmodul G das Gesetz

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ik}' &= \frac{d\sigma_{ik}'}{2G} + d\varepsilon_{ik}^p = \frac{d\sigma_{ik}'}{2G} + \sigma_{ik}'\, d\lambda \qquad (d\lambda \geqq 0)\,, \\ d\varepsilon_{ik}' &= \frac{d\sigma_{ik}'}{2G} \qquad\qquad\qquad\qquad (d\lambda \leqq 0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Es erfüllt die Übergangsbedingung zwischen dem Zustand der Belastung und Entlastung, d. h. bei einer neutralen Spannungsvariation ($d\lambda = 0$) wird wegen $d\varepsilon_{ik}^p = 0$ keine plastische Arbeit geleistet, für Entlastung ($d\lambda \leqq 0$) gilt das *Hooke*sche Gesetz. Wegen $d\lambda = q(\sigma_v)\, d\sigma_v$ ist das Differential $d\lambda$ mit dem äquivalenten einachsigen Spannungsdehnungsgesetz verknüpft.

Aus einer formellen Ausdehnung des *Hooke*schen Gesetzes auf den plastischen Bereich ist das sog. finite Spannungs-Deformationsgesetz („finite law")

$$\varepsilon_{ik}' = \left[\frac{1}{2G} + P(I_2')\right]\sigma_{ik}' = \frac{1}{\bar{G}(I_2')}\,\sigma_{ik}' \tag{9}$$

nach *H. Hencky*[5] entstanden, wobei der Wert $\bar{G}(I_2')$ vielfach als Plastizitätsmodul bezeichnet wird. Der Deformationszustand ist danach eindeutig durch den Spannungszustand bestimmt, die Hauptachsen beider Tensoren fallen zusammen. Die Ähnlichkeit mit dem *v. Mises*schen Gesetz (7) ist nur oberflächlich; denn schreibt man (9) in differentieller Form

$$d\varepsilon_{ik}' = \frac{1}{\bar{G}(I_2')}\, d\sigma_{ik}' + \frac{dP}{dI_2'}\, dI_2'\, \sigma_{ik}' \tag{9a}$$

so erkennt man, daß auch bei neutraler Spannungsvariation ($dI_2' = 0$) plastische Deformationsänderungen $d\varepsilon_{ik}^p = P(I_2')\, d\sigma_{ik}$ stattfinden, was der oben erwähnten Übergangsbedingung widerspricht, sofern nicht $\bar{G}(I_2') = G$ wäre; tatsächlich ist jedoch stets $\bar{G}(I_2') < G$. Beide Gesetze führen dann und nur dann zum gleichen Resultat, wenn die Hauptachsen während einer Belastungssteigerung ihre Richtung beibehalten, wenn also $\sigma_{ik} = C(\sigma_v)\, \sigma_{ik}^0$ ist, wobei σ_{ik}^0 einen konstanten Ausgangsspannungszustand und $C(\sigma_v)$ einen monoton anwachsenden Parameter bezeichnet. Dann kann man nämlich (8) integrieren und erhält mit $d\lambda = p(I_2')\, dI_2' = q(\sigma_v)\, d\sigma_v$

$$\varepsilon_{ik}' = \frac{\sigma_{ik}'}{2G} + \sigma_{ik}'^0 \int_{\sigma_{v0}}^{\sigma_v} C(\sigma_v)\, q(\sigma_v)\, d\sigma_v = \left[\frac{1}{2G} + \frac{1}{C(\sigma_v)} \int_{\sigma_{v0}}^{\sigma_v} C(\sigma_v)\, q(\sigma_v)\, d\sigma_v\right]\sigma_{ik}'\,,$$

was mit dem finiten Gesetz (9) übereinstimmt, da man für den zweiten Summanden $P(I_2')$ schreiben kann[6].

Abgesehen von diesen theoretischen Erwägungen sprechen auch Versuche, bei denen die Hauptspannungsrichtungen geändert wurden, zugunsten der differentiellen Gesetze: Insbesondere hat man z. B. beobachtet, daß in einem durch Normalspannungen bereits plastisch verformten, dünnen

[1] Vgl. Fußn. 2 von S. 264.
[2] Quart. Appl. Math. 4 (1947) S. 397.
[3] Proc. Ist. Int. Congr. Appl. Mech., Delft (1924) S. 43.
[4] Zeitschr. angew. Math. u. Mech. 10 (1930) S. 266.
[5] Zeitschr. angew. Math. u. Mech. 4 (1924) S. 323.
[6] Zum Vergleich zwischen finiten und differentiellen Gesetzen s. u. a. auch die in den Fußn. 1, S. 263 und 2,) S. 265 zitierten Arbeiten, sowie *D. C. Drucker*, Trans. A. S. M. E. (1949) S. 587; Journ. Appl. Mech. (1949 S. 349; Quart. Appl. Math. VII (1950) S. 148.

Rohr die Anfangsgleitung $d\gamma = 2\,d\varepsilon_{12} = d\tau/G$ in Übereinstimmung mit dem differentiellen Gesetz (8) auftritt, wenn man einen zusätzlichen Torsionsspannungszustand überlagert; man hat dagegen keinen plastischen Anteil $d\gamma^p = 2\,P(I_2')\,d\tau$ gemessen, wie er nach dem finiten Gesetz (9) zu erwarten gewesen wäre[1]. Es scheint daher nach allem sinnvoll, bei der Behandlung solcher Probleme der Plastizitätstheorie, bei denen die Hauptspannungsachsen ihre Richtung ändern, von differentiellen Gesetzen auszugehen, sofern nicht mathematische Schwierigkeiten dagegen sprechen.

3. Entwicklung der Beultheorie für Platten im plastischen Materialbereich. Die bereits vorliegenden umfassenden Gesamtdarstellungen über plastische Plattenbeulung[2] sollen hier nur insoweit ergänzt werden, als es zur Begründung der anschließend vorzunehmenden Erweiterung der Theorie nötig erscheint.

Völlig unabhängig von den der Lösung des Beulproblems zugrundegelegten plastizitätstheoretischen Grundannahmen kann man ganz allgemein die bekannte Differentialgleichung der Beulfläche $w(x, y)$ einer durch Normalspannungen σ_x, σ_y in ihrer Mittelebene belasteten, dünnen elastischen Platte in kartesischen Koordinaten für den plastischen Materialbereich modifizieren, indem man an Stelle der Konstanten des Operators $\Delta\Delta w$ Koeffizienten einführt, die im allgemeinen noch von den Randspannungen und den plastischen Materialeigenschaften abhängig sein werden. Die Hauptaufgabe besteht dann darin, die drei Koeffizienten C_x, C_{xy} und C_y in der Plattengleichung

$$C_x\, w_{,xxxx} + 2\, C_{xy}\, w_{,xxyy} + C_y\, w_{,yyyy} = -\frac{h}{D}\,(\sigma_x\, w_{,xx} + \sigma_y\, w_{,yy}) \tag{10}$$

zu ermitteln, wobei hinter einem Komma stehende Indizes partielle Differentiation kennzeichnen. Rein formal ist das die Gleichung der orthotropen Platte aus elastischem Material, die bei vorgegebenen Konstanten C_x usw. zuerst von *M. T. Huber*[3] behandelt wurde. Würde man daher die Koeffizienten auch für den plastischen Beulfall von vornherein kennen, so käme man verhältnismäßig einfach zu einer Lösung, ohne die Plastizitätstheorie heranziehen zu müssen. Das gelingt jedoch nur, wenn man vereinfachende Näherungsannahmen einführt. *S. Timoshenko*[4] hat als erster eine derartige Näherungstheorie aufgestellt, indem er vorschlug, die Steifigkeit einer auf einseitigen Druck im plastischen Bereich beanspruchten Platte in Druckrichtung wie bei der plastischen Knickung eines einfachen Stabes herabzumindern und senkrecht dazu unverändert zu lassen. Bezeichnet man das Verhältnis des „reduzierten Moduls" E_r zum Elastizitätsmodul E mit $\tau = E_r/E$, so ergeben sich die Koeffizienten

$$C_x = \tau, \qquad C_{xy} = \sqrt{\tau}\,, \qquad C_y = 1$$

wobei C_{xy} nur ziemlich willkürlich abgeschätzt werden kann; die Platte verhält sich also beim Ausbeulen anisotrop.

M. Roš und *A. Eichinger*[5] sowie *E. Chwalla*[6] kommen zu einer noch einfacheren Gleichung, indem sie annehmen, daß die Platte beim Beulen isotrop bleibt. Die Rechnung ist bei beiden Annahmen grundsätzlich nicht schwieriger als für die elastische Platte, allerdings kommt man nur auf iterativem Wege zum Ziel, da τ eine durch Versuche vorgegebene Funktion von σ_x ist.

Geht man von der *Shanley*schen Instabilitätstheorie[7] für den plastischen Bereich aus, d. h. von der Fragestellung nach der kleinsten Belastung, unter der ein Bauteil unter gleichzeitiger Laststeigerung von der geraden in die ausgebogene Lage übergehen wird, wobei keine Spannungsumkehr im Querschnitt erfolgen soll, so ist in der Näherungsrechnung als reduzierter Modul E_r der Tangentenmodul einzusetzen, d. h. der Anstieg der σ_v-ε_v-Kurve für den Belastungsbereich, der bereits von *F. Engesser*[8] in dessen erster Arbeit über plastisches Knicken vorgeschlagen wurde. Die später

[1] Vgl. z. B. *J. L. M. Morrison* and *W. M. Shepherd*, Proc. Inst. Mech. Eng. (1950); *F. Stüssi*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Phys. 1 (1950) S. 254; *A. Phillips*, Journ. of Appl. Mech. 19 (1952) Nr. 4, S. 496; *K. Hohenemser* und *W. Prager*, Zeitschr. angew. Math. u. Mech. 12 (1932) S. 1. In einer Arbeit von *P. P. Bijlaard*, Journ. Appl. Mech. 23 (1956) S. 27, wird allerdings über hiervon abweichende Versuchsergebnisse berichtet.

[2] Z. B. in *F. Bleich*, Buckling Strength of Metal Structures, New York, London 1952 und *C. F. Kollbrunner* und *M. Meister*, Ausbeulen, Berlin 1958.

[3] Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, Warschau 1929.

[4] Ann. ponts chaussées IV (1913) S. 410; auch Theory of Elastic Stability (1936) S. 384 desselb. Autors. Eine Weiterentwicklung stammt von *F. Bleich*; näheres hierzu Fußn. 2 von S. 266.

[5] Final Rept. Ist. Congr. Intern. Assoc. Bridge and Struct. Eng., Paris (1932) S. 144

[6] Ing.-Arch. 5 (1934) S. 54.

[7] Vgl. zur *Shanley*-Theorie u. a. *F. R. Shanley*, Journ. Aeron. Sc. 14 (1947) S. 257; Strength of Materials S. 581, New-York 1957; *C. F. Kollbrunner* und *M. Meister*, Knicken, S. 17, Berlin 1955; *F. Schleicher*, Taschenb. f. Bauing. I. Bd., S. 970 u. 1007, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955; *A. Pflüger*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 291; sowie die in Fußn. 2, S. 266 gen. Werke.

[8] Zeitschr. f. Arch. u. Ing.-wesen (1889) S. 455.

von *Engesser*[1] veränderte und von *Th. v. Kármán*[2] neu aufgestellte plastische Knicktheorie, die auf den sog. Doppelmodul oder Knickmodul führt, liefert dagegen einen nur theoretisch interessierenden oberen Grenzwert für die Knickspannung.

Obwohl z. B. *C. F. Kollbrunner*[3] recht gute Übereinstimmung der auf diesem Wege berechneten Näherungswerte der Bruchspannungen mit den Ergebnissen zahlreicher Versuche feststellte und darüberhinaus für verschiedene Randbedingungen Korrekturfaktoren zur noch besseren Anpassung der Rechnung an die Wirklichkeit mitteilte, hat man damit natürlich noch keine theoretisch befriedigende Lösung des plastischen Beulproblems gefunden. Es sind daher verschiedene Arbeiten entstanden, in denen die Grundannahmen der mathematischen Plastizitätstheorie auf das Beulproblem angewendet wurden. Zur Gruppe der von finiten Gesetzen ausgehenden Theorien sind insbesondere die von *P. P. Bijlaard*[4] und *A. Ilyushin*[5] zu nennen. Während *Bijlaard* in seinen neueren Arbeiten bereits die *Shanley*sche Hypothese berücksichtigt, nimmt *Ilyushin* noch an, daß in den Plattenquerschnitten Entlastungs- und Belastungsbereiche nebeneinander existieren. *E. Z. Stowell*[6] hat die Theorie von *Ilyushin* abgeändert und vereinfacht, indem er von *Shanley*s Annahme ausging und durch einen Kunstgriff teilweise den Einfluß der unrealistischen Annahme inkompressiblen elastischen Materialverhaltens ($\nu_e = 0{,}5$) durch *Ilyushin* eliminierte. Die Differentialgleichung der Plattenbeulung hat bei allen diesen Arbeiten die allgemeine Form der Gleichung (10), wobei die drei Koeffizienten auf der linken Seite in mehr oder weniger komplizierter Weise von den Spannungen σ_x, σ_y und dem äquivalenten einachsigen Spannungs-Dehnungsgesetz abhängen. Während *Ilyushin*s Theorie zu große Beulspannungen ergibt — was durch die Annahme $\nu_e = 0{,}5$ und die Benutzung des *Engesser-Kármán*schen Knickmoduls erklärt werden mag —, stimmen die nach den beiden anderen Theorien errechneten Beulspannungen und Wellenzahlen offenbar befriedigend mit der Wirklichkeit überein.

Die differentiellen Gesetze führen im allgemeinen zu größeren mathematischen Schwierigkeiten als die finiten, nicht dagegen bei der Behandlung von Stabilitätsproblemen. Da hier stets infinitesimale Änderungen der Konfiguration untersucht werden, müssen die finiten Gesetze sowieso in differentieller Form benutzt werden, wie das auch tatsächlich bei allen im vorigen Absatz genannten Arbeiten geschehen ist. Für die Anwendung der finiten Gesetze auf das Beulproblem liegt also kein zwingender Grund vor, gegen ihre Anwendung ist aber gerade das unter Ziff. 2 Gesagte einzuwenden: Beim Ausbeulen einer z. B. durch einseitigen homogenen Druck σ_x belasteten Rechteckplatte tritt zur Grundspannung σ_x im Nachbarzustand die Schubspannung $d\tau_{xy}$ hinzu, die Hauptachsenrichtungen werden verdreht. Die plastische Gleitung $d\gamma_{xy}$ ist nach dem differentiellen Gesetz (8) Null, nach dem finiten Gesetz (9a) dagegen $2\,p(I_2')\,d\tau_{xy}$, genau so wie beim Rohrversuch. Dieser Unterschied wirkt sich insbesondere auf die Größe des Koeffizienten C_{xy} der Gleichung (10) und damit auf die Beulspannung erheblich aus; sie fällt wegen des fehlenden plastischen Anteils im mittleren Koeffizienten größer aus als die mit dem finiten Gesetz errechnete Spannung. Daß die Beulversuche diesen Sachverhalt eigenartigerweise nicht bestätigen, daß sie also insbesondere nicht mit den Ergebnissen der auf differentiellen Gesetzen basierenden, bisher wohl umfassendsten Theorie von *H. G. Hopkins*[7] übereinstimmen, wurde bereits einleitend erwähnt. Da nicht einzusehen ist, warum sich das Plattenmaterial im Kleinen nach dem differentiellen Gesetz — wie beim Rohrversuch —, beim Beulversuch selbst dagegen nach dem finiten Gesetz verhalten sollte, ist es naheliegend, die sich auf die differentiellen Gesetze gründende Theorie zu erweitern. Es wurde bereits vorgeschlagen[8], eine von vornherein vorhandene geringe Abweichung der Plattenmittelfläche von der Ebene zu berücksichtigen. Im folgenden soll ein anderer Weg eingeschlagen werden: Die Theorie soll so erweitert werden, daß der Einfluß einer von vornherein im Blech vorhandenen Walz-

---

[1] Schweiz. Bauztg. 26 (1895) S. 24.

[2] Phys. Zeitschr. 9 (1908) S. 136.

[3] Vgl. die in den unter Fußn. 2, S. 266 genannten Werken aufgeführten Versuchsergebnisse, sowie Mitt. 17 aus dem Inst. f. Baustatik der E. T. H. Zürich 1946.

[4] Vgl. Abhandlg. d. Intern. Vereins f. Brückenbau u. Hochbau VI, Zürich 1940/41; Mitt. Nr. 21 aus d. Inst. f. Baust. a. d. E. T. H. Zürich 1947; Journ. Aeron. Sc. 16 (1949) S. 529 und die dort zitierten Arbeiten.

[5] Prikl. Math. i. Mekh. USSR 8 (1944) S. 337. Übersetzung mit Zusätzen als Mitt. Nr. 20 aus dem Inst. f. Baustatik der E. T. H. Zürich 1947.

[6] NACA Techn. Note 1556, 1946; Auszug in *Bleich*, S. 13, Fußn. 2, S. 266.

[7] Quart. of Appl. Math. 11 (1953) S. 185; vgl. auch die Arbeiten von *G. H. Handelmann* and *W. Prager*, NACA Techn. Note, Nr. 1530, 1948; *C. E. Pearson*, Journ. Aeron. Sc. 17 (1950) S. 417; *H. G. Hopkins*, Research Eng. Struc. Supplement, 2 of the Colston Papers, London 1949; in denen das Problem ähnlich, jedoch weniger allgemein, insbesondere ohne Berücksichtigung der *Shanley*schen Hypothese behandelt wurde.

[8] Vgl. *E. T. Onat* und *D. C. Drucker*, Journ. Aeron Sc. 20 (1953) S. 181 und weitere dort zitierte Arbeiten.

anisotropie berücksichtigt werden kann. Dies erscheint auch im Hinblick auf Versuche[1] sinnvoll, die gezeigt haben, daß sich gerade dünne, gewalzte Bleche aus verfestigendem Material (z. B. aus Aluminium-Legierungen) sowohl im elastischen als auch im plastischen Materialbereich ausgesprochen anisotrop verhalten.

4. Erweiterung der Plastizitätstheorie für orthogonal-anisotropes Materialverhalten. Vorausgesetzt werde ein Material, das in drei zueinander senkrechten Richtungen, die als Hauptachsen der Anisotropie bezeichnet werden und mit den (x, y, z)-Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems übereinstimmen sollen, verschiedenes, jedoch zu den Achsen symmetrisches Verhalten zeigt. Als erster hat *R. Hill*[2] für derartiges Material ein Fließgesetz vorgeschlagen, das denkbar einfach ist und für den Sonderfall der Isotropie in das *v. Mises*sche Gesetz (5) übergeht. *Hill* wählt ebenso wie beim isotropen Material als Fließbedingung eine in den Spannungen homogene quadratische Funktion $f(\sigma_{ik})$, die einer Konstanten — z. B. der Spannung an der Fließgrenze — gleichgesetzt wird. In sinngemäßer Erweiterung auf verfestigendes Material kann die Belastungsfunktion

$$f(\sigma_{ik}) = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\left[\alpha_1(\sigma_x-\sigma_y)^2+\alpha_2(\sigma_x-\sigma_z)^2+\alpha_3(\sigma_y-\sigma_z)^2+2(\beta_1\tau_{xy}^2+\beta_2\tau_{xz}^2+\beta_3\tau_{yz}^2)\right] = \frac{1}{3}\sigma_v^2 \tag{11}$$

mit σ_v als Vergleichsspannung angesetzt werden, wobei die sechs Parameter das anisotrope Materialverhalten kennzeichnen. Für isotropes Material geht (11) mit $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1/3=\beta_2/3=\beta_3/3$ in das *v. Mises*sche Gesetz über. Die Anisotropieparameter werden im allgemeinen auch vom jeweiligen Verfestigungszustand abhängen, hier sollen sie jedoch zur Vereinfachung als Materialkonstanten angenommen werden. Da der Anisotropiezustand sich dann mit steigender Belastung nicht verändert, wird sich ein bestimmter Verfestigungszustand ebenso wie beim isotropen Material durch einen äquivalenten, einachsigen Spannungszustand σ_v ausdrücken lassen, wie es (11) aussagt.

Die Belastungsfunktion $f(\sigma_{ik})$ ist dann zwar koordinaten-invariant, kann allerdings nicht mehr wie beim isotropen Material direkt der Deviator-Invariante I_2' gleichgesetzt werden. Gleichwohl kann man sie auch hier als plastisches Potential auffassen und für die plastische Deformationsänderung wie unter Ziff. 2

$$d\varepsilon_{ik}^p = p(\sigma_v)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}df \tag{12}$$

ansetzen, nur mit dem Unterschied, daß p nicht mehr direkt von I_2', sondern vom Verfestigungszustand, d. h. von σ_v abhängt. Dieser Ansatz ist zulässig, da er wegen $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}\delta_{ik}=0$ — wie man leicht nachprüft — die Bedingung $d\varepsilon_{ik}^p\,\delta_{ik}=0$ der verschwindenden plastischen Volumendilatation erfüllt.

Der Verfestigungszustand — also σ_v bzw. $f(\sigma_{ik})$ — sei weiterhin vollständig durch die gesamte plastische Arbeit, d. h. die Gestaltänderungsarbeit $A^p=\int \sigma_{ik}\,d\varepsilon_{ik}^p$ gekennzeichnet, die zu seiner Erzeugung aufgewendet wurde, so daß die allgemeine Beziehung

$$f(\sigma_{ik}) = F(A^p) = F\left(\int \sigma_{ik}\,d\varepsilon_{ik}^p\right) \tag{13}$$

besteht, wobei also auch $F(A^p)$ eine koordinaten-invariante, monoton wachsende, positive Funktion ist. Mit $df = F'\,dA^p = F'\,\sigma_{ik}\,d\varepsilon_{ik}^p$ geht (12) nach Multiplikation mit σ_{ik} und mit dem Satz von *Euler* für eine homogene, quadratische Funktion über in

$$\sigma_{ik}\,d\varepsilon_{ik}^p = p(\sigma_v)\,F'\,\sigma_{ik}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}\sigma_{lm}\,d\varepsilon_{lm}^p = 2\,p(\sigma_v)\,F'\,f(\sigma_{ik})\,\sigma_{ik}\,d\varepsilon_{ik}^p\,.$$

Setzt man hieraus $p(\sigma_v)=\frac{1}{2\,F'\,f(\sigma_{ik})}$ sowie $f(\sigma_{ik})=\frac{1}{3}\sigma_v^2$ und $df=\frac{2}{3}\sigma_v\,d\sigma_v$ in (12) ein, so geht der plastische Deformationszuwachs über in

$$d\varepsilon_{ik}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}\frac{d\sigma_v}{\sigma_v\,F'} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}d\lambda \tag{14}$$

und der Zuwachs an plastischer Arbeit pro Volumeneinheit wird

$$dA^p = \sigma_{ik}\,d\varepsilon_{ik}^p = \sigma_{ik}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ik}}d\lambda = 2f(\sigma_{ik})\,d\lambda \geqq 0\,, \tag{15}$$

---

[1] Vgl. *L. J. Klingler* and *G. Sachs*, Journ. Aeron. Sc.15 (1948) S. 599; sowie die Versuche von *F. Stüssi* (Fußn. 1, S. 266.)

[2] Proc. of the Royal Society, Series A 193 (1948) S. 281; vgl. auch *R. Hill*, S. 318 (Fußn. 1, S. 263); sowie die Arbeiten von *J. E. Dorn*, Journ. of Appl. Phys. 20 (1949) Nr. 1, S. 15 und *L. W. Hu*, Journ. Appl. Mech. 23 (1956) S. 444, die von denselben Voraussetzungen ausgehen wie *R. Hill*.

da $f(\sigma_{ik})$ als homogene, quadratische Funktion angesetzt wurde. Der Zuwachs dA^p ist für Belastung ($d\lambda > 0$) wegen $f(\sigma_{ik})$ stets positiv, die plastische Deformation ist also ein nicht-reversibler Vorgang im thermodynamischen Sinne, während der neutrale Spannungszustand $d\lambda = 0$ durch einen stationären Wert von A^p gekennzeichnet ist.

Läßt sich der jeweilige Verfestigungszustand — wie vorausgesetzt — durch einen einzigen äquivalenten Spannungswert σ_v ausdrücken, so kann man jedem Wert von σ_v eine äquivalente einachsige, plastische Dehnungsänderung $d\varepsilon_v^p$ derart zuordnen, daß $\sigma_v = \Phi[\int d\varepsilon_v^p]$ eine Funktion der gesamten plastischen Dehnung $\int d\varepsilon_v^p$ ist, wobei die Integration über den gesamten Deformationsweg zu erstrecken ist. Der Zuwachs an nicht zurückgewinnbarer Arbeit läßt sich dann auch durch $dA^p = \sigma_v\, d\varepsilon_v^p$ ausdrücken. Gleichsetzen mit (15) liefert mit $d\lambda$ nach (14) und mit $f(\sigma_{ik}) = \frac{1}{3}\,\sigma_v^2$ die Beziehungen

$$F' = \frac{2}{3}\,\frac{d\sigma_v}{d\varepsilon_v^p} = \frac{2}{3}\,\Phi'\,; \qquad d\lambda = \frac{3}{2\,\sigma_v\,\Phi'}\,d\sigma_v = \frac{3}{2}\,\frac{d\varepsilon_v^p}{\sigma_v}\,; \qquad p(\sigma_v) = \frac{d\lambda}{df} = \frac{9}{4\,\sigma_v^2\,\Phi'}\,, \tag{16}$$

durch die der allgemeine plastische Spannungs-Deformationszustand vermöge (14) und (11) mit einer äquivalenten — aus Versuchen bekannten — einachsigen Spannungs-Dehnungskurve, also der $(\sigma_v, \varepsilon_v^p)$-Kurve mit dem Anstieg Φ', verknüpft ist: Die speziell bei einem ebenen, für das Beulproblem in Frage kommenden Spannungszustand auftretenden plastischen Deformationsänderungen ergeben sich dann durch Einsetzen von (11) in (14) zu[1]

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}\,d\lambda = (\alpha_x\,\sigma_x - \alpha_{xy}\,\sigma_y)\,\frac{d\lambda}{A}\,,\\ d\varepsilon_y^p &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}\,d\lambda = (\alpha_y\,\sigma_y - \alpha_{xy}\,\sigma_x)\,\frac{d\lambda}{A}\,,\\ d\varepsilon_{xy}^p &= d\varepsilon_{yx}^p = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}\,d\lambda = \beta\,\tau_{xy}\,\frac{d\lambda}{A} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

mit den zur Abkürzung eingeführten Anisotropiekonstanten $\alpha_x = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_y = \alpha_1 + \alpha_3$; $\alpha_{xy} = \alpha_1$; $\beta = \beta_1$ und $A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_x + \alpha_y - \alpha_{xy}$. Hierin ist $d\lambda$ nach (16) bekannt, wenn die $(\sigma_v, \varepsilon_v^p)$-Kurve vorliegt und wenn die äquivalente Dehnung $d\varepsilon_v^p$ mit den $d\varepsilon_{ik}^p$ verknüpft werden kann. Dazu werden die Gleichungen (17) in die Form

$$\sigma_x = \frac{\alpha_y\,d\varepsilon_x^p + \alpha_{xy}\,d\varepsilon_y^p}{\alpha_x\,\alpha_y - \alpha_{xy}^2}\,\frac{A}{d\lambda}\,; \qquad \sigma_y = \frac{\alpha_{xy}\,d\varepsilon_x^p + \alpha_x\,d\varepsilon_y^p}{\alpha_x\,\alpha_y - \alpha_{xy}^2}\,\frac{A}{d\lambda}\,; \qquad \tau_{xy} = \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{\beta}\,\frac{A}{d\lambda}$$

gebracht und in die für den zweiachsigen Spannungszustand vereinfachte Belastungsfunktion (18), d. h. in

$$f(\sigma_{ik}) = \frac{1}{2\,A}\,(\alpha_x\,\sigma_x^2 - 2\,\alpha_{xy}\,\sigma_x\,\sigma_y + \alpha_y\,\sigma_y^2 + 2\,\beta\,\tau_{xy}^2) = \frac{\sigma_v^2}{3} \tag{18}$$

eingesetzt, woraus zunächst

$$f(\sigma_{ik}) = \frac{A}{2\,(d\lambda)^2}\left[\frac{\alpha_y(d\varepsilon_x^p)^2 + 2\,\alpha_{xy}\,d\varepsilon_x^p\,d\varepsilon_y^p + \alpha_x(d\varepsilon_y^p)^2}{\alpha_x\,\alpha_y - \alpha_{xy}^2} + \frac{2(d\varepsilon_{xy}^p)^2}{\beta}\right] = \frac{\sigma_v^2}{3} \tag{19}$$

und schließlich mit (15)

$$d\varepsilon_v^p = \frac{dA^p}{\sigma_v} = \frac{2\,f\,d\lambda}{\sigma_v} = \frac{2}{3}\,\sigma_v\,d\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}\,A}\left[\frac{\alpha_y(d\varepsilon_x^p)^2 + 2\,\alpha_{xy}\,d\varepsilon_x^p\,d\varepsilon_y^p + \alpha_x(d\varepsilon_y^p)^2}{\alpha_x\,\alpha_y - \alpha_{xy}^2} + \frac{2(d\varepsilon_{xy}^p)^2}{\beta}\right]^{1/2} \tag{20}$$

folgt. Für isotropes Material geht dieser Ausdruck mit $\alpha_x = \alpha_y = 2\,\alpha_{xy} = \frac{2}{3}\,\beta = \frac{2}{3}\,A$ über in

$$d\varepsilon_v^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[(d\varepsilon_x^p)^2 + d\varepsilon_x^p\,d\varepsilon_y^p + (d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_{xy}^p)^2\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[d\varepsilon_{ik}^p\,d\varepsilon_{ik}^p\right]^{1/2}. \tag{21}$$

Man kann die in (18) und (20) auftretenden Anisotropiekonstanten aus Versuchen ermitteln, indem man verschiedene Plattenstreifen als Zugproben unter verschiedenen Winkeln ψ gegenüber der z. B. als x-Richtung gewählten Walzrichtung aus der Platte herausschneidet. Bezeichnet σ die Zugspannung in der Probe, so folgen mit

$$\sigma_x = \sigma\cos^2\psi; \qquad \sigma_y = \sigma\sin^2\psi; \qquad \tau_{xy} = \sigma\sin\psi\cos\psi$$

[1] Die Komponente $d\varepsilon_z^p$ wurde fortgelassen, da sie für das Weitere nicht interessiert. Bei der Differentiation sind die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} getrennt zu behandeln, so daß $\partial f/\partial\tau_{xy} = \beta\cdot\tau_{xy}/A$ ist. Ferner besteht der Zusammenhang $d\gamma_{xy}^p = 2\,d\varepsilon_{xy}^p$ mit dem Gleitwinkel γ_{xy}^p.

aus (17) die Komponenten der Dehnungsänderung

$$d\varepsilon_x^p = (\alpha_x \cos^2\psi - \alpha_{xy}\sin^2\psi)\frac{d\lambda}{A}\sigma\,, \quad d\varepsilon_y^p = (\alpha_y \sin^2\psi - \alpha_{xy}\cos^2\psi)\frac{d\lambda}{A}\sigma\,, \quad d\varepsilon_{xy}^p = \beta \sin\psi\cos\psi\frac{d\lambda}{A}\sigma\,.$$

Aus dem Verhältnis der Dehnungsänderungen für bestimmte Winkel ψ kann man die Verhältnisse der Anisotropiekonstanten errechnen.

Wendet man (18) speziell auf den einachsigen Spannungszustand in Walzrichtung (x-Richtung) und senkrecht dazu (y-Richtung) an, so ist die Vergleichsspannung σ_v mit den in diesen Richtungen gemessenen, mit X bzw. Y bezeichneten Spannungen durch

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3\,\alpha_x}{2\,A}}\,X = a_x X \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma_v = \sqrt{\frac{3\,\alpha_y}{2\,A}}\,X = a_y Y \tag{22}$$

verknüpft (für Isotropie ist $\sigma_v = X = Y$). Weiter ist z. B. wegen $dA^p = \sigma_v\, d\varepsilon_v^p = a_x X\, d\varepsilon_v^p = X\, d\varepsilon_v^p$ die äquivalente Dehnungsänderung $d\varepsilon_v^p$ mit den gemessenen Änderungen $d\varepsilon_x^p$ und $d\varepsilon_y^p$ durch die Beziehungen

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{a_x}\,d\varepsilon_x^p = \frac{1}{a_y}\,d\varepsilon_y^p \tag{23}$$

verbunden. Die äquivalente Spannungs-Deformationskurve $\sigma_v = \Phi(\int d\varepsilon_v^p)$ ist also einfach die aus Zugversuchen gewonnene Kurve $a_x X = \Phi\left(\frac{\varepsilon_x^p}{a_x}\right)$ bzw. $a_y Y = \Phi\left(\frac{\varepsilon_y^p}{a_y}\right)$ und damit ist auch deren Anstieg

$$\Phi' = \frac{d\sigma_v}{d\varepsilon_v^p} = a_x^2\frac{dX}{d\varepsilon_x^p} = a_y^2\frac{dY}{d\varepsilon_y^p} \tag{24}$$

bekannt.[1] Aus (16) folgt dann

$$p(\sigma_v) = \frac{9}{4\,a_x^4\,X^2}\frac{d\varepsilon_x^p}{dX} = \frac{9}{4\,a_y^4\,Y^2}\frac{d\varepsilon_y^p}{dY}\,. \tag{25}$$

Hiermit sowie mit

$$df = \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ik}}\,d\sigma_{ik} = \frac{1}{A}\left[(\alpha_x\sigma_x - \alpha_{xy}\sigma_y)\,d\sigma_x + (\alpha_y\sigma_y - \alpha_{xy}\sigma_x)\,d\sigma_y + 2\,\beta\,\tau_{xy}\,d\tau_{xy}\right] \tag{26}$$

kann man $d\lambda = p(\sigma_v)\,df$ und daher wegen (17) auch die Variationen der plastischen Deformationen durch die Spannungen und deren Änderungen ausdrücken.

Zu den plastischen treten noch die elastischen Deformationsänderungen hinzu. Auch im elastischen Bereich soll Anisotropie vorausgesetzt werden. Dann gilt

$$\varepsilon_x^e = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_x\frac{\sigma_y}{E_y}\,; \qquad \varepsilon_y^e = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_y\frac{\sigma_x}{E_x}\,; \qquad \varepsilon_{xy}^e = \frac{\tau_{xy}}{2\,G} \tag{27}$$

bzw.

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x^e + \nu_x\,\varepsilon_y^e}{1 - \nu_x\,\nu_y}\,E_x\,; \qquad \sigma_y = \frac{\varepsilon_y^e + \nu_y\,\varepsilon_x^e}{1 - \nu_x\,\nu_y}\,E_y\,. \tag{28}$$

Zwischen den insgesamt fünf Materialkonstanten bestehen noch gewisse Beziehungen: Aus der elastischen Formänderungsarbeit A^e folgt

$$\sigma_x = \frac{\partial A^e}{\partial\varepsilon_x^e} = \frac{2\,\varepsilon_x^e\,E_x + (\nu_x\,E_x + \nu_y\,E_y)\,\varepsilon_y^e}{2\,(1 - \nu_x\,\nu_y)}$$

und eine entsprechende Gleichung für σ_y, welche neben (28) nur dann bestehen können, falls

$$\nu_x\,E_x = \nu_y\,E_y \tag{29}$$

ist. Eine zweite Beziehung erhält man ferner zwischen den Elastizitätsmoduln:

$$G = \frac{E_x\,E_y}{E_x + (1 + 2\,\nu_y)\,E_y}\,. \tag{30}$$

Zur Beschreibung des anisotropen elastischen Zustandes genügen also wegen (28) und (29) drei der fünf Materialkonstanten $E_x, E_y, G, \nu_x, \nu_y$.[2]

[1] Vgl. hierzu auch *K. Sattler*, Österr. Bauzeitschr. 10 (1955) S. 237.

[2] *Wolff*, Zeitschr. angew. Math. u. Mech. 14 (1935) S. 249; *H. A. Conway*, Journ. Appl. Mech. 20 (1953) Nr. 1.

Die Superposition der elastischen und plastischen Deformationsänderungen liefert schließlich aus (17) mit (25) und (26) sowie aus (27) die gesamten Deformationsvariationen

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x &= (e_x + s_x^2)\, d\sigma_x + (s_x s_y - \bar{\nu})\, d\sigma_y + 2\, s_x t_{xy}\, d\tau_{xy}\,, \\ d\varepsilon_y &= (s_x s_y - \bar{\nu})\, d\sigma_x + (e_y + s_y^2)\, d\sigma_y + 2\, s_y t_{xy}\, d\tau_{xy}\,, \\ d\varepsilon_{xy} &= s_x t_{xy}\, d\sigma_x + s_y t_{xy}\, d\sigma_y + T_{xy}\, d\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} &e_x = \frac{1}{E_x}\,; \qquad e_y = \frac{1}{E_y}\,; \qquad \frac{\nu_x}{E_y} = \frac{\nu_y}{E_x} = \bar{\nu}\,; \\ &s_x = \frac{\sqrt{p}}{A}\,(\alpha_x \sigma_x - \alpha_{xy}\sigma_y)\,; \qquad s_y = \frac{\sqrt{p}}{A}\,(\alpha_y \sigma_y - \alpha_{xy}\sigma_x)\,; \\ &t_{xy} = \frac{\sqrt{p}}{A}\,\beta\,\tau_{xy}\,; \qquad T_{xy} = 2\,t_{xy}^2 + \frac{1}{2\,G}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31a}$$

Umgekehrt können auch die Spannungsänderungen durch die Deformationsvariationen ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_x &= \frac{1}{D_{xy}}\left|\left(\frac{s_y^2}{2\,G} + e_y\, T_{xy}\right) d\varepsilon_x - \left(\frac{s_x s_y}{2\,G} - \bar{\nu}\, T_{xy}\right) d\varepsilon_y - 2\, t_{xy}\, a_1\, d\varepsilon_{xy}\right|, \\ d\sigma_y &= \frac{1}{D_{xy}}\left|-\left(\frac{s_x s_y}{2\,G} - \bar{\nu}\, T_{xy}\right) d\varepsilon_x + \left(\frac{s_x^2}{2G} + e_x\, T_{xy}\right) d\varepsilon_y - 2\, t_{xy}\, a_2\, d\varepsilon_{xy}\right|, \\ d\tau_{xy} &= \frac{1}{D_{xy}}\left|-t_{xy}\, a_1\, d\varepsilon_x - t_{xy}\, a_2\, d\varepsilon_y + \{(e_x + s_x^2)(e_y + s_y^2) - (s_x s_y - \bar{\nu})^2\}\, d\varepsilon_{xy}\right| \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

mit der Determinante des Gleichungssystems

$$D_{xy} = \frac{1}{2\,G}\,(e_x s_y^2 + e_y s_x^2 + 2\,\bar{\nu}\, s_x s_y) + (e_x e_y - \bar{\nu}^2)\, T_{xy} \tag{32a}$$

und den Abkürzungen

$$a_1 = s_x e_y + s_y \bar{\nu}\,; \qquad a_2 = s_y e_x + s_x \bar{\nu}\,; \quad a_3 = 2\, t_{xy}\, G\,(e_x e_y - \bar{\nu}^2)\,. \tag{32b}$$

Das Kriterium für Belastung ist $df > 0$, also wegen (26)

$$s_x\, d\sigma_x + s_y\, d\sigma_y + 2\, t_{xy}\, d\tau_{xy} > 0 \qquad \text{oder} \qquad a_1\, d\varepsilon_x + a_2\, d\varepsilon_y + 2\, a_3\, d\varepsilon_{xy} > 0\,. \tag{33}$$

Damit sind alle Vorbereitungen getroffen, um die Plattengleichung für anisotropes Material aufstellen zu können.

5. Die Differentialgleichung für das Ausbeulen anisotroper dünner Platten im plastischen Bereich. Wie in der Theorie dünner, elastischer Platten werde vorausgesetzt, daß die ursprünglich zur Mittelfläche normalen Plattenelemente auch zur ausgebogenen Plattenmittelfläche normal bleiben. Die bei dieser als klein vorausgesetzten Ausbiegung auftretenden Deformationsänderungen $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$ $d\gamma_{xy} = 2\, d\varepsilon_{xy}$ sind teils Deformationen der Plattenmittelfläche $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, $d\gamma$, teils entstehen sie durch die Biegung der Platte; letztere ändern sich linear mit dem Abstand von der Plattenmittelfläche und sind proportional zu den Krümmungsänderungen $d\chi_1$ und $d\chi_2$ in x- bzw. y-Richtung sowie zur Änderung der Verdrehung $d\chi_3$. Es gelten dann die Beziehungen

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_1 - z\, d\chi_1\,; \qquad d\varepsilon_y = d\varepsilon_2 - z\, d\chi_2\,; \qquad d\gamma_{xy} = d\gamma - 2\, z\, d\chi_3\,, \tag{34}$$

worin $-h/2 \leqq z \leqq h/2$ den Abstand des Elements von der Plattenmittelfläche kennzeichnet. Mit (34) erhält man aus (33) als Belastungskriterium

$$a_1\, d\varepsilon_1 + a_2\, d\varepsilon_2 + a_3\, d\gamma > z\,(a_1\, d\chi_1 + a_2\, d\chi_2 + 2\, a_3\, d\chi_3)\,. \tag{35}$$

Hieraus wird eine Gleichung für die Grenzkurve $z = z_0(x, y)$ zwischen Belastungs- und Entlastungsbereich, wenn man das Gleichheitszeichen setzt. Die Grenzkurve $|z_0| = h/2$ entspricht dem Zustand der Belastung über den gesamten Plattenbereich. Für das Belastungskriterium läßt sich auch abgekürzt schreiben

$$z \lesseqgtr z_0 \qquad \text{für} \qquad d\Psi' \gtreqless 0 \tag{35a}$$

mit

$$z_0\, d\Psi' = a_1\, d\varepsilon_1 + a_2\, d\varepsilon_2 + a_3\, d\gamma\,, \qquad d\Psi' = a_1\, d\chi_1 + a_2\, d\chi_2 + 2\, a_3\, d\chi_3\,. \tag{35b}$$

Unter Verwendung der mit (34) aus (35b) abgeleiteten Beziehung

$$-(z - z_0)\, d\Psi' = a_1\, d\varepsilon_x + a_2\, d\varepsilon_y + a_3\, d\gamma_{xy}$$

kann man aus (32) die für den Belastungs- und Entlastungsbereich gültigen Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} e_x\,d\sigma_x - \bar{\nu}\,d\sigma_y &= d\varepsilon_x + \frac{s_x}{2\,D_{xy}\,G}\,(z - z_0)\,d\Psi\,, \\ e_y\,d\sigma_y - \bar{\nu}\,d\sigma_x &= d\varepsilon_y + \frac{s_y}{2\,D_{xy}\,G}\,(z - z_0)\,d\Psi\,, \\ d\tau_{xy} &= G\,d\gamma_{xy} + \frac{t_{xy}}{D_{xy}}\,(z - z_0)\,d\Psi \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

bilden. Für den Entlastungsbereich ($df < 0$) wird wegen des Verschwindens der plastischen Deformationsänderungen nach (25) auch $p(\sigma_v) = 0$ und damit folgt aus (31a) $s_x = s_y = t_{xy} = 0$ und schließlich aus (35b) $d\Psi = 0$; die für den elastischen Bereich gültigen Gleichungen hätte man auch direkt aus (27) und (28) ableiten können.

Will man zunächst noch die Möglichkeit zulassen, daß sich beim Ausbeulen Entlastungsbereiche ausbilden können, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Für $d\Psi > 0$ hat man Belastung im Bereich $z_0 > z > -h/2$ und für $d\Psi < 0$ im Bereich $+h/2 > z > z_0$. Die resultierenden Normalkraftvariationen dN_x, dN_y und dN_{xy} werden durch

$$(dN_x, dN_y, dN_{xy}) = \int_{z=-h/2}^{+h/2} (d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy})\,dz$$

definiert. Die den Ausdrücken (36) entsprechenden Schnittkraftgrößen sind z. B.

$$e_x\,dN_x - \bar{\nu}\,dN_y = \int_{z=-h/2}^{+h/2} (e_x\,d\sigma_x - \bar{\nu}\,d\sigma_y)\,dz\,.$$

Bei der Ausführung der Quadraturen ist zu beachten, daß der Integrand entsprechend (36) für Belastungs- und Entlastungsbereich verschiedene Gestalt hat: Für $d\Psi > 0$ hat man z. B. den vollständigen Integranden nach (36) für die Integration von $z = -h/2$ bis z_0 und den mit $d\Psi = 0$ übrigbleibenden Integranden für die Integration von $z = z_0$ bis $+h/2$ einzusetzen. Die Ausführung der Quadraturen ergibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h}\,(e_x\,dN_x - \bar{\nu}\,dN_y) &= d\varepsilon_1 - \frac{h}{16\,D_{xy}\,G}\left(\frac{2\,z_0}{h} + 1\right)^2 s_x\,d\Psi\,, \\ \frac{1}{h}\,(e_y\,dN_y - \bar{\nu}\,dN_x) &= d\varepsilon_2 - \frac{h}{16\,D_{xy}\,G}\left(\frac{2\,z_0}{h} + 1\right)^2 s_y\,d\Psi\,, \\ \frac{dN_{xy}}{G\,h} &= d\gamma - \frac{h}{16\,D_{xy}\,G}\left(\frac{2\,z_0}{h} + 1\right)^2 t_{xy}\,d\Psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Durch Elimination von $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ und $d\gamma$ mittels (35b) ließe sich hieraus eine quadratische Gleichung für die Trennfläche z_0 zwischen Entlastungs- und Belastungsbereich ableiten.

In entsprechender Weise bildet man die Momentenvariationen, welche durch

$$(dM_x, dM_y, dM_{xy}) = \int_{z=-h/2}^{+h/2} (d\sigma_x, d\sigma_y, -d\tau_{xy})\,z\,dz$$

definiert sind. Dazu berechnet man zunächst Ausdrücke von der der Gleichung (36) entsprechenden Form, also z. B.

$$e_x\,dM_x - \bar{\nu}\,dM_y = \int_{z=-h/2}^{+h/2} (e_x\,d\sigma_x - \bar{\nu}\,d\sigma_y)\,z\,dz\,.$$

Die Ausführung der Quadraturen liefert

$$\left.\begin{aligned} -\frac{12}{h^3}\,(e_x\,e_y - \bar{\nu}^2)\,dM_x &= (e_y - a_1^2\,B_0)\,d\chi_1 + (\bar{\nu} - a_1\,a_2\,B_0)\,d\chi_2 - 2\,a_1\,a_3\,B_0\,d\chi_3\,, \\ -\frac{12}{h^3}\,(e_x\,e_y - \bar{\nu}^2)\,dM_y &= (\bar{\nu} - a_1\,a_2\,B_0)\,d\chi_1 + (e_x - a_2^2\,B_0)\,d\chi_2 - 2\,a_2\,a_3\,B_0\,d\chi_3\,, \\ -\frac{6}{h^3\,G}\,dM_{xy} &= t_{xy}\,B_0\,(a_1\,d\chi_1 + a_2\,d\chi_2) + (2\,t_{xy}\,a_3\,B_0 - 1)\,d\chi_3 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

mit der Abkürzung

$$B_0 = \frac{1}{4\,D_{xy}\,G}\left(1 - \frac{z_0}{h}\right)\left(1 + \frac{2\,z_0}{h}\right)^2. \tag{38a}$$

Wenn man noch die Krümmungsänderungen durch die infinitesimale Ausbiegung dw der Platte ausdrückt, d. h.

$$d\chi_1 = dw_{,xx}\,; \qquad d\chi_2 = dw_{,yy}\,; \qquad d\chi_3 = dw_{,xy}\,, \tag{39}$$

schreibt, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen z. B. nach *S. Timoshenko*[1]

$$\left.\begin{aligned} dN_{x,x} + dN_{xy,y} &= 0\,,\\ dN_{xy,x} + dN_{y,y} &= 0\,,\\ dM_{x,xx} - 2\,dM_{xy,xy} + dM_{y,yy} &= h\,(\sigma_x\,dw_{,xx} + \sigma_y\,dw_{,yy} + 2\,t_{xy}\,dw_{,xy})\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Die beiden ersten Gleichungen lassen sich durch Einführung einer Spannungsfunktion φ erfüllen, die mit den Normalkraftvariationen durch

$$dN_x = h\,d\varphi_{,yy}\,; \qquad dN_y = h\,d\varphi_{,xx}\,; \qquad dN_{xy} = -\,h\,d\varphi_{,xy} \tag{41}$$

verknüpft ist. Die Deformationsänderungen können durch die Verschiebungen u und v ausgedrückt werden

$$d\varepsilon_x = du_{,x}\,; \qquad d\varepsilon_y = dv_{,y}\,; \qquad d\gamma_{xy} = du_{,y} + dv_{,x} \tag{42}$$

und sind nur dann miteinander kompatibel, falls

$$d\varepsilon_{x,yy} + d\varepsilon_{y,xx} - d\gamma_{xy,xy} = 0$$

erfüllt ist, was wegen (34) mit (39) in

$$d\varepsilon_{1,yy} + d\varepsilon_{2,xx} - d\gamma_{,xy} = 0 \tag{43}$$

übergeht. Aus (37) folgen mit (41) die Deformationsänderungen der Plattenmittelfläche

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= e_x\,d\varphi_{,yy} - \nu\,d\varphi_{,xx} + C_0\,s_x\,d\Psi\,,\\ d\varepsilon_2 &= e_y\,d\varphi_{,xx} - \bar{\nu}\,d\varphi_{,yy} + C_0\,s_y\,d\Psi\,,\\ d\gamma &= C_0\,t_{xy}\,d\Psi - \frac{1}{G}\,d\varphi_{,xy} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

mit der Abkürzung

$$C_0 = \frac{h}{16\,D_{xy}\,G}\left(\frac{2\,z_0}{h} + 1\right)^2. \tag{44a}$$

Setzt man (44) in die Bedingung (43), so folgt eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der Änderungen der Spannungsfunktionen φ und damit der Normalkräfte

$$e_y\,d\varphi_{,xxxx} + \left(\frac{1}{G} - 2\,\bar{\nu}\right)d\varphi_{,xxyy} + e_x\,d\varphi_{,yyyy} = (C_0\,t_{xy}\,d\Psi)_{,xy} - (C_0\,s_y\,d\Psi)_{,xx} - (C_0\,s_x\,d\Psi)_{,yy} \tag{45}$$

auf deren rechter Seite man noch $d\Psi$ mittels (35b) und (39) durch die Ausbiegung dw ausdrücken könnte.

Aus der Momentengleichgewichtsbedingung folgt schließlich als Differentialgleichung für die infinitesimale Durchbiegung, die von jetzt an der Einfachheit halber mit w bezeichnet wird

$$\begin{aligned} &(e_y - a_1^2\,B_0)\,w_{,xxxx} + 2\,\{\bar{\nu} + 2\,G\,(e_x\,e_y - \bar{\nu}^2) - (a_1\,a_2 + 2\,a_3^2)\,B_0\}\,w_{,xxyy}\\ &-4\,B_0\,a_3\,(a_1\,w_{,xxxy} + a_3\,w_{,xyyy}) + (e_x - a_2^2\,B_0)\,w_{,yyyy} = \frac{12\,(e_x\,e_y - \bar{\nu}^2)}{h^2}\,\{\sigma_x\,w_{,xx} + \sigma_y\,w_{,yy} + 2\,\tau_{xy}\,w_{,xy}\}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Zu diesen beiden Grundgleichungen des Problems treten noch die durch die Art der Auflagerung der Platte an ihren Rändern vorgeschriebenen Randbedingungen. Die Differentialgleichungen sind im allgemeinen nichtlinear: Erstens geht die Gleichung der Trennfläche zwischen Entlastungs- und Belastungsbereich über die Koeffizienten B_0 und C_0 in die Rechnungen ein, zweitens treten in diesen Koeffizienten die Randspannungen auf, die noch von x und y abhängig sein können. Die zweite Gleichung (46) nimmt nur für verschwindende Schubrandspannungen die allgemeine Form (10) an.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe, bei der also noch Entlastungsbereiche zugelassen werden, dürfte sich vielleicht am besten auf folgendem Näherungswege erreichen lassen: Man könnte zunächst die homogene Gleichung (45) lösen und würde Näherungswerte für die Normalkraftänderungen erhalten; die Stabilitätshypothese nach *Engesser-v. Kármán* — Stabilitätsverlust bei be-

[1] Theory of Elastic Stability, S. 302ff, New-York, London 1936.

nachbarter Gleichgewichtslage unter gleicher Last — würde z. B. nach (41) die Randbedingungen $dN_x = dN_y = dN_{xy} = 0$ für eine Rechteckplatte fordern und aus (45) die Näherungslösung $d\varphi = 0$ liefern. Dann ließe sich z_0 aus (37) und damit wiederum B_0 und C_0 berechnen. Damit könnten dann unter Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen näherungsweise die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (46) errechnet werden.

Die oben durchgeführten, für $d\Psi > 0$ gültigen Rechnungen können sinngemäß für $d\Psi < 0$ wiederholt werden; in diesem Falle muß man nur in (38) und (44a) z_0 durch $-z_0$ ersetzen.

Glücklicherweise ist es für die Bestimmung der für die Praxis allein wichtigen Lösung nicht nötig, diese angedeuteten Rechnungen durchzuführen, wenn man zur Berechnung der kleinsten möglichen Beullast von *Shanley*s Hypothese ausgeht und annimmt, daß nirgendwo eine Entlastung auftreten soll. Dann ist in (38a) einfach $z_0 = h/2$ zu setzen, man braucht also keinen Entlastungsbereich zu berechnen und erhält bei nicht von x und y abhängigen Randspannungen lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Man sieht übrigens leicht, daß dann die linke Seite von (46) und damit auch die kritischen Spannungen wegen

$$[B_0]_{z_0 = h/2} > [B_0]_{z_0 < h/2}$$

ihren kleinsten möglichen Wert annehmen. Eine analoge Überlegung gilt für den Fall $d\Psi < 0$. Dies kann als hinreichendes Kriterium dafür angesehen werden, daß die *Shanley*-Hypothese auch bei der Platte zu den für die Praxis allein interessierenden kritischen Spannungen führt. Es kommt also gar nicht mehr auf die Lösung von (45) an, deren Existenz im übrigen vorausgesetzt werden soll. Die dann nur noch interessierende Integration von (46) wird aber prinzipiell schwieriger sein als im isotropen Fall.

6. Die rechteckige Platte mit homogenem Normalspannungszustand als Beispiel. Die gleichmäßig über die Plattenränder verteilten Normalspannungen sollen in einem vorgesehenen konstanten Verhältnis

$$r = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{47}$$

zueinander stehen: Ferner sei $\tau_{xy} = 0$. Dann liefert (32a)

$$D_{xy} = \frac{e_x}{2\,k\,G}\left[\frac{p\,\sigma_x^2}{A^2}\,K + e_x\left(1 - \frac{\nu_x^2}{k}\right)\right] \tag{48}$$

mit

$$k = \frac{E_y}{E_x} \tag{48a}$$

und der durch die Anisotropie des Materials und das Spannungsverhältnis r bestimmten Konstanten

$$K = \alpha_x^2 + k\,r^2\,\alpha_y^2 + \alpha_{xy}^2\,(k + 2\,\nu_x\,r + r^2) + 2\,\nu_x\,\alpha_x\,\alpha_y\,r - 2\,\alpha_{xy}\,r\left\{\alpha_x\left(1 + \frac{\nu_x}{r}\right) + \alpha_y\,(k + \nu_x\,r)\right\}. \tag{48b}$$

Ferner erhält man aus (32b) die Größen

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{p}\,\sigma_x\,e_x\,A_1}{k\,A} \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \alpha_x - \alpha_{xy}\,r + \nu_x\,(\alpha_y\,r - \alpha_{xy})\,, \\ a_2 &= \frac{\sqrt{p}\,\sigma_x\,e_x\,A_2}{k\,A} \qquad \text{mit} \qquad A_2 = (\alpha_y\,r - \alpha_{xy})\,k + (\alpha_x - \alpha_{xy}\,r)\,\nu_x\,, \\ a_3 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Zur Bestimmung von $p(\sigma_v)$ muß noch der nach (24) aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm $X(\varepsilon_x^p)$ eines Druckversuchs bekannte Anstieg $\Phi' = a_x^2\,\frac{dX}{d\varepsilon_x^p} = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0^p}$ des äquivalenten Spannungs-Deformationsdiagramms mit der Spannung σ_x in Beziehung gesetzt werden: Für die Platte hat man nach (18) als äquivalente Spannung

$$\sigma_v = \sigma_x \sqrt{\frac{3}{2\,A}\,(\alpha_x - 2\,\alpha_{xy}\,r + \alpha_y\,r^2)} \tag{50}$$

und damit nach (16)

$$p = \frac{3\,A}{2\,\sigma_x^2\,(\alpha_x - 2\,\alpha_{xy}\,r + \alpha_y\,r^2)\,a_x^2}\;\frac{1}{\dfrac{dX}{d\varepsilon_x^p}}\,. \tag{51}$$

Nun ist der aus dem Druckversuch bekannte Anstieg $dX/d\varepsilon_x^p$ der Druckspannung $X = \sigma_v/a_x$ — und daher mit a_x nach (22) und wegen (50) auch einer ganz bestimmten Plattenspannung σ_x — zugeordnet. Wenn man noch die Umformung

$$\frac{1}{\dfrac{dX}{d\varepsilon_x^p}} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_x} = e_x(\varepsilon - 1) \tag{52}$$

mit dem in bekannter Weise von σ_x abhängigen Verhältnis $\varepsilon(\sigma_x) = E_x/E_t > 1$ vornimmt, erhält man

$$\frac{p\,\sigma_x^2}{A} = \frac{3\,e_x(\varepsilon - 1)}{2\,(\alpha_x - 2\,\alpha_{xy}\,r + \alpha_y\,r^2)\,a_x^2} \tag{53}$$

und kann schließlich die Differentialgleichung (46) der Plattenbeulung in folgende, der allgemeinen Gleichung (10) entsprechende Form bringen:

$$(1 - \varkappa A_1^2)\,w_{,xxxx} + 2\left\{\nu_x - \varkappa A_1 A_2 + \frac{2\,(k - \nu_x^2)}{1 + k + 2\,\nu_x}\right\} w_{,xxyy} + (k - \varkappa A_2^2)\,w_{,yyyy} = \frac{12\,(k - \nu_x^2)}{E_x h^2 k}\,\sigma_x\,(w_{,xx} + r\,w_{,yy})\,. \tag{54}$$

Darin ist

$$\varkappa = \frac{k(\varepsilon - 1)}{k\,K(\varepsilon - 1) + (k - \nu_x^2)(\alpha_x - 2\,\alpha_{xy}\,r + \alpha_y\,r^2)\,\alpha_x} \tag{54a}$$

mit k nach (48b).

Die Lösung dieser Gleichung bietet grundsätzlich keine größeren Schwierigkeiten als die der bekannten isotropen Plattengleichung für das elastische Gebiet — in welche (54) für $\varepsilon = k = 1$ übergeht —, obwohl die Beulspannung σ_x durch die Funktion $\varepsilon(\sigma_x)$ auch auf der linken Seite der Gleichung erscheint. Dieser Umstand macht noch eine Iterationsrechnung erforderlich.

Für gleichmäßigen Druck in x-Richtung, also für $r = 0$ geht (54) über in

$$\{1 - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha} - \nu_x)^2\}\,w_{,xxxx} + 2\left\{\nu_x - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha} - \nu_x)\,(\bar{\alpha}\,\nu_x - k) + 2\,\frac{k - \nu_x^2}{1 + k + 2\,\nu_x}\right\} w_{,xxyy} + \{k - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha}\,\nu_x - k)^2\}\,w_{,yyyy} = -\frac{12\,(k - \nu_x^2)}{E_x h^2 k}\,\sigma_x\,w_{,xx} \tag{53}$$

mit den Abkürzungen

$$\bar{\varkappa} = \frac{k(\varepsilon - 1)}{k\,(\bar{\alpha}^2 + k - 2\,\nu_x\,\bar{\alpha})(\varepsilon - 1) + \bar{\alpha}^2\,(k - \nu_x^2)}\,; \qquad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_x}{\alpha_{xy}}\,. \tag{53a}$$

Für den Fall der Isotropie hat man speziell

$$\alpha = 2\,; \qquad k = 1\,; \qquad \nu_x = \nu\,; \qquad \bar{\varkappa} = \frac{\varepsilon - 1}{5\,\varepsilon - 1 - 4\,\nu\,(\varepsilon + \nu - 1)}\,.$$

Die Eigenwerte der Differentialgleichung (53) bestimmt man in üblicher Weise: Nimmt man freie Auflagerung an den Rändern $x = 0, a$ an und schreibt zur Abkürzung wie in (10) C_x usw. für die mit den Spannungen σ_x veränderlichen Koeffizienten, so liefert z. B. der die Randbedingungen $w = w_{xx} = 0$ für $x = 0, a$ erfüllende Ansatz[1]

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w_n(y) \sin \frac{n\,\pi\,x}{a} \tag{54}$$

aus (53) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$w_n^{IV} - \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 \frac{C_{xy}}{C_y}\,w_n'' + \frac{\left(\dfrac{m\,\pi}{a}\right)^2}{C_y}\left[\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 C_x - \frac{12\,(k - \nu_x^2)}{E_x h^2 k}\,\sigma_x\right] w_n = 0\,, \tag{55}$$

deren Lösung noch den Randbedingungen an den Rändern $y = 0, b$ anzupassen ist.

Die für sämtliche Randbedingungen gültige kritische Beulspannung σ_{kr} erhält man aus den Eigenwerten der Gleichung (55)

$$\sigma_{kr} = \frac{E_x h^2 k}{12\,(k - \nu_x^2)}\left[C_x\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + p\,C_{xy}\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + q\,C_y\left(\frac{a\,\pi}{m\,b^2}\right)^2\right] \tag{56}$$

in der für verschiedene Randbedingungen verschiedene Koeffizienten p und q gelten, z. B. für gelenkige Lagerung $p = 1$, $q = 1$, für beiderseits feste Einspannung $p = 1{,}25$, $q = 5$ und für

[1] Der Ursprung des Koordinatensystems liege in einer Plattenecke.

einerseits feste Einspannung, anderseits gelenkige Lagerung $p = 1{,}135$, $q = 2{,}45$. Führt man hier noch das Seitenverhältnis $\beta = a/b$ ein, so folgt aus $\partial\sigma_{kr}/\partial\beta = 0$ dasjenige Seitenverhältnis

$$\beta_0 = m \sqrt[4]{\frac{C_{11}}{q\, C_{12}}} = m \sqrt[4]{\frac{1 - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha} - \nu_x)^2}{\{k - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha}\,\nu_x - k)^2\}\, q}}, \tag{57}$$

für welche die kritische Spannung bei bestimmter Beulenzahl m ihren Kleinstwert

$$\sigma_{kr\,min} = \frac{E_x\, h^2\, k\, \pi^2}{6\,(k - \nu_x^2)\, b^2} \left\{ \sqrt{q\,[1 - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha} - \nu_x)^2]\,[k - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha}\,\nu_x - k)^2]} + p\left[\nu_x - \bar{\varkappa}\,(\bar{\alpha} - \nu_x)\,(\bar{\alpha}\,\nu_x - k) + 2\,\frac{k - \nu_x^2}{1 + k + 2\,\nu_x}\right]\right\} \tag{58}$$

annimmt. Umgekehrt läßt sich die Beulenzahl m für ein bestimmtes Seitenverhältnis aus (57) errechnen.

7. Zusammenfassung und Ausblick. Die vorliegende Arbeit bringt eine Erweiterung der Theorie der Plattenbeulung für den plastischen Materialbereich, die von den einfachsten, in sich widerspruchfreien Spannungs-Deformationsgesetzen der mathematischen Plastizitätstheorie — den differentiellen *Prandtl-Reuß*-Gesetzen — ausgeht. Mit dieser erweiterten Theorie wird es möglich, einer durch den Walzvorgang erzeugten, also von vornherein im Plattenmaterial vorhandenen Anisotropie auch im plastischen Bereich Rechnung zu tragen. Als Instabilitätskriterium wurde dabei die *Shanley*sche Hypothese zugrundegelegt. Angewendet wurde die Theorie auf die Berechnung der Beulspannungen dünner Rechteckplatten, die einen homogenen Normalspannungszustand an deren Rändern ausgesetzt sind. Damit sollte vor allem zur Beantwortung der bisher noch nicht endgültig geklärten Frage beigetragen werden, woher die beträchtlichen Abweichungen der mit den differentiellen Gesetzen errechneten Beulspannungen von den in Versuchen gemessenen stammen. Zu diesem Zweck wurden die *Kollbrunner*schen Beulversuche mit Platten aus der Aluminiumlegierung Avional M-hart nach der erweiterten Theorie nachgerechnet, wobei die für dieses Material nicht bekannten Anisotropiekonstanten aus Versuchen abgeschätzt wurden, die *Stüssi* an Rohren aus einer ähnlichen Aluminiumlegierung (Avional M-weich) vorgenommen hatte. Obwohl die Ergebnisse einer Rechnung, die auf derart abgeschätzten Anisotropiekonstanten basiert, natürlich unsicher sein müssen und daher auch nicht mitgeteilt werden konnten, soll erwähnt werden, daß die Anisotropie im Mittel eine Verringerung der Beulspannung um etwa 20% bewirkte: Die mit Berücksichtigung der Anisotropie errechneten Beulspannungen und Halbwellenzahlen stimmen daher mit den von *Kollbrunner* gemessenen wesentlich besser überein als die für isotropes Material berechneten. Die endgültige Entscheidung über die Frage, ob es genügt, die Diskrepanz zwischen Theorie und Versuch allein auf den Einfluß der Walzanisotropie zurückzuführen, oder ob es womöglich noch nötig sein wird, von einem komplizierteren, differentiellen Spannungs-Deformationsgesetz (z. B. nach *Prager*) auszugehen bzw. darüberhinaus den Einfluß einer geringen Abweichung der Plattenmittelfläche im unbelasteten Zustand von der Ebene zu berücksichtigen, muß allerdings weiteren experimentellen Untersuchungen vorbehalten bleiben, die erst nach genauer Bestimmung der Anisotropiekonstanten einen einwandfreien Vergleich zwischen Theorie und Versuch ermöglichen werden. Hierüber soll später noch berichtet werden.

(Eingegangen am 6. Juni 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Karl-August Reckling*, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34.

Théorie thermodynamique condensée de l'Elasticité linéaire

Par Maurice Roy

Membre de l'Académie des Sciences
Professeur à l'Ecole Polytechnique, Paris

En hommage particulièrement à la concision et à la rigueur des exposés du Professeur Dr. *R. Grammel*, la présente Note vise à fournir, à partir de la Thermodynamique, un exposé condensé et intrinsèquement complet de la théorie de l'Elasticité linéaire et parfaite.

Cet exposé, qui dérive de mon enseignement de Mécanique, met à profit plusieurs remarques à ce sujet de mon distingué collaborateur *J. Ferrandon*.

Sans y revenir ci-après, on admet ici que sont satisfaites les conditions mathématiques garantissant la définition des fonctions considérées et de leurs dérivées utiles.

1. Etat et transformation du continu déformable. En chaque position actuelle P (coordonnées x_i dans le repère d'espace à trois axes $\vec{x}_i$; ci-après et sauf mention contraire, les indices $i, j, \ldots$ sont „muets", et chacun égal successivement à 1, 2, 3) de l'élément de masse $dm = \varrho\, dV$ du corps (C) de volume V, déformable et macroscopiquement continu, l'état de ce corps est censé ne dépendre que de l'échauffement local $\tau = T - T^0$ (conditionné par le comportement calorifique du corps et ses relations thermiques avec l'extérieur) et de la déformation locale, à partir de la température initiale T^0 (l'exposant zéro repère l'état initial) et de la forme initiale (Φ^0), où P est en P^0 (coordonnées $a_i \equiv x_i^0$).

A l'élément linéaire initial $\overrightarrow{P^0P_1^0}$ (P_1^0, coordonnées $a_i + da_i$), de longueur ds^0, correspond l'élément actuel $\overrightarrow{PP_1}$ (P_1, coordonnées $x_i + dx_i$), de longueur ds. La différence $ds^2 - (ds^0)^2$ est forme quadratique des da_i, soit

$$dx_i^2 - da_i^2 \equiv 2\, \varepsilon_{jk}\, da_j\, da_k\,. \tag{1}$$

Les six ε_{jk} (où, visiblement, $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$) définissent le tenseur symétrique droit $\overline{\overline{\varepsilon}}$ de la déformation locale, celle-ci n'existant que si $dx_i^2 - da_i^2 \neq 0$, et réciproquement.

2. Potentiel thermodynamique interne. Le potentiel interne F de (C), défini à partir de sa fonction spécifique ou potentiel $\varphi(\varepsilon_{jk}, \tau)$ de l'unité de masse matérielle de (C), est $F = \int_V \varphi\, dm$, avec conservation de $dm = \varrho\, dV$ dans toute transformation réelle, ou virtuelle et licite (celle-ci à τ invariable, à liaisons actuelles respectées y compris la continuité macroscopique, à liaisons extérieures indépendantes du temps en englobant au besoin dans le système les obstacles extérieurs à liaisons inadéquates).

En transformation élémentaire, virtuelle et licite (symbole δ; $\delta\tau \equiv 0$), F ne varie que du fait de la déformation élémentaire additionnelle liée au déplacement virtuel $\overrightarrow{\delta P}$, à trois composantes δx_i, fonctions continues des a_i pour respecter la continuité interne de (C). La variation virtuelle $\delta_\tau F$ — à τ (x_i, ou a_i) inaltéré — s'exprime donc:

$$\delta_\tau F \equiv \int_V \delta_\tau \varphi\, dm = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}}\, \delta\varepsilon_{jk}\, dV\,, \tag{2}$$

avec $\varrho\, dV$ invariable et $\delta\varrho/\varrho = -(\varepsilon_{jj})$.

Appliquée à (1), l'opération différentielle δ donne:

$$2\, dx_i\, \delta(dx_i) \equiv 2\, dx_i\, d(\delta x_i) = 2\, \delta\varepsilon_{jk}\, da_j\, da_k\,,$$

d'ou, par identification des facteurs de $da_j\, da_k$ (et, alors, avec j et k non muets):

$$\delta\varepsilon_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \left\{ \frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_l}\, \frac{\partial x_l}{\partial a_k} \right\}. \tag{3}$$

En posant (ici avec i et l non muets):

$$\sigma_{il} \equiv \varrho\, \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}} \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial a_j}\, \frac{\partial x_l}{\partial a_k} \right\} \tag{4}$$

ce qui définit, car $\sigma_{pq} = \sigma_{qp}$, un tenseur symétrique droit $\bar{\bar{\sigma}}$, (2) s'écrit:

$$\delta_\tau F = \int_V \sigma_{il} \frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_l}\, dV \equiv \int_V \left(\bar{\bar{\sigma}} \cdot \operatorname{grad} \delta P\right) dV . \tag{5}$$

3. Equations indéfinies du mouvement et expression des contraintes. Nous partons de l'équation fondamentale de la Thermodynamique exprimée, en transformation δ et en potentiel F à variables normales (cas des ε_{jk} et τ), par:

$$\delta_\tau F = \delta \mathfrak{T}_e + \delta T - \delta f \qquad (\delta \text{ licite quelconque}) \tag{6}$$

($\delta \mathfrak{T}_e$, travail virtuel des forces extérieures; δT, travail virtuel des forces fictives d'inertie; δf, travail virtuel non compensé des irréversibilités intrinsèques).

Pour le corps élastique considéré (élasticité parfaite, donc pas d'irréversibilités intrinsèques)[2], l'on a $\delta f = 0$.

Les forces extérieures se composent d'actions massiques [X_i, dans V et par unité de masse] et de contraintes superficielles [Π_i, par unité de surface] agissant sur la surface Σ qui limite V et dont la normale extérieure unitaire $\vec{n}$ a pour composantes α_j (cosinus directeurs).

L'action unitaire d'inertie est $-\gamma_i$ ($\vec{\gamma}$, accélération actuelle de P).

Ainsi, (6) s'écrit, compte tenu de (5):

$$\int_V \sigma_{il} \frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_l}\, dV = \int_V \varrho\, (X_i - \gamma_i)\, \delta x_i\, dV + \int_\Sigma \Pi_i\, \delta x_i\, d\Sigma . \tag{7}$$

Par la formule *d'Ostrogradsky*, l'intégrale du premier membre se dédouble:

$$\int_V \sigma_{il} \frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_l}\, dV = \int_\Sigma \alpha_l\, \sigma_{il}\, \delta x_i\, d\Sigma - \int_V \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial \chi_l}\, \delta x_i\, dV . \tag{8}$$

Isolons alors aux deux membres de (7) les intégrales dans V, et celles sur Σ. Puis, envisageons un δx_i tel qu'il soit non nul et quasi-constant ou bien dans un seul élément dV, ou bien sur un seul élément $d\Sigma$ et dans une couche avoisinante infiniment mince, et qu'il soit nul partout ailleurs.

Enfin, identifions successivement l'indice i, qui cesse alors d'être muet, à 1, 2, 3. Pour l'unique élément d'intégration dV ou $d\Sigma$ retenu, son facteur se révèle nul, d'où les deux séries de trois équations (l muet; $i = 1$, ou 2, ou 3):

$$\boxed{\partial \sigma_{il}/\partial x_i + \varrho\, (X_i - \gamma_i) = 0} \qquad (\textit{Mouvement}) , \tag{9}$$

$$\boxed{\Pi_i - \alpha_l \sigma_{il} = 0} \qquad (\textit{Contraintes}) . \tag{10}$$

Comme la surface Σ peut être tracée à l'intérieur de (C), $\vec{\Pi}$ a la signification, dans le continu déformable, d'une contrainte unitaire définie par le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ et par la normale unitaire $\vec{n}$ orientant l'élément $d\Sigma$ sur lequel s'exerce la force de liaison interne $\vec{\Pi}\, d\Sigma$. Et l'on a:

$$\vec{\Pi} = \vec{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}} . \tag{11}$$

4. Elasticité linéaire. Celle-ci traduit la linéarité des contraintes par rapport aux déformations (loi de *Hooke*) et implique que l'on se restreigne à de petits changements d'état, c'est-à-dire à des ε_{jk} et τ petits, à partir d'un état initial restrictivement défini, et dit naturel s'il est sans contraintes et à température uniforme ($\bar{\bar{\sigma}}^0 \equiv 0$, et $T^0 = C^{te}$), ou dit quasi-naturel si $\bar{\bar{\sigma}}^0$ et $T^0 - (T^0)_{moy}$ y sont de l'ordre au plus des variations ultérieures de $\bar{\bar{\sigma}}$ et de τ. Dire que les σ_{il} et τ restent „petits" signifie que, E étant un „module" de référence, fini et homogène aux σ_{il}, les quantités σ_{il}/E et $(\tau/E)\,(\partial \sigma_{il}/\partial \tau)$ restent du même ordre de petitesse que les ε_{il}.

Alors, la variation $\varphi(\varepsilon_{il}, \tau)$ du potentiel spécifique à partir de l'état initial reste elle-même petite, et se développe jusqu'au 2éme ordre inclus en

$$\varphi \cong C^0 + A^0 \tau + B_0 \tau^2 + D^0_{il}\, \varepsilon_{il} + F^0_{il}\, \tau\, \varepsilon_{il} + G^0_{il,mn}\, \varepsilon_{il}\, \varepsilon_{mn} , \tag{12}$$

les C^0, A^0, ... (six D^0_{il}, six F^0_{il} et vingt et un $G^0_{il,mn}$) étant fonctions de l'état initial, donc des $a_i \equiv x^0_i$.

Faisant intervenir le déplacement $\overrightarrow{P^0P}$, de composantes (i non muet) $\xi_i \equiv x_i - a_i$, on a, en variables a_i:

$$\overrightarrow{\text{grad}\, P^0P} \equiv \overline{\overline{e}} + \overline{r}\,, \tag{13}$$

où le tenseur symétrique gauche $\overline{r}$ ($r_{jj} = 0$; $r_{ij} = -r_{ji}$) représente le vecteur de la rotation particulaire dans les axes x_i, soit $\vec{r} = {}^1/_2 \,\text{rot}\, \overrightarrow{P^0P}$, et où les composantes $e_{jk} \equiv {}^1/_2 (\partial\xi_j/\partial a_k + \partial\xi_k/\partial a_j)$ du tenseur symétrique droit $\overline{\overline{e}}$ constituent l'approximation au second ordre près des ε_{jk} lorsque les ξ_i, comme l'exige la petitesse des changements d'état considérés, sont petits à une constante près (translation uniforme) et de même ordre que les ε_{jk}, e_{jk} et τ.

Evaluons alors, au second ordre près, les σ_{il} définis par (4).

L'on a, par $\xi_i \equiv x_i - a_i$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{\partial a_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} = K_{ij} + e_{ij} + r_{ij}\,, \tag{14}$$

avec $\overline{\overline{K}} \equiv \overline{\overline{s}}$ (tenseur sphérique unité), et (4) s'écrit ainsi, avec i et l non muets:

$$\sigma_{il} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}} (K_{ij} + e_{ij} + r_{ij})(K_{lk} + e_{lk} + r_{lk})\,. \tag{15}$$

Par $\overline{\overline{K}} \equiv \overline{\overline{s}}$ et par (13), et négligeant les produits de e et r (second ordre), l'on a:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}} K_{ij} K_{lk} &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jl}}\,, \\ \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}} K_{ij} (e_{lk} + r_{lk}) &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ik}} (e_{lk} + r_{lk})\,, \\ \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jk}} K_{lk} (e_{ij} + r_{ij}) &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{jl}} (e_{ij} + r_{ij})\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Au second ordre près, la continuité (ou invariabilité de $dm = \varrho\, dV$) entraîne que $\varrho \cong \varrho^0 (1 - \theta)$, avec $\theta \equiv (e_{ii}) = K_{pq} e_{pq}$.

Dérivant (12), utilisant (16) et enfin $\varepsilon_{jk} \cong e_{jk}$, l'expression (15) de σ_{il} devient (toujours avec i et l non muets)

$$\sigma_{il} \cong \varrho^0 \{D^0_{il} + F^0_{il}\,\tau + 2\, G^0_{il,mn}\, e_{mn} + D^0_{ik} (e_{lk} + r_{lk}) + D^0_{jl} (e_{ij} + r_{ij})\}\,. \tag{17}$$

Dans l'état initial, où tous les τ, ε, e sont nuls, les contraintes initiales σ^0_{il} s'identifient aux $\varrho^0 D^0_{il}$, coefficients donc petits comme les σ^0_{il} eux-mêmes. En posant $\beta^0_{il} = -\varrho^0 D^0_{il}$, (17) devient alors:

$$\sigma_{il} \cong \sigma^0_{il} - \beta^0_{il}\,\tau + (\sigma^0_{ik} r_{lk} + \sigma^0_{il} r_{ij}) + (2\,\varrho^0 G^0_{il,mn}\, e_{mn} + \sigma^0_{ik} e_{lk} + \sigma^0_{jl} e_{ij})\,. \tag{17'}$$

Le second terme $-\beta^0_{il}\,\tau$ donne l'influence de l'échauffement τ sur σ_{il}, indépendante de l'élasticité. Le troisième terme, qui traduit une influence de la rotation particulaire sur la composante σ_{il} relative au repère d'espace adopté, s'élimine parce que du second ordre, les r_{pq} comme les σ^0_{pq}/E étant par hypothèse petits.

Enfin, le quatrième terme de (17), où les produits des σ^0_{pq} et e_{mn} s'éliminent de même parce que du second ordre, est seul lié, et seulement lié, à la déformation petite e_{pq}. Posant:

$$\lambda^0_{il,mn} \equiv 2\,\varrho^0 G^0_{il,mn}\,, \tag{18}$$

(17) devient finalement, toujours avec i et l non muets:

$$\boxed{\sigma_{il} \cong \sigma^0_{il} - \beta^0_{il}\,\tau + \lambda^0_{il,mn}\, e_{mn}\,.} \tag{19}$$

Les $\lambda^0_{il,mn}$ sont a priori au nombre de vingt et un comme les $G^0_{il,mn}$ de la forme quadratique des ε_{jk} incluse dans φ selon (12), et constituent les coefficients d'élasticité linéaire de (C), relatifs à l'état initial considéré.

5. Isotropie homogène. a) Admise désormais pour l'état initial, elle implique que $\varphi(\varepsilon_{il}, \tau)$ défini par (12) ne dépende pas de l'orientation de la déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}$ dans la matière et, par suite, que les ε_{il} n'y interviennent que par les invariants de leurs formes linéaire et quadratiques, soit

par $\Theta \equiv (\varepsilon_{jj}) = K_{il}\,\varepsilon_{il}$, par Θ^2 et par (ε_{il}^2). Ainsi, (12) peut se mettre, avec quatre constantes seulement relatives à l'état initial $(\sigma^0, \beta^0, \lambda^0, \mu^0)$, sous la forme:

$$\varrho^0\,(\varphi - C^0 - A^0\,\tau - B^0\,\tau^2) \cong (\sigma^0 - \beta^0\,\tau)\left[K_{il}\,\varepsilon_{il} + \frac{\lambda^0}{2}\,(K_{il}\,\varepsilon_{il})^2 + \mu^0\,(\varepsilon_{il}^2)\right]. \tag{20}$$

Alors, les $\partial\varphi/\partial\varepsilon_{pq}$ de (15) conduisent, dans (19) et compte tenu finalement de $\varepsilon_{pq} \approx e_{pq}$, à l'expression

$$\boxed{\sigma_{il} \cong K_{il}\,(\sigma^0 - \beta^0\,\tau + \lambda^0\,\theta) + 2\,\mu^0\,e_{il}}\;; \qquad \theta = (e_{jj})\,. \tag{21}$$

Les λ^0 et μ^0 sont les coefficients d'élasticité linéaire de *Lamé*. Le „module" de référence E précédemment visé peut être pris égal à

$$E = \mu^0\,\frac{3\,\lambda^0 + 2\,\mu^0}{\lambda^0 + \mu^0} \qquad (\textit{Module de Young})\,,$$

et ce sont les σ^0/E, $\beta^0\,\tau/E$ et σ_{il}/E qui doivent être, ou rester, de petitesse comparable à celle des ξ_i, e_{ij}, r_{ij}.

b) Il ressort de (21) que l'isotropie en l'état initial exige que le tenseur de la contrainte initiale se réduise au scalaire $K_{il}\,\sigma^0$ (contrainte normale, et indifférente à l'orientation). Cette isotropie est donc admissible non seulement pour un état naturel ($\sigma^0 \equiv 0$), mais aussi pour un état quasi-naturel et à σ^0/E scalaire (et petit).

c) L'isotropie homogène serait encore admissible pour un état initial à T^0 quasi-uniforme, et à contrainte initiale scalaire et finie (σ^0/E fini). Le raisonnement du n^0 5. a) reste valable et conserve la loi (21) pour ce cas, mais les β^0, λ^0 et μ^0 y dépendent a priori aussi de σ^0.

Il serait mal commode, par contre, d'établir ce résultat à partir de (12), (15) et (16), parce que les D^0_{pq} deviennent finis et de même ordre que les $G^0_{il,mn}$, et que les termes $-\varrho^0\,\Theta\,D^0_{il}$ ne sont plus négligeables.

Le cas en question englobe le fluide compressible et non visqueux (élasticité parfaite), pour lequel on admet alors $\mu^0 \equiv 0$, et dont la *Mécanique* se traite plus facilement suivant d'autres voies.

6. Comportement calorifique du corps à élasticité linéaire. La loi (20) associe les effets respectifs, sur les contraintes, de l'échauffement et de la déformation, en transformation assez petite et à partir d'un état initial où la température est uniforme, ou quasi-uniforme au premier ordre près (ordre de τ lui-même).

Dans cette transformation, la quantité de chaleur $DQ\,dm$ reçue par l'élement $dm = \varrho\,dV$ s'exprime, d'après le principe de *Carnot-Clausius* et compte tenu de $S = -\partial\varphi/\partial T \equiv -\partial\varphi/\partial\tau$ (S, entropie spécifique):

$$DQ = T\,dS \cong -T^0\left[\tau\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right)^2 + \varepsilon_{il}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau\,\partial\varepsilon_{il}}\right)^0\right]. \tag{22}$$

Notant c^0 et Λ^0_{il} la chaleur spécifique du corps et ses chaleurs latentes de déformation en l'état initial, DQ s'identifie par définition à $c^0\,\tau + \Lambda^0_{il}\,\varepsilon_{il}$. L'on a donc, au second ordre près et pour un état initial isotrope, compte tenu de (20) et de (22):

$$c^0\,\tau + \Lambda^0_{il}\,e_{il} \equiv -2\,T^0\,\varrho^0\,B^0\,\tau + T^0\,\frac{\beta^0}{\varrho^0}\,K_{il}\,e_{il}\,,$$

d'où:

$$c^0 = -2\,T^0\,\varrho^0\,B^0; \qquad \Lambda^0_{il} = T^0\,\frac{\beta^0}{\varrho^0}\,K_{il}\,.$$

Pour une transformation partout adiabatique (donc aussi isentropique), (21) donne:

$$\tau = -\frac{T^0}{c^0\,\varrho^0}\,\beta^0\,\theta\,, \qquad (\theta \equiv e_{jj})\,,$$

et σ_{il}, dans (20), peut n'être relié qu'à la déformation e_{il} en posant $\lambda'^0 = \lambda^0 + T^0(\beta^0)^2/c^0\,\varrho^0$ (λ'^0 est dit parfois coefficient d'élasticité linéaire adiabatique).

Ce qui précède découle directement de la définition admise pour le potentiel φ du corps (C) et de l'absence de résistances passives, conditions qui définissent en effet complètement (C) au point de vue thermodynamique et pour ce qui nous occupe.

(Eingegangen am 4. September 1958.)

Anschrift des Verfassers: *M. Maurice Roy*, Directeur de l'O. N. E. R. A.,
Chatillon-sous-Bagneux (Seine), Frankreich.

Zur Theorie elastischer Schalen

Von D. Rüdiger

1. Einleitung. Die Theorie der elastischen Schalen, wie sie zuerst von *W. Flügge*[1] für die Kreiszylinderschale, dann von *A. I. Lurje*, *R. Byrne* Jr.[2] für beliebige, auf Hauptkrümmungslinien bezogene, schließlich von *W. S. Wlassow*[3] für in allgemeinen Koordinaten beschriebene Schalen aufgestellt wurde, geht von der Voraussetzung aus, daß alle Punkte, die vor der Formänderung auf einer Normalen zur Schalenmittelfläche liegen, sich auch nach dieser auf einer Normalen zur verformten Mittelfläche befinden. Demzufolge verschwinden die Winkeländerungen in Normalenrichtung, so daß die Querkraftverformungen null sind. *E. Reissner*[4] hat am Beispiel der Drehschalen gezeigt, daß diese Voraussetzung — kurz *Bernoulli*sche Hypothese — zu einer Inkonsequenz der Grundgleichungen der Schalentheorie führt. Es treten in den Gleichungen zwischen Schnittkräften, Schnittmomenten und Verschiebungen der Schalenmittelfläche Terme auf, die dieselbe Größenordnung haben, wie die nicht beachteten Querkraftverformungen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Inkonsequenz für beliebige Schalen in allgemeinen Koordinaten aufzuzeigen. Zu diesem Zwecke wird eine Theorie der Schalen mit Berücksichtigung der Querkraftverformungen in schiefwinkeligen Koordinaten aufgestellt. Dabei werden auch näherungsweise die Normalspannungen quer zur Schale berücksichtigt. Es wird nachgewiesen, daß sich die von den Querkraftverformungen herrührenden Terme der Elastizitätsgleichungen zu anderen in den Gleichungen auftretenden Termen, wie $h^2\,K:1$ verhalten, wobei h die Schalenstärke, K die *Gauß*sche Krümmung ist. Glieder von derselben Größenordnung treten aber auch auf, wenn man die *Bernoulli*sche Hypothese benutzt. Vernachlässigt man in den Elastizitätsgleichungen konsequent alle — bedeutungslosen — Terme von der Größenordnung der Querkraftverformungen, so erhält man ein System von Schalengrundgleichungen, das in sich widerspruchsfrei ist und die Gleichgewichtsbedingung gegen Verdrehen um die Schalennormale erfüllt.

Zur geometrischen Beschreibung der Schalenmittelfläche und des Raumes innerhalb der oberen und unteren Schalenleibung werden einige Sätze aus der Theorie allgemeiner Koordinaten und der Theorie der Flächen verwendet. Die rechtwinkelig kartesischen Koordinaten eines Raumpunktes sind x^i, x^k, x^p, x^q, wobei die lateinischen Buchstaben an Stelle der Zahlen $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ stehen. Die drei krummlinigen Koordinaten eines Raumpunktes werden mit x^λ, x^μ, x^ν bezeichnet. Die griechischen Buchstaben $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ kennzeichnen die Zahlen 1, 2, 3. Die kartesischen Koordinaten x^k sind differenzierbare Funktionen der krummlinigen Koordinaten x^λ und umgekehrt. Durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial(\,)}{\partial x^\lambda} = (\,)_{|\lambda}\,, \qquad \frac{\partial(\,)}{\partial x^k} = (\,)_{|k}$$

erhält man die Tangenten- und Gradientenvektoren

$$c^k_\lambda = x^k{}_{|\lambda}\,, \qquad c^\lambda_k = x^\lambda{}_{|k}\,. \tag{1$_1$}$$

Für ihre partiellen Ableitungen wird

$$c^k_{\lambda\mu} = c^k_{\lambda|\mu}\,, \qquad c^\lambda_{k\mu} = c^\lambda_{k|\mu} \tag{1$_2$}$$

geschrieben. Die Übertragung des Kroneckersymbols $\delta_{ik} = \delta^{ik}$ in die allgemeinen Koordinaten liefert den Maßtensor in kovarianter und kontravarianter Darstellung

$$g_{\lambda\mu} = \delta_{ik}\, c^i_\lambda\, c^k_\mu\,, \qquad g^{\lambda\mu} = \delta^{ik}\, c^\lambda_i\, c^\mu_k\,, \tag{2}$$

wobei verabredet wird, daß über gleiche, in einem Produkt oben und unten auftretende Indizes zu summieren ist. Die Unterdeterminante $g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2$ der kovarianten Koordinaten des Maßtensors wird mit g abgekürzt. Die kovarianten Ableitungen im Raum werden durch einen langen Doppelstrich

$$A^\lambda{}_{||\mu}\,, \qquad B^{\lambda\mu}{}_{||\nu}\,, \qquad B_{\lambda\mu}{}_{||\nu}\,, \tag{3$_1$}$$

Überschiebungen der kovarianten Ableitungen mit dem Maßtensor durch

$$A^{\cdot\cdot}{}_{||}{}^\nu = A^{\cdot\cdot}{}_{||\mu}\, g^{\mu\nu} \tag{3$_2$}$$

gekennzeichnet. Die *Christoffel*schen Dreiindizessymbole zweiter Art sind durch die Gleichungen

$$\Gamma^\lambda_{\cdot\mu\nu} = c^\lambda_k\, c^k_{\mu\nu} = -\,c^k_\mu\, c^\lambda_{k\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\varrho}\,(g_{\varrho\nu|\mu} + g_{\mu\varrho|\nu} - g_{\mu\nu|\varrho}) \tag{4}$$

gegeben.

[1] *W. Flügge*, Ing. Arch. 3 (1932) S. 463.

[2] *A. И. Лурье*, Прикладная математика и механика 4 (1940) Nr. 2. *Ralph Byrne Jr.*, Seminar Rep. in Math. (Los Angeles), University of California Publications in Mathematics 2 (1944) S. 103.

[3] *В. З. Власов*, Прикладная математика и механика 8 (1944) S. 109.

[4] *E. Reissner*, J. Math. Phys. 31 (1952) S. 109.

Zur geometrischen Beschreibung der Punkte innerhalb der Schalenleibung dient ein allgemeines Koordinatensystem, dessen Koordinate $x^3 = z$ mit der Richtung des Normalenvektors $N^k = N_k$ der Schalenmittelfläche in jedem Punkte identisch ist. Für dieses System verschwinden wegen $c_1^k N_k = c_2^k N_k = 0$, $c_k^1 N^k = c_k^2 N^k = 0$ die gemischten Koordinaten des Maßtensors im Raum $g^{13} = g^{23} = g_{13} = g_{23} = 0$, und es ist $g^{33} = g_{33} = 1$. Die kartesischen Koordinaten der Schalenmittelfläche seien $\overset{0}{x}{}^i, \overset{0}{x}{}^k, \overset{0}{x}{}^p, \overset{0}{x}{}^q$, die krummlinigen Flächenkoordinaten $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, x^\delta, x^\sigma, x^\tau$. Die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \tau$ sind im Gegensatz zu $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ Repräsentanten der Zahlen 1 und 2. Die Tangenten- und Gradientenvektoren des Koordinatennetzes der Schalenmittelfläche sind

$$\overset{0}{c}{}_\alpha^k = \frac{\partial \overset{0}{x}{}^k}{\partial x^\alpha}, \qquad \overset{0}{c}{}_k^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overset{0}{x}{}^k}. \tag{5_1}$$

Für ihre Ableitungen wird

$$\overset{0}{c}{}_{\alpha\beta}^k = \overset{0}{c}{}_{\alpha|\beta}^k, \qquad \overset{0}{c}{}_{k\beta}^\alpha = \overset{0}{c}{}_{k|\beta}^\alpha \tag{5_2}$$

eingeführt. Der Maßtensor, der Haupttensor und die Koeffizienten der dritten Fundamentalform der Schalenmittelfläche bzw. ihre kontravarianten und kovarianten Koordinaten sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &= \delta^{ik}\, \overset{0}{c}{}_i^\alpha\, \overset{0}{c}{}_k^\beta, & a_{\alpha\beta} &= \delta_{ik}\, \overset{0}{c}{}_\alpha^i\, \overset{0}{c}{}_\beta^k, & b_{\alpha\beta} &= \overset{0}{c}{}_{\alpha\beta}^k\, N_k, \\ b^{\alpha\beta} &= b_{\gamma\delta}\, a^{\alpha\gamma}\, a^{\beta\delta}, & c_{\alpha\beta} &= b_\alpha^\gamma\, b_{\gamma\beta}, & c^{\alpha\beta} &= b_\gamma^\alpha\, b^{\gamma\beta} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

gegeben. Die kovariante Differentiation auf der Schalenmittelfläche und die Überschiebung dieser Ableitung mit dem Maßtensor der Schalenmittelfläche wird durch einen langen senkrechten Strich

$$A^\alpha|_\beta, \qquad B^{\alpha\beta}|_\gamma, \qquad A^{\cdot\cdot}|^\alpha = A^{\cdot\cdot}|_\beta\, a^{\alpha\beta}$$

gekennzeichnet. Die Christoffelsymbole zweiter Art der Schalenmittelfläche lauten

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{\cdot\beta\gamma}^\alpha = \overset{0}{c}{}_k^\alpha\, \overset{0}{c}{}_{\beta\gamma}^k = -\overset{0}{c}{}_\beta^k\, \overset{0}{c}{}_{k\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\, a^{\alpha\delta}\, (a_{\delta\gamma|\beta} + a_{\beta\delta|\gamma} - a_{\beta\gamma|\delta}).$$

Für die Koordinaten der Schalenpunkte im Raum innerhalb der Schalenleibungen gilt

$$x^k = \overset{0}{x}{}^k + z\, N^k.$$

Daraus folgen durch Differentiation unter Beachtung von $N^k|_\alpha = -b_\alpha^\beta\, \overset{0}{c}{}_\beta^k$ mit

$$F_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - z\, b_\alpha^\beta \tag{7_1}$$

die Tangentenvektoren zu

$$c_\alpha^k = F_\alpha^\beta\, \overset{0}{c}{}_\beta^k. \tag{7_2}$$

Der Tensor F_α^β wird in Anlehnung an *F. Krauß*[1] als Schalentensor bezeichnet. Aus den Gleichungen (6) können die für die weitere Rechnung notwendigen Koordinaten des Maßtensors und der Christoffelsymbole zweiter Art berechnet werden. Für diese gilt[2]

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - z\, 2\, b_{\alpha\beta} + z^2\, c_{\alpha\beta}, \\ g^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\beta} + z\, 2\, b^{\alpha\beta} + z^2\, 3\, c^{\alpha\beta}, \\ g_{33} &= g^{33} = 1, \quad g_{\alpha 3} = g^{\alpha 3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{\cdot\beta\gamma}^\alpha &= \overset{0}{\Gamma}{}_{\cdot\beta\gamma}^\alpha - z\, b_\beta^\alpha|_\gamma - z^2\, b_\delta^\alpha\, b_\beta^\delta|_\gamma, \\ \Gamma_{\cdot\alpha\beta}^3 &= b_{\alpha\beta} - z\, c_{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{\cdot\beta 3}^\alpha &= -b_\beta^\alpha - z\, c_\beta^\alpha - z^2\, b_\beta^\gamma\, b_\gamma^\alpha, \\ \Gamma_{\cdot\alpha 3}^3 &= \Gamma_{\cdot 33}^\alpha = \Gamma_{\cdot 33}^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Mit den Gleichungen (9) kann man die kovarianten Ableitungen des Verschiebungsvektors im Schalenraum berechnen:

$$\left.\begin{aligned} V^\alpha\|^\beta &= V^\alpha|^\beta - b^{\alpha\beta}\, V^3 + z\,(-3\, c^{\alpha\beta}\, V^3 + 2\, b^{\beta\gamma}\, V^\alpha|_\gamma - b^{\alpha\beta}|_\gamma\, V^\gamma) \\ &\quad + z^2\,(-6\, b^{\alpha\gamma}\, c_\gamma^\beta\, V^3 + 3\, c^{\beta\gamma}\, V^\alpha|_\gamma - b^{\alpha\gamma}\, b_\gamma^\beta|_\delta\, V^\delta - 2\, b^{\beta\gamma}\, b_\gamma^\alpha|_\delta\, V^\delta), \\ V^\alpha\|_\alpha &= V^\alpha|_\alpha - b_\alpha^\alpha\, V^3 + z\,(-3\, c_\alpha^\alpha\, V^3 + 2\, b_\beta^\alpha\, V^\beta|_\alpha - b_\alpha^\alpha|_\beta\, V^\beta) \\ &\quad + z^2\,(-6\, b_\beta^\alpha\, c_\alpha^\beta\, V^3 + 3\, c_\beta^\alpha\, V^\beta|_\alpha - b_\beta^\alpha\, b_\alpha^\beta|_\gamma\, V^\gamma - 2\, b_\beta^\alpha\, b^\beta|_\gamma\, V^\gamma), \\ V^\alpha\|^3 &= V^\alpha|^3 - (b_\gamma^\alpha + z\, c_\gamma^\alpha + z^2 b_\beta^\alpha\, c_\gamma^\beta)\, V^\gamma, \\ V^3\|^\alpha &= V^3|^\alpha + (b_\gamma^\alpha + z\, c_\gamma^\alpha + z^2\, b_\beta^\alpha\, c_\gamma^\beta)\, V^\gamma + (z\, 2\, b_\gamma^\alpha + z^2\, 3\, b_\beta^\alpha\, b_\gamma^\beta)\, V^3|^\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

[1] *F. Krauß*, Math. Annalen 101 (1929) S. 61.

[2] *E. A. Deuker*, Z. Angew. Math. Mech. 23 (1943) S. 81; *H. Neuber*, Z. Angew. Math. Mech. 29 (1949) S. 97, 142; *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 149; *H. Parkus*, Österr. Ing.-Arch. 4 (1950) S. 160.

Für die Festlegung der Eigengewichtsbelastung der Schale ist die Kenntnis des Flächenelementes

$$dF(z) = \sqrt{a}\left(1 - z\,b^{\alpha}_{\alpha} + z^2\,\frac{b}{a}\right)dx^1\,dx^2 \tag{11}$$

im Abstand z von der Schalenmittelfläche notwendig. In (11) ist $a = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$ die Determinante der kovarianten Koordinaten des Maßtensors der Schalenmittelfläche. Das Volumen eines Schalenelementes von der Dicke h ist mit (11) und $b = b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2$

$$dV = \sqrt{a}\,h\left(1 + \frac{h^2}{12}\,\frac{b}{a}\right)dx^1\,dx^2\,; \tag{12_1}$$

der Schwerpunktabstand $\overset{0}{z}$ von der Schalenmittelfläche beträgt

$$\overset{0}{z} = -\frac{h^2}{12}\,b^{\alpha}_{\alpha}\left(1 - \frac{h^2}{12}\,\frac{b}{a}\right). \tag{12_2}$$

2. Das Elastizitätsgesetz der Schale. Das *Hooke*sche Gesetz des dreidimensionalen Spannungszustandes für homogen isotrope Medien lautet mit dem Schubelastizitätsmodul G und der Querdehnungszahl ν

$$\sigma^{\lambda\mu} = 2\,G\left(D^{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,g^{\lambda\mu}\,D^{\varrho}_{\varrho}\right). \tag{13}$$

Die Gleichungen (13) werden für die hier benutzten allgemeinen Koordinaten des Schalenraumes ausgeschrieben:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta} &= 2\,G\left[D^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,g^{\alpha\beta}\,(D^{\gamma}_{\gamma} + D^{3}_{3})\right],\\
\sigma^{\alpha 3} &= 2\,G\,D^{\alpha 3},\\
\sigma^{33} &= 2\,G\left[D^{33} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,(D^{\gamma}_{\gamma} + D^{3}_{3})\right].
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Aus der Gleichung (14_3) wird die Dehnung D^3_3 quer zur Schale berechnet

$$D^3_3 = \sigma^3_3\,\frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)} - \frac{\nu}{(1-\nu)}\,D^{\gamma}_{\gamma} \tag{15}$$

und in die Gleichung (14_1) eingesetzt. Das Ergebnis ist

$$\sigma^{\alpha\beta} = 2\,G\left(D^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\,g^{\alpha\beta}\,D^{\gamma}_{\gamma}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\,g^{\alpha\beta}\,\sigma^3_3\,. \tag{16}$$

Mit $g^{\alpha\beta}$ nach Gleichung (8_2) kann (16) in der Form

$$\sigma^{\alpha\beta} = 2\,G\left(D^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\,a^{\alpha\beta}\,D^{\gamma}_{\gamma}\right) + \frac{2\,G\,\nu}{1-\nu}\,(z\,2\,b^{\alpha\beta} + z^2\,3\,c^{\alpha\beta})\,D^{\gamma}_{\gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\,g^{\alpha\beta}\,\sigma^3_3\,,$$

oder mit dem Elastizitätsmodul E und dem ε-Tensor in der Form

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\,(D^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\gamma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\delta}\,D^{\gamma\delta}) + \frac{E\,\nu}{1-\nu^2}\,(z\,2\,b^{\alpha\beta} + z^2\,3\,c^{\alpha\beta})\,D^{\gamma}_{\gamma} + \frac{\nu}{1-\nu}\,g^{\alpha\beta}\,\sigma^3_3 \tag{17}$$

dargestellt werden.

3. Der Deformationstensor der Schale. Bezeichnen V^{λ} die kontravarianten Koordinaten des Verschiebungsvektors für kleine Verschiebungen, dann sind der Deformationstensor bzw. seine kontravarianten Koordinaten durch die Gleichungen

$$D^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,(V^{\lambda}||^{\mu} + V^{\mu}||^{\lambda}) \tag{18}$$

definiert. An Stelle von (18) gilt für die Flächenkoordinaten $D^{\alpha\beta}$, $D^{\alpha 3}$ und D^{33}

$$\left.\begin{aligned}
D^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\,(V^{\alpha}||^{\beta} + V^{\beta}||^{\alpha}),\\
D^{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\,(V^{\alpha}||^{3} + V^{3}||^{\alpha}),\\
D^{33} &= V^{3}||^{3} = \frac{\partial V^3}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}\,D^{\gamma}_{\gamma} + \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\,\sigma^3_3\,.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für die Dehnungssumme D^{γ}_{γ} gilt nach Gleichung (19_1)

$$D^{\gamma}_{\gamma} = V^{\gamma}||_{\gamma}\,.$$

Der Funktionsverlauf $V^3 = V^3(z)$ ergibt sich aus Gleichung (19_3). Er ist infolge der Querdehnung des Mediums durch den Längsspannungszustand und durch die mit der Belastung in Normalenrichtung in Beziehung stehende Spannung σ^3_3 bestimmt. Diese setzen wir als Polynom

$$\sigma^3_3 = \overset{0}{\sigma}{}^3_3 + z\,\overset{1}{\sigma}{}^3_3 + z^2\,\overset{2}{\sigma}{}^3_3$$

an, da sie für ein annähernd zweidimensionales Kontinuum nicht exakt berechnet werden kann. Der Verschiebungszustand V^1, V^2, V^3 jedes Schalenpunktes soll so sein, daß die Winkeländerung $2\,D^{\alpha\,3}$ normal zur Schale

$$2\,D^{\alpha\,3} = V^{\alpha}||^3 + V^3||^{\alpha} = -\overset{0}{\psi}{}^{\alpha} \tag{20}$$

keine Funktion von z ist (Ebenbleiben der Querschnitte). An Stelle der Hypothese (20) kann auch eine Entwicklung der Größe $2\,D^{\alpha\,3}$ nach Potenzen des Abstandes z von der Schalenmittelfläche treten mit der Maßgabe, daß an den Schalenleibungen die Schubspannungen verschwinden. Diese Festlegung hat jedoch keine Verbesserung der Theorie zur Folge. Setzt man die Raumableitungen nach Gleichung (10) in die Gleichungen (20) und (19_3) ein, so ergeben sich diese zu

$$\left.\begin{aligned} &V^3|^{\alpha} + V^{\alpha}|^3 + (z\,2\,b^{\alpha}_{\gamma} + z^2\,3\,c^{\alpha}_{\gamma})\,V^3|^{\gamma} + \overset{0}{\psi}{}^{\alpha} = 0\,, \\ &\frac{\partial V^3}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu}\left[V^{\alpha}|_{\alpha} - b^{\alpha}_{\alpha}\,V^3 - z\left(c^{\alpha}_{\alpha}\,V^3 + b^{\alpha}_{\alpha}|_{\beta}\,V^{\beta}\right) - z^2\left(b^{\alpha}_{\beta}\,c^{\beta}_{\alpha}\,V^3 + b^{\alpha}_{\beta}\,b^{\beta}_{\alpha}|_{\gamma}\,V^{\gamma}\right)\right] \\ &\qquad - \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\,\sigma^3_3 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Gleichungen (21) sind zwei Differentialgleichungen, aus denen die Verschiebungen $V^{\alpha} = V^{\alpha}(z)$ und $V^3 = V^3(z)$ durch die Ansätze

$$V^{\alpha} = \overset{0}{V}{}^{\alpha} + z\,\overset{1}{V}{}^{\alpha} + z^2\,\overset{2}{V}{}^{\alpha} + \cdots\,, \qquad V^3 = W + z\,\overset{1}{V}{}^3 + z^2\,\overset{2}{V}{}^3 + \cdots \tag{22}$$

leicht berechnet werden können. Bei Beschränkung der Ansätze (22) auf die ersten drei Glieder erhält man mit dem Verdrehungswinkel $\vartheta^{\alpha} = W|^{\alpha} + \overset{0}{\psi}{}^{\alpha}$

$$\left.\begin{aligned} V^{\alpha} &= \overset{0}{V}{}^{\alpha} - z\,\vartheta^{\alpha} - z^2\left(b^{\alpha}_{\beta}\,W|^{\beta} - \frac{\nu}{2\,(1-\nu)}\,\overset{0}{D}{}^{\beta}_{\beta}|^{\gamma} + \frac{1-2\,\nu}{4\,G\,(1-\nu)}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3|^{\alpha}\right), \\ V^3 &= W - z\left(\frac{\nu}{1-\nu}\,\overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3\right) + z^2\left[\frac{\nu}{2\,(1-\nu)}\left(\vartheta^{\alpha}|_{\alpha} + c^{\alpha}_{\alpha}\,W + b^{\alpha}_{\alpha}|_{\beta}\,\overset{0}{V}{}^{\beta}\right)\right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu^2}{2\,(1-\nu)^2}\,b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{0}{D}{}^{\beta}_{\beta} + \frac{\nu\,(1-2\,\nu)}{4\,G\,(1-\nu)^2}\,b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3 + \frac{1-2\,\nu}{4\,G\,(1-\nu)}\,\overset{1}{\sigma}{}^3_3\right]. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Summe der Flächendehnungen $\overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha}$ ist in (25) erklärt. Die Gleichungen (23) ermöglichen es, die Flächenkoordinaten des Deformationstensors als Funktion des Abstandes von der Schalenmittelfläche in der Form

$$D^{\alpha\beta} = \overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + z\,\overset{1}{D}{}^{\alpha\beta} + z^2\,\overset{2}{D}{}^{\alpha\beta}\,, \qquad D^{\alpha}_{\alpha} = \overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} + z\,\overset{1}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} + z^2\,\overset{2}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} \tag{24}$$

darzustellen, wobei die in (24) verwendeten Abkürzungen folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned} \overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\overset{0}{V}{}^{\alpha}|^{\beta} + \overset{0}{V}{}^{\beta}|^{\alpha}\right) - b^{\alpha\beta}\,W\,, \\ \overset{1}{D}{}^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left(\vartheta^{\alpha}|^{\beta} + \vartheta^{\beta}|^{\alpha}\right) - b^{\alpha\beta}|_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\gamma} + \left(b^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\beta}|^{\gamma} + b^{\beta}_{\alpha}\,\overset{0}{V}{}^{\alpha}|^{\gamma}\right) - 3\,c^{\alpha\beta}\,W \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}\,b^{\alpha\beta} - \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3|^{\alpha\beta}\,, \\ \overset{2}{D}{}^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left(b^{\alpha}_{\gamma}\,W|^{\beta\gamma} + b^{\beta}_{\gamma}\,W|^{\alpha\gamma}\right) - b^{\alpha}_{\gamma}|^{\beta}\,W|^{\gamma} - 6\,b^{\alpha\gamma}\,c^{\beta}_{\gamma}\,W - \left(b^{\alpha}_{\gamma}\,\vartheta^{\beta}|^{\gamma} + b^{\beta}_{\gamma}\,\vartheta^{\alpha}|^{\gamma}\right) + b^{\alpha\beta}|_{\gamma}\,\vartheta^{\gamma} \\ &\quad + \frac{3}{2}\left(c^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\beta}|^{\gamma} + c^{\beta}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\alpha}|^{\gamma}\right) - \frac{3}{2}\left(b^{\alpha}_{\gamma}|_{\delta}\,b^{\beta\gamma} + b^{\beta}_{\gamma}|_{\delta}\,b^{\alpha\gamma}\right)\overset{0}{V}{}^{\delta} \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{1}{2}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}|^{\alpha\beta} + 3\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}\,c^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{2\,(1-\nu)}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}\,b^{\delta}_{\delta}\,b^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\vartheta^{\gamma}|_{\gamma} + b^{\gamma}_{\gamma}|_{\delta}\,\overset{0}{V}{}^{\delta} + c^{\gamma}_{\gamma}\,W\right)b^{\alpha\beta}\right] \\ &\quad + \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\left[-\frac{1}{2}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3|^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\overset{1}{\sigma}{}^3_3\,b^{\alpha\beta} - 3\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3\,c^{\alpha\beta} - \frac{\nu}{2\,(1-\nu)}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3\,b^{\gamma}_{\gamma}\,b^{\alpha\beta}\right], \\ \overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} &= \overset{0}{V}{}^{\alpha}|_{\alpha} - b^{\alpha}_{\alpha}\,W\,, \\ \overset{1}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} &= -\vartheta^{\alpha}|_{\alpha} - b^{\alpha}_{\alpha}|_{\beta}\,\overset{0}{V}{}^{\beta} - c^{\alpha}_{\alpha}\,W + \frac{\nu}{1-\nu}\,\overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\beta} - \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3\,b^{\alpha}_{\alpha}\,, \\ \overset{2}{D}{}^{\alpha}_{\alpha} &= -b^{\alpha}_{\beta}\,b^{\beta}_{\alpha}|_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\gamma} - b^{\alpha}_{\beta}|_{\alpha}\,W|^{\beta} - b^{\alpha}_{\beta}\,c^{\beta}_{\alpha}\,W + b^{\alpha}_{\alpha}|_{\beta}\,\vartheta^{\beta} - b^{\alpha}_{\beta}\,W|^{\beta}_{\alpha} \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{1}{2}\,\overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha}|^{\beta}_{\beta} + \overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha}\,c^{\beta}_{\beta} + \frac{\nu}{2\,(1-\nu)}\,\overset{0}{D}{}^{\alpha}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\beta}\,b^{\gamma}_{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\vartheta^{\alpha}|_{\alpha} + b^{\alpha}_{\alpha}|_{\beta}\,\overset{0}{V}{}^{\beta} + c^{\alpha}_{\alpha}\,W\right)b^{\gamma}_{\gamma}\right] \\ &\quad + \frac{1-2\,\nu}{2\,G\,(1-\nu)}\left[-\frac{1}{2}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3|^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{2}\,\overset{1}{\sigma}{}^3_3\,b^{\alpha}_{\alpha} - \overset{0}{\sigma}{}^3_3\,c^{\alpha}_{\alpha} - \frac{\nu}{2\,(1-\nu)}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3\,b^{\alpha}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\beta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

4. Die Schnittgrößen als Funktion der Verschiebungen der Schalenmittelfläche. Die Schnittkräfte und Schnittmomente bzw. deren kontravariante Koordinaten sind mit dem Spannungstensor $\sigma^{\alpha\beta}$ und dem Schalentensor F_β^α durch die Gleichungen[1]

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \sigma^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta \, dz, \qquad M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \sigma^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta \, z \, dz, \qquad Q^\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sqrt{\frac{g}{a}}\, \sigma^{\alpha 3}\, dz \tag{26}$$

verknüpft. Die kontravarianten Koordinaten des Spannungstensors kann man mit Hilfe des *Hooke*schen Gesetzes (17) und des Deformationstensors (24) als Funktion des Abstandes von der Schalenmittelfläche darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2}\Big\{\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\, \varepsilon^\alpha_{\cdot\gamma}\, \varepsilon^\beta_{\cdot\delta}\, \overset{0}{D}{}^{\gamma\delta} + z\Big[\overset{1}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\left(\varepsilon^\alpha_{\cdot\gamma}\, \varepsilon^\beta_{\cdot\delta}\, \overset{1}{D}{}^{\gamma\delta} + 2\, b^{\alpha\beta}\, \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\right)\Big] \\
&\quad + z^2\Big[\overset{2}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\left(\varepsilon^\alpha_{\cdot\gamma}\, \varepsilon^\beta_{\cdot\delta}\, \overset{2}{D}{}^{\gamma\delta} + 2\, b^{\alpha\beta}\, \overset{1}{D}{}^\gamma_\gamma + 3\, c^{\alpha\beta}\, \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\right)\Big]\Big\} \\
&\quad + \frac{\nu}{1-\nu}\left[a^{\alpha\beta}\, \overset{0}{\sigma}{}^3_3 + z\left(2\, b^{\alpha\beta}\, \overset{0}{\sigma}{}^3_3 + a^{\alpha\beta}\, \overset{1}{\sigma}{}^3_3\right) + z^2\left(3\, c^{\alpha\beta}\, \overset{0}{\sigma}{}^3_3 + 2\, b^{\alpha\beta}\, \overset{1}{\sigma}{}^3_3 + a^{\alpha\beta}\, \overset{2}{\sigma}{}^3_3\right)\right], \\
\sigma^{\alpha 3} &= \frac{E}{1-\nu^2}\, \frac{1-\nu}{2}\, (W|^\alpha - \vartheta^\alpha).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Werden die Gleichungen für die Spannungen (27) in (26) eingesetzt, so erhält man nach Ausführung der Integration die folgenden Beziehungen zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen der Schalenmittelfläche

$$\left.\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left\{\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\, \varepsilon^\alpha_{\cdot\gamma}\, \varepsilon^\beta_{\cdot\delta}\, \overset{0}{D}{}^{\gamma\delta} + \frac{h^2}{12}\left[\overset{2}{D}{}^{\alpha\beta} - \overset{1}{D}{}^{\alpha\gamma}\left(\delta^\beta_\gamma\, b^\delta_\delta + b^\beta_\gamma\right) + \overset{0}{D}{}^{\alpha\gamma}\left(\delta^\beta_\gamma \frac{b}{a} + b^\beta_\gamma\, b^\delta_\delta\right)\right]\right. \\
&\quad + \nu\,\frac{h^2}{12}\left[\varepsilon^\alpha_{\cdot\sigma}\, \varepsilon^\gamma_{\cdot\tau}\left(\delta^\beta_\gamma\, \overset{2}{D}{}^{\sigma\tau} - \overset{1}{D}{}^{\sigma\tau}\left(\delta^\beta_\gamma\, b^\delta_\delta + b^\beta_\gamma\right) + \overset{0}{D}{}^{\sigma\tau}\left(\delta^\beta_\gamma \frac{b}{a} + b^\beta_\gamma\, b^\delta_\delta\right)\right)\right. \\
&\quad \left.\left. + 2\, b^{\alpha\beta}\, \overset{1}{D}{}^\gamma_\gamma + \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\left(c^{\alpha\beta} - 2\, b^{\alpha\beta}\, b^\delta_\delta\right)\right]\right\} \\
&\quad + \frac{h\,\nu}{1-\nu}\left\{a^{\alpha\beta}\, \overset{0}{\sigma}{}^3_3 + \frac{h^2}{12}\left[\left(c^{\alpha\beta} - b^\gamma_\gamma\, b^{\alpha\beta} + \frac{b}{a}\, a^{\alpha\beta}\right)\overset{0}{\sigma}{}^3_3 + \left(b^{\alpha\beta} - b^\gamma_\gamma\, a^{\alpha\beta}\right)\overset{1}{\sigma}{}^3_3 + a^{\alpha\beta}\, \overset{2}{\sigma}{}^3_3\right]\right\}, \\
M^{\alpha\beta} &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}\, \frac{h^2}{12}\left\{\overset{1}{D}{}^{\alpha\beta} - \overset{0}{D}{}^{\alpha\gamma}\left(\delta^\beta_\gamma\, b^\delta_\delta + b^\beta_\gamma\right)\right. \\
&\quad \left. + \nu\left[2\, b^{\alpha\beta}\, \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma + \varepsilon^\alpha_{\cdot\sigma}\, \varepsilon^\beta_{\cdot\tau}\left(\delta^\beta_\gamma\, \overset{1}{D}{}^{\sigma\tau} - \overset{0}{D}{}^{\sigma\tau}\left(\delta^\beta_\gamma\, b^\delta_\delta + b^\beta_\gamma\right)\right)\right]\right\} \\
&\quad + \frac{h\,\nu}{1-\nu}\, \frac{h^2}{12}\left[\left(2\, b^{\alpha\beta} - b^\gamma_\gamma\, a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}\right)\overset{0}{\sigma}{}^3_3 + a^{\alpha\beta}\, \overset{1}{\sigma}{}^3_3\right],
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$Q^1 = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\, \frac{1-\nu}{2}\, \frac{1 + \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}}{\overset{1}{\varkappa}}\, (W|^1 - \vartheta^1), \qquad Q^2 = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\, \frac{1-\nu}{2}\, \frac{1 + \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}}{\overset{2}{\varkappa}}\, (W|^2 - \vartheta^2). \tag{29}$$

In den Gleichungen für die Querkräfte (29) wurden die beiden im allgemeinen Falle von den Krümmungsverhältnissen der Schalenmittelfläche abhängenden Faktoren $\overset{1}{\varkappa} = \overset{1}{\varkappa}(x^1, x^2)$, $\overset{2}{\varkappa} = \overset{2}{\varkappa}(x^1, x^2)$ eingeführt, die der Veränderlichkeit der Schubspannungen über die Schalendicke Rechnung tragen. Den Verlauf der Schubspannungen kann man wie beim Stab mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eines Schalenelementes $dx^1\, dx^2\left(\frac{h}{2} - z\right)$ aus den bekannten Längsspannungen (27) ermitteln, doch ist diese Berechnung außerordentlich mühsam. Die Ermittlung der Faktoren $\overset{1}{\varkappa}$ und $\overset{2}{\varkappa}$ erfolgt dann mit der üblichen Mittelwertsaussage über die Formänderungsarbeit. Da, wie gezeigt wird, der Einfluß der Querkraftverformungen in der Schalentheorie vernachlässigbar klein ist, genügt es, $\overset{1}{\varkappa}$ und $\overset{2}{\varkappa}$ durch

$$\overset{1}{\varkappa} = \frac{6}{5}\left(1 + \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}\right)\overset{1}{\varkappa}, \qquad \overset{2}{\varkappa} = \frac{6}{5}\left(1 + \frac{b}{a}\frac{h^2}{12}\right)\overset{2}{\varkappa}$$

zu ersetzen, wobei $\overset{1}{\varkappa} = \overset{1}{\varkappa}(x^1, x^2)$ und $\overset{2}{\varkappa} = \overset{2}{\varkappa}(x^1, x^2)$ von der Einheit nicht wesentlich abweichen. Die Gleichungen (29) können daher durch

$$Q^\alpha = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\, \frac{5\,(1-\nu)}{12}\, (W|^\alpha - \vartheta^\alpha) \tag{30}$$

[1] *A. E. Green* a. *W. Zerna*, Theoretical Elasticity Oxford (1954) S. 379, 380.

ersetzt werden. Mit den fünf unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen[1]

$$N^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha Q^\alpha + p^\beta = 0\,, \qquad Q^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p^3 = 0\,, \qquad M^{\alpha\beta}|_\alpha - Q^\beta + m = 0 \tag{31}$$

die sechste Gleichgewichtsbedingung

$$\varepsilon_{\beta\gamma}\left(N^{\beta\gamma} - b^\beta_\alpha M^{\alpha\gamma}\right) = 0 \tag{32}$$

ist wegen $\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} = 0$ eine Identität — stehen fünfzehn Gleichungen, (28), (30) und (31) zur Verfügung, aus denen die fünfzehn unbekannten $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, Q^α, $\overset{0}{V}{}^\alpha$, W, ϑ^α berechnet werden können. Zu diesem Zwecke setzt man die Gleichungen (28) und (30) in die Gleichgewichtsaussagen (31) ein. Nach Ausführung der kovarianten Ableitungen erhält man fünf simultane partielle Differentialgleichungen für die fünf unbekannten Funktionen des Verformungszustandes $\overset{0}{V}{}^\alpha$, W, ϑ^α der Schalenmittelfläche. Die Ordnung des Differentialgleichungssystems entspricht den jedem Schalenrand zugeordneten fünf Randbedingungen für die fünf Verformungsgrößen (1. Randwertaufgabe), für die fünf Schnittgrößen (2. Randwertaufgabe) oder für fünf gemischte Bedingungen (3. Randwertaufgabe).

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, die Verdrehung ϑ^α aus den Gleichungen (28) und (29) mit Hilfe der Gleichungen (30) zu eliminieren. Der Längskraft- und Momententensor erscheint unter Beachtung der Gleichungen (25) in der Form

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\Big\{ & \overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\gamma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\delta}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma\delta} \\
& + \frac{h^2}{12}\Big[-\frac{3}{2} b^\alpha_\gamma W|^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} b^\beta_\gamma W|^{\alpha\gamma} - b^\gamma_\gamma W|^{\alpha\beta} + 3\, b^\gamma_\gamma c^{\alpha\beta} W - 3\, b^{\alpha\gamma} c^\beta_\gamma W \\
& \quad + \frac{3}{2} c^\alpha_\gamma \overset{0}{V}{}^\beta|^\gamma + \frac{1}{2} c^\beta_\gamma \overset{0}{V}{}^\alpha|^\gamma - \frac{1}{2} b^\alpha_\gamma|_\delta\, b^{\beta\gamma} \overset{0}{V}{}^\delta - \frac{3}{2} b^{\alpha\gamma} b^\beta_\gamma|_\delta \overset{0}{V}{}^\delta \\
& \quad - b^\delta_\delta \left(b^\alpha_\gamma \overset{0}{V}{}^\beta|^\gamma + b^\beta_\gamma \overset{0}{V}{}^\alpha|^\gamma\right) - b^\alpha_\gamma b^\beta_\delta \overset{0}{V}{}^\delta|^\gamma + b^\delta_\delta b^{\alpha\beta}|_\gamma \overset{0}{V}{}^\gamma + \overset{0}{D}{}^{\alpha\gamma}\left(\delta^\beta_\gamma \frac{b}{a} + b^\beta_\gamma b^\delta_\delta\right)\Big] \\
& + \nu\frac{h^2}{12}\Big[-2\, b^{\alpha\beta}\left(W|^\gamma_\gamma + c^\gamma_\gamma W + b^\gamma_\gamma|_\delta \overset{0}{V}{}^\delta\right) + \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\left(c^{\alpha\beta} - 2\, b^\delta_\delta b^{\alpha\beta}\right) \\
& \quad + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\Big(-\frac{3}{2}\left(b^\sigma_\gamma W|^{\tau\gamma} + b^\tau_\gamma W|^{\sigma\gamma}\right) + b^\gamma_\gamma W|^{\sigma\tau} + 3\, b^\delta_\delta c^{\sigma\tau} W \\
& \quad + \frac{3}{2}\left(c^\sigma_\gamma \overset{0}{V}{}^\tau|^\gamma + c^\tau_\gamma \overset{0}{V}{}^\sigma|^\gamma\right) - b^\delta_\delta\left(b^\sigma_\gamma \overset{0}{V}{}^\tau|^\gamma + b^\tau_\gamma \overset{0}{V}{}^\sigma|^\gamma\right) \\
& \quad - \frac{3}{2}\left(b^{\sigma\gamma} b^\tau_\gamma|_\delta + b^{\tau\gamma} b^\sigma_\gamma|_\delta\right)\overset{0}{V}{}^\delta + b^\delta_\delta b^{\sigma\tau}|_\gamma \overset{0}{V}{}^\gamma + \frac{b}{a}\overset{0}{D}{}^{\sigma\tau}\Big) \\
& \quad + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\Big(b^\beta_\gamma W|^{\sigma\tau} + 3\, b^\beta_\gamma c^{\sigma\tau} W - b^\beta_\gamma\left(b^\sigma_\delta \overset{0}{V}{}^\tau|^\delta + b^\tau_\delta \overset{0}{V}{}^\sigma|^\delta\right) + b^\beta_\gamma b^{\sigma\tau}|_\delta \overset{0}{V}{}^\delta + b^\delta_\delta b^\beta_\gamma \overset{0}{D}{}^{\sigma\tau}\Big) \\
& \quad + \frac{1}{1-\nu}\Big(-\frac{1}{2} b^{\alpha\beta}\left(W|^\gamma_\gamma + c^\gamma_\gamma W\right) - \frac{1}{2} b^{\alpha\beta} b^\gamma_\gamma|_\delta \overset{0}{V}{}^\delta + \frac{1}{2}\overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma|^{\alpha\beta} + \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\left(2\, c^{\alpha\beta} - b^\delta_\delta b^{\alpha\beta}\right)\Big) \\
& \quad + \frac{\nu}{1-\nu}\Big(2\, b^\delta_\delta b^{\alpha\beta}\overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma - \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\gamma}_{\cdot\tau} b^\beta_\gamma b^{\sigma\tau}\overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma \\
& \quad + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\left[-\frac{1}{2}\left(W|^\gamma_\gamma + c^\gamma_\gamma W\right) b^{\sigma\tau} - \frac{1}{2} b^\gamma_\gamma|_\delta\, b^{\sigma\tau}\overset{0}{V}{}^\delta + \frac{1}{2}\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}|^{\sigma\tau} + \overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\left(3\, c^{\sigma\tau} - b^\delta_\delta b^{\sigma\tau}\right)\right] \\
& \quad + \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{1}{2} b^\delta_\delta b^{\alpha\beta}\overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma + \frac{\nu}{2}\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau} b^\delta_\delta b^{\sigma\tau}\overset{0}{D}{}^\gamma_\gamma\right]\Big)\Big\} \\
& + \frac{h^2}{5(1-\nu)}\Big\{ b^\alpha_\gamma Q^\beta|^\gamma + \frac{1}{2} b^\beta_\gamma Q^\alpha|^\gamma - b^{\alpha\beta}|_\gamma Q^\gamma - \frac{1}{2} b^\delta_\delta\left(Q^\alpha|^\beta + Q^\beta|^\alpha\right) - \frac{1}{2} b^\beta_\gamma Q^\gamma|^\alpha \\
& \quad + \nu\Big\{\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\Big(b^\sigma_\gamma Q^\tau|^\gamma + b^\tau_\gamma Q^\sigma|^\gamma - \frac{1}{2} b^\delta_\delta\left(Q^\sigma|^\tau + Q^\tau|^\sigma\right) - b^{\sigma\tau}|_\gamma Q^\gamma\Big) \\
& \quad - \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\gamma}_{\cdot\tau}\frac{1}{2} b^\beta_\gamma\left(Q^\sigma|^\tau + Q^\tau|^\sigma\right) + 2\, b^{\alpha\beta} Q^\gamma|_\gamma + \frac{1}{1-\nu}\frac{1}{2}\left(b^{\alpha\beta} Q^\gamma|_\gamma + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau} b^{\sigma\tau} Q^\gamma|_\gamma\right)\Big\}\Big\} \\
& + \frac{h\,\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3 + \frac{(1-2\,\nu)\,h}{(1-\nu)^2}\frac{h^2}{12}\Big\{ -\frac{1}{2}\overset{0}{\sigma}{}^3_3|^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\overset{1}{\sigma}{}^3_3 b^{\alpha\beta} - \overset{0}{\sigma}{}^3_3\left(2\, c^{\alpha\beta} - b^\delta_\delta b^{\alpha\beta}\right) \\
& \quad + \nu\Big[\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\Big(-\frac{1}{2}\overset{0}{\sigma}{}^3_3|^{\sigma\tau} - \frac{1}{2}\overset{1}{\sigma}{}^3_3 b^{\sigma\tau} - \overset{0}{\sigma}{}^3_3\left(3\, c^{\sigma\tau} - b^\delta_\delta b^{\sigma\tau}\right)\Big) \\
& \quad + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\gamma}_{\cdot\tau} b^\beta_\gamma b^{\sigma\tau}\overset{0}{\sigma}{}^3_3 - 2\,\overset{0}{\sigma}{}^3_3 b^\gamma_\gamma b^{\alpha\beta} + \frac{1}{1-\nu}\Big(-\frac{1}{2}\overset{0}{\sigma}{}^3_3 b^{\alpha\beta} - \nu\frac{1}{2}\overset{0}{\sigma}{}^3_3\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau} b^{\sigma\tau}\Big) b^\gamma_\gamma\Big]\Big\} \\
& + \frac{h\,\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}\left[\left(c^{\alpha\beta} - b^\gamma_\gamma b^{\alpha\beta} + \frac{b}{a} a^{\alpha\beta}\right)\overset{0}{\sigma}{}^3_3 + \left(b^{\alpha\beta} - b^\gamma_\gamma a^{\alpha\beta}\right)\overset{1}{\sigma}{}^3_3 + a^{\alpha\beta}\overset{2}{\sigma}{}^3_3\right],
\end{aligned} \tag{33}$$

[1] Siehe die Fußnote 1 auf Seite 285 Gl. (10.4.6—10.4.11) S. 383.

$$
\begin{aligned}
M^{\alpha\beta} = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\Big\{ & -W|^{\alpha\beta} - 3\,c^{\alpha\beta}\,W + b^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\beta}|^{\gamma} + b^{\beta}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\alpha}|^{\gamma} - b^{\alpha\beta}|_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\gamma} - \overset{0}{D}{}^{\alpha\gamma}\,(\delta^{\beta}_{\gamma}\,b^{\delta}_{\delta} + b^{\beta}_{\gamma}) \\
& + \nu\Big[2\,b^{\alpha\beta}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma} - \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\gamma}_{\cdot\tau}\,b^{\beta}_{\gamma}\,\overset{0}{D}{}^{\sigma\tau} \\
& + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,(-W|^{\sigma\tau} - 3\,c^{\sigma\tau}\,W + b^{\sigma}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\tau}|^{\gamma} + b^{\tau}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\sigma}|^{\gamma} - b^{\sigma\tau}|_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\gamma} - \overset{0}{D}{}^{\sigma\tau}\,b^{\delta}_{\delta}) \\
& + \frac{1}{1-\nu}\,(b^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,b^{\sigma\tau})\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}\Big]\Big\} \\
& + \frac{h^2}{10\,(1-\nu)}\,[Q^{\alpha}|^{\beta} + Q^{\beta}|^{\alpha} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,(Q^{\sigma}|^{\tau} + Q^{\tau}|^{\sigma})] \\
& + \frac{h^2}{12}\Big[-\frac{(1-2\nu)\,h}{(1-\nu)^2}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}\,(b^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,b^{\sigma\tau} + \frac{h\,\nu}{1-\nu}\,\Big((b^{\alpha\beta} - b^{\gamma}_{\gamma}\,a^{\alpha\beta})\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3} + a^{\alpha\beta}\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3}\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Man erkennt aus dem Vergleich der Ausdrücke für die kontravarianten Koordinaten des Längskrafttensors (33) mit denen des Momententensors (34), daß in (33) die mit $h^2/12$ und $h^2/5\,(1-\nu)$ behafteten Zusatzglieder von der Größenordnung der mit Krümmungsgliedern der Schalenmittelfläche multiplizierten Momente $(b^{\tau}_{\tau}\,M^{\alpha\beta},\ b^{\alpha}_{\gamma}\,M^{\beta\gamma})$ sind. Um die Größenordnung der von den Querkraftverformungen herrührenden Zusatzglieder abschätzen zu können, wird $N^{\alpha\beta}$ in die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in Normalenrichtung (31_2) eingesetzt. Damit die Übersicht erleichtert wird, werden nur die zum Vergleich notwendigen Terme ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
& Q^{\alpha}|_{\alpha} + \frac{E\,h}{1-\nu^2}\Big\{b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{0}{D}{}^{\beta}_{\beta} + \nu\,\varepsilon_{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,b^{\alpha}_{\beta}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma}_{\delta} + \frac{h^2}{12}\,b_{\alpha\beta}\,[\ldots] + \nu\,\frac{h^2}{12}\,b_{\alpha\beta}\,[\ldots]\Big\} \\
& \quad + \frac{h^2}{5\,(1-\nu)}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\,c^{\alpha}_{\beta} - b^{\delta}_{\delta}\,b^{\alpha}_{\beta}\Big)\,Q^{\beta}|_{\alpha} - b^{\alpha}_{\beta}\,b^{\beta}_{\alpha}|_{\gamma}\,Q^{\gamma} + \nu\Big[\frac{1}{1-\nu}\,\Big(\frac{1}{2}\,c^{\alpha}_{\alpha} + \nu\,\frac{b}{a}\Big)\,Q^{\beta}|_{\beta} \\
& \quad + \varepsilon_{\alpha\sigma}\,\varepsilon^{\beta\tau}\,\Big(2\,b^{\alpha}_{\beta}\,b^{\gamma}_{\tau}\,Q^{\sigma}|_{\gamma} - b^{\alpha}_{\beta}\,b^{\gamma}_{\gamma}\,Q^{\sigma}|_{\tau} - c^{\alpha}_{\beta}\,Q^{\sigma}|_{\tau} - b^{\sigma}_{\tau}|_{\gamma}\,Q^{\gamma}\Big) + 2\,c^{\alpha}_{\alpha}\,Q^{\beta}|_{\beta}\Big]\Big\} \\
& = -p^3 - \frac{h}{1-\nu}\Big\{\nu\Big[b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3} + \frac{h^2}{12}\Big(b^{\alpha}_{\alpha}\,\frac{b}{a}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3} + (c^{\alpha}_{\alpha} - b^{\alpha}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\beta})\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3} + b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{2}{\sigma}{}^{3}_{3}\Big)\Big] \\
& \quad + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\frac{h^2}{12}\Big[\frac{1}{2}\,b^{\alpha}_{\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}|^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{2}\,c^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3} + (2\,b^{\alpha}_{\beta}\,c^{\beta}_{\alpha} - b^{\alpha}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\beta})\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3} \\
& \quad + \nu\Big(\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\sigma}\,\varepsilon^{\beta\tau}\,b^{\alpha}_{\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}|^{\sigma}_{\tau} + \frac{b}{a}\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3} + 2\,b^{\alpha}_{\alpha}\,c^{\beta}_{\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3} + \frac{1}{1-\nu}\,\Big(\frac{1}{2}\,c^{\alpha}_{\alpha} + \nu\,\frac{b}{a}\Big)\,b^{\beta}_{\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}\Big)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Aus (35) entnimmt man, daß sich die Zusatzglieder infolge der Querkraftverformungen zur Divergenz des Querkraftvektors $Q^{\alpha}|_{\alpha}$ wie

$$\frac{h^2}{5\,(1-\nu)}\,\frac{b}{a} : 1$$

verhalten. Da die Spannungen $\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}$, $\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3}$ und $\overset{2}{\sigma}{}^{3}_{3}$ mit p^3 in Beziehung stehen, kann die Größenordnung der von den Querspannungen herrührenden Terme durch den Vergleich mit der Belastungskomponente p^3 bis auf die beiden von der Verteilung der Unter- bzw. Oberflächenbelastung abhängigen Glieder leicht abgeschätzt werden. Die Zusatzglieder sind im Vergleich zu p^3 bis — möglicherweise — auf

$$
\begin{aligned}
& -\frac{h}{1-\nu}\Big\{\nu\Big[b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3} + \frac{h^2}{12}\,\Big((c^{\alpha}_{\alpha} - b^{\alpha}_{\alpha}\,b^{\beta}_{\beta})\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3} + b^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{2}{\sigma}{}^{3}_{3}\Big)\Big] \\
& \quad + \frac{h^2}{24}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\Big[b^{\alpha}_{\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}|^{\beta}_{\alpha} + c^{\alpha}_{\alpha}\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3} + \nu\,\Big(\varepsilon_{\alpha\sigma}\,\varepsilon^{\beta\tau}\,b^{\alpha}_{\beta}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}|^{\sigma}_{\tau} + 2\,\frac{b}{a}\,\overset{1}{\sigma}{}^{3}_{3}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

von höherer Ordnung als die Querkraftverformungen im Vergleich zur Divergenz $Q^{\alpha}|_{\alpha}$. Für nicht allzu extreme veränderliche Oberflächenbelastung ist in (36) nur der erste Summand beizubehalten.

In den Gleichungen (33) und (34) treten Terme auf, die sich zu ebenfalls vorkommenden Termen wie

$$\frac{h^2}{12\,(1-\nu^2)}\,\frac{b}{a} : 1$$

verhalten. In den Gleichungen für den Längskrafttensor ist es das Verhältnis von

$$\frac{h^2}{12}\Big[3\,b^{\gamma}_{\gamma}\,c^{\alpha\beta}\,W - 3\,b^{\alpha\gamma}\,c^{\beta}_{\gamma}\,W + \frac{3}{2}\,c^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\beta}|^{\gamma} \ldots + \overset{0}{D}{}^{\alpha\gamma}\,\Big(\delta^{\beta}_{\gamma}\,\frac{b}{a} + b^{\beta}_{\gamma}\,b^{\delta}_{\delta}\Big)\Big] + \nu\,\frac{h^2}{12}\,[\cdots]$$

zu $\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\gamma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\delta}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma\delta}$. In den Gleichungen für den Momententensor sind es die Glieder

$$\frac{h^2}{12}\left[-3\,c^{\alpha\beta}W + b^{\alpha}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\beta}|^{\gamma} + b^{\beta}_{\gamma}\,\overset{0}{V}{}^{\alpha}|^{\gamma}\ldots\right]$$

wie der Vergleich mit $-\frac{h^2}{12}\,W|^{\alpha\beta}$ zeigt.

Aus den Betrachtungen über die Größenordnung folgt die von *E. Reissner* für die Drehschalen festgestellte Tatsache, daß bei Benutzung der *Bernoulli*schen Hypothese Glieder von der Größenordnung der Querkraftverformungen auftreten. Hält man also an den kleinen Gliedern fest, dann sind folgerichtig auch die Querkraftverformungen und Glieder infolge der Normalspannung σ_3^3 quer zur Schale zu berücksichtigen, denn sonst ist die Theorie inkonsequent.

Vernachlässigt man in (33) und (34) die Querkraftverformungen, so wird man auf folgende Gleichungen geführt:

$$\left.\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}\Big\{\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\gamma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\delta}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma\delta} - \frac{h^2}{24}\left[3\,b^{\alpha}_{\gamma}\,W|^{\beta\gamma} + b^{\beta}_{\gamma}\,W|^{\alpha\gamma} + 2\,b^{\gamma}_{\gamma}\,W|^{\alpha\beta}\right]\\
&\quad + \nu\,\frac{h^2}{12}\Big[-2\,b^{\alpha\beta}\,W|^{\gamma}_{\gamma} + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\Big(-\frac{3}{2}\left(b^{\sigma}_{\gamma}W|^{\tau\gamma} + b^{\tau}_{\gamma}W|^{\sigma\gamma}\right) + b^{\gamma}_{\gamma}\,W|^{\sigma\tau}\Big)\\
&\quad + \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\gamma}_{\cdot\tau}\,b^{\beta}_{\gamma}\,W|^{\sigma\tau} - \frac{1}{2\,(1-\nu)}\left(b^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,b^{\sigma\tau}\right)W|^{\gamma}_{\gamma}\\
&\quad + \frac{1}{2\,(1-\nu)}\left(\overset{\circ}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}|^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,\overset{\circ}{D}{}^{\gamma}_{\gamma}|^{\sigma\tau}\right)\Big] + \frac{h\,\nu}{1-\nu}\,\overset{0}{\sigma}{}^{3}_{3}\,a^{\alpha\beta}\,,\\
M^{\alpha\beta} &= -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\left(W|^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\sigma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\tau}\,W|^{\sigma\tau}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Gleichungen (37) sind zusammen mit den fünf unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen (31) die Grundgleichungen der Schalentheorie.

Die Gleichgewichtsbedingung (32) ist, wie man durch Eintragen von (37) leicht bestätigt, identisch erfüllt. Das gesamte Formelwerk ist in sich geschlossen, der Momententensor mit $\varepsilon_{\alpha\beta}\,M^{\alpha\beta} = 0$ symmetrisch und der Längskrafttensor mit Zusatzgliedern der Größenordnung $b^{\gamma}_{\gamma}\,M^{\alpha\beta}$, $b^{\alpha}_{\gamma}\,M^{\beta\gamma}$ behaftet, die bewirken, daß die mit den Schubkräften in Beziehung stehenden kontravarianten Koordinaten $N^{12} \neq N^{21}$ voneinander verschieden sind. Diese Zusatzglieder verhalten sich zu $\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta}$ wie $z\,b^{\alpha}_{\alpha} : 1$, da diese nach (26) ihren Ursprung in dem Faktor $\sqrt{g/a} = 1 - z\,b^{\alpha}_{\alpha} + z^2\frac{b}{a}$ und dem Schalentensor $F^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - z\,b^{\alpha}_{\beta}$ haben.

Die Schalengrundgleichungen können für schwach gekrümmte Schalen $-\,h\,b^{\alpha}_{\beta} \ll 1$ — durch Vernachlässigung sämtlicher Summanden der Größenordnung $z\,b^{\alpha}_{\beta}$ vereinfacht werden. In diesem Sinne ergeben sich aus den Gleichungen (31) und (37) die bekannten Grundgleichungen der technischen Schalentheorie:[1]

$$\left.\begin{aligned}
&N^{\alpha\beta}|_{\alpha} + p^{\beta} = 0\,, \qquad Q^{\alpha}|_{\alpha} + b_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta} + p^{3} = 0\,, \qquad M^{\alpha\beta}|_{\alpha} - Q^{\beta} + m^{\beta} = 0\,,\\
&N^{\alpha\beta} = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left(\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\gamma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\delta}\,\overset{0}{D}{}^{\gamma\delta}\right), \qquad M^{\alpha\beta} = -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\left(W|^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\gamma}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\delta}\,W|^{\gamma\delta}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

5. Zusammenfassung. Es wird in allgemeinen Koordinaten gezeigt, daß die elastischen Grundgleichungen gekrümmter, annähernd zweidimensionaler Gebilde nicht mit Hilfe der *Bernoulli*schen Hypothese aufgestellt werden dürfen, da sowohl die nicht beachteten Querkraftverformungen als auch die Spannungen in Normalenrichtung denselben Einfluß auf die Endergebnisse haben, wie eine Anzahl Glieder, die bei Benutzung der *Bernoulli*schen Hypothese in den Endgleichungen auftreten.

Die Berechnung der Tragwerke, für die die Querkraftverformungen von Bedeutung sind, verlangt die Berücksichtigung der Querspannungen, also eine dreidimensionale Theorie. Für Schalen ist der Einfluß der Querkraftverformungen vernachlässigbar klein. Auf Grund dieser Tatsache werden die in sich widerspruchsfreien Schalengrundgleichungen (31), (37) abgeleitet.

(Eingegangen am 18. März 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Freiberg Sa. Straße d. E. 12.

[1] *L. H. Donnell*, National Advisory Committee for Aeronautics. Rep. No. 479 (1933); *B. B. Новожилов*, ДАН СССР, 38 (1943) No. 5—6; *A. E. Green* a. *W. Zerna*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 3 (1950) S. 9.

Überschallströmungen um Kreisschnittkörper mit gekrümmter Achse

Von **Robert Sauer**

Eines der ersten Probleme, die in der theoretischen Gasdynamik gelöst wurden, betraf die linearisierte Überschallströmung um einen hinreichend spitzen und schlanken Drehkörper mit verschwindendem oder kleinem Anstellwinkel (*Th. v. Karmán* und *N. B. Moore*[1], *C. Ferrari*[2], *Shue-Shen Tsien*[3]). Dabei wird die Körperachse mit geeigneten Singularitäten belegt und die Intensitäten der Singularitäten werden so bemessen, daß die Randbedingungen an der Körperoberfläche (verschwindende Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit) erfüllt wird. Als Singularitäten werden Quellen und Senken verwendet, bei schiefer Anströmung außerdem noch Dipole.

Neuerdings wurde diese Methode durch Hinzunahme höherer Singularitäten ($2m$-Pole) verallgemeinert, wodurch dann auch „verbeulte" Drehkörper, deren Querschnitte nicht mehr kreisförmig sind, der Behandlung zugänglich wurden (vgl. z. B. [4, 5]). Man scheint aber bisher noch nicht darauf hingewiesen zu haben, daß man schon mit den Quellen, Senken und Dipolen allein nicht-drehsymmetrische Körper erfassen kann, nämlich Kreisschnittkörper mit gekrümmter Achse.

1. Geometrische Voraussetzungen. Ein Kreisschnittkörper entsteht aus einem Drehkörper dadurch, daß die Kreisschnitte des Drehkörpers in ihren Ebenen verschoben werden. Die Kreisschnitte liegen dann nach wie vor in parallelen Ebenen, der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte ist aber nicht mehr die Drehkörperachse sondern eine i. a. gekrümmte ebene oder nichtebene Kurve (Abb. 1). Da wir uns auf die linearisierte Theorie der Überschallströmungen beschränken wollen, treffen wir folgende Voraussetzungen:

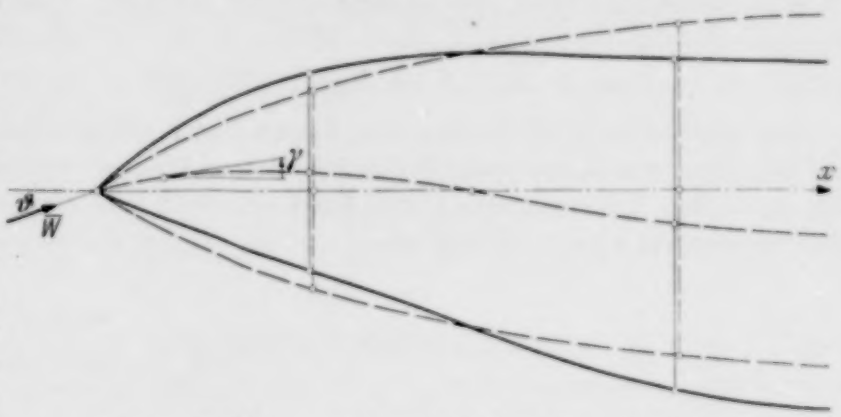


Abb. 1. Drehkörper und davon abgeleiteter Kreisschnittkörper.

a) Der Drehkörper, aus dem der Kreisschnittkörper abgeleitet wird, soll hinreichend spitz und schlank und der Anstellwinkel hinreichend klein sein, so daß der Winkel der Strömungsrichtung gegen die Drehkörperachse im ganzen Strömungsfeld klein ist im Verhältnis zum *Mach*-Winkel.

b) Die Verschiebungen der Kreisschnitte sollen ebenfalls hinreichend klein sein, so daß auch die Neigungswinkel der Tangenten der Kreismittelpunktskurve des Kreisschnittkörpers gegen die Drehkörperachse klein bleiben im Verhältnis zum *Mach*-Winkel.

2. Aufbau des Strömungsfeldes aus Quellen, Senken und Dipolen. Die Drehkörperachse sei die x-Achse eines x, r, ω-Zylinderkoordinatensystems. Die Anströmung erfolge parallel zur vertikalen Symmetrieebene $\omega = 0$ unter dem kleinen Anstellwinkel $\bar{\vartheta}$ gegen die x-Achse.

Wir beschränken uns zunächst auf die Fälle, in denen die Ebene $\omega = 0$ auch Symmetrieebene für den Kreisschnittkörper bleibt. Die Kreismittelpunktskurve ist dann eine ebene Kurve. Sie liegt in der Ebene $\omega = 0$ und ihre Tangenten bilden mit der x-Achse die Winkel $\gamma = \gamma(x)$.

Das Geschwindigkeitspotential der ungestörten Grundströmung ($\bar{w}$ = Anströmgeschwindigkeit, $\bar{\alpha}$ = *Mach*-Winkel, $\bar{\beta} = \operatorname{ctg} \bar{\alpha}$) ist

$$\varphi_0(x, r, \omega) = \bar{w}\,(x + \bar{\vartheta}\, r \cos \bar{\alpha})\,.$$

[1] *Th. v. Kármán* und *N. B. Moore*, Trans. Amer. Soc. mech. Engr. (Juni 1932).
[2] *C. Ferrari*, Aerotecnica 17 (1937) S. 507—518.
[3] *Shue-Shen Tsien*, J. Aeron. Sci. 5 (1938) S. 480—483.
[4] *G. N. Ward*, Linearized theory of steady high-speed flow. Cambridge, Univ. Press (1955) S. 187—221.
[5] *R Sauer*, ZAMP IXb (1958) S. 601—605.

Die vom Körper hervorgerufene Störung der Grundströmung wird durch die zusätzlichen Potentiale $\varphi_1(x, r)$ und $\varphi_2(x, r, \omega) = \chi(x, r) \cdot \cos\omega$ dargestellt. Dabei ist

$$\varphi_1(x, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x-\bar{\beta}r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \bar{\beta}^2 r^2}},$$

$$\chi(x, r) = \frac{1}{4\pi r \bar{\beta}} \cdot \int_0^{x-\bar{\beta}r} \frac{m(\xi)\,(x-\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \bar{\beta}^2 r^2}}.$$

Das Zusatzpotential $\varphi_1(x, r)$ wird von einer Quell-Senken-Verteilung, das Zusatzpotential $\varphi_2(x, r, \omega)$ von einer Dipolverteilung erzeugt. Beide Verteilungen liegen auf der Drehkörperachse, die Dipolachsen stehen senkrecht zur Drehkörperachse und liegen in der Symmetrieebene $\omega = 0$.

Bisher wurde, wie gesagt, dieser Ansatz lediglich für Drehkörper benützt. Die Quellstärken $f(\xi)$ sind dann durch das Profil des Drehkörpers, die Dipolstärken $m(\xi)$ durch den vorgegebenen Anstellwinkel $\bar{\vartheta}$ bestimmt. Der Ansatz läßt sich aber ebenso für unseren Kreisschnittkörper in folgender Weise verwenden:

Die Quellstärken $f(\xi)$ werden wie vorher, d. h. aus dem Profil des Drehkörpers, aus dem der Kreisschnittkörper hergeleitet ist, ermittelt. Die Dipolstärken $m(\xi)$ werden dagegen aus dem durch die Verschiebung der Kreisschnitte modifizierten, von Kreisschnitt zu Kreisschnitt variablen Anstellwinkel $\bar{\vartheta} - \gamma(x)$ berechnet. Die Durchführung der Rechnung erfolgt demnach bezüglich $f(\xi)$ genau so wie beim Drehkörper, bezüglich $m(x)$ ist sie nur dadurch abzuändern, daß in den Berechnungsformeln $\bar{\vartheta}$ durch $\bar{\vartheta} - \gamma(x)$ zu ersetzen ist.

Man vergleiche etwa die Gleichungssysteme (107) und (108) in meiner „Einführung in die theoretische Gasdynamik", 2. Aufl. (1951), S. 57. An den Gleichungen (107) braucht nichts geändert zu werden, in den Gleichungen (108) muß $\bar{\vartheta} - \gamma(x)$ an die Stelle von $\bar{\vartheta}$ treten.

Der allgemeine Fall, in dem die Kurve der Kreismittelpunkte nicht eben ist, läßt sich leicht auf den eben erörterten spezielleren Fall zurückführen: Man zerlegt die Verschiebungen der Kreisschnitte in ihre Komponenten in den Ebenen $\omega = 0$ und $\omega = \pi/2$ und spaltet dem entsprechend das Zusatzpotential $\varphi_2(x, r, \omega)$ auf in $\varphi_2(x, r, \omega) = \chi_1(x, r) \cos\omega + \chi_2(x, r) \sin\omega$ mit

$$\chi_k(x, r) = \frac{1}{4\pi r \bar{\beta}} \int_0^{x-\bar{\beta}r} \frac{m_k(\xi)\,(x-\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \bar{\beta}^2 r^2}} \qquad (k = 1, 2).$$

3. Beispiele. Das einfachste Beispiel bieten die Kreisschnittkörper mit geradliniger Kreismittelpunktskurve. Dieses Beispiel ist trivial und bringt nichts Neues; denn im Gültigkeitsbereich der linearen Theorie ist ein Kreisschnittkörper mit geradliniger Achse nach entsprechender Verdrehung identisch mit dem Drehkörper, aus dem er hergeleitet wurde. Da $\gamma(x)$ konstant ist, ändert sich in den Gleichungen (108) der Anstellwinkel $\bar{\vartheta}$ nur um eine additive Konstante.

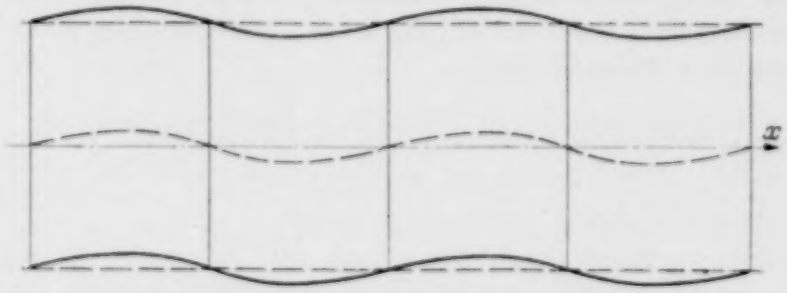


Abb. 2. Welliger oder verdrillter „Zylinder".

Ein nichttriviales Beispiel ist der wellige und der verdrillte „Zylinder" (Abb. 2). Alle Kreisschnitte sind kongruent, die Mittelpunkte liegen auf einer hinreichend flachen Sinuslinie (welliger Zylinder) oder einer hinreichend flachen Schraubenlinie (verdrillter Zylinder). Der Ausgangsdrehkörper ist ein Drehzylinder. Die Quellenverteilung $f(\xi)$ verschwindet und es bleiben lediglich $m(\xi)$ bzw. $m_1(\xi)$ und $m_2(\xi)$ zu bestimmen.

(Eingegangen am 28. September 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *R. Sauer*, München 23, Leopoldstr. 104/V r.

Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums; statische Deutung und Randwerte

Von H. Schaefer

1. Einleitung. Die Gleichgewichtsbedingungen eines dreidimensionalen Kontinuums, das nur an seiner Oberfläche belastet ist,

$$\partial_i \sigma_{ik} = 0\,; \qquad \sigma_{ik} = \sigma_{ki}\,; \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{1,1}$$

werden durch den Ansatz

$$\sigma_{ik} = -\,\varepsilon_{i\alpha\beta}\,\varepsilon_{k\lambda\mu}\,\partial_\alpha \partial_\lambda F_{\beta\mu}\,; \qquad F_{\beta\mu} = F_{\mu\beta} \tag{1,2}$$

identisch in den $F_{\beta\mu}$ befriedigt. Umgekehrt läßt sich jeder Spannungszustand, der den Gleichgewichtsbedingungen (1,1) genügt, durch geeignete Wahl der $F_{\beta\mu}$ in (1,2) erfassen. Diese 6 „Spannungsfunktionen" $F_{\beta\mu}$ sind die Komponenten eines symmetrischen Tensors.

Zu unseren Bezeichnungen: Wir benutzen kartesische (x_1, x_2, x_3)-Koordinaten. Es gilt die Summenkonvention. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ist in allen drei Indexpaaren alternierend und hat den Wert $+1$ bzw. -1, wenn $\alpha\beta\gamma$ eine gerade bzw. ungerade Permutation der Zahlen 1 2 3 ist. Zwischen ε und dem *Kroneckers*chen δ besteht der Entwicklungssatz $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$.

Δ ist der Operator $\partial_\alpha \partial_\alpha$.

(1,2) ist die funktionale Parameterdarstellung aller Gleichgewichtszustände des Kontinuums. Der zweite Schritt zur Lösung eines Gleichgewichtsproblems besteht nun darin, die Parameter — eben die Spannungsfunktionen — so zu bestimmen, daß sie Spannungszustände ergeben, die für den vorhandenen Werkstoff kompatibel sind. In einer früheren Arbeit[1] habe ich gezeigt, daß im isotropen elastischen Körper mit kleinen Deformationen alle kompatiblen Spannungszustände erfaßt werden durch

$$F_{ik} = \Theta_{ik} - \delta_{ik}\Theta_{\alpha\alpha} + \delta_{ik}\Omega \tag{1,3}$$

mit

$$\Delta\Theta_{ik} = 0 \tag{1,4}$$

und

$$\Delta\Omega = \frac{1}{1-\nu}\,\partial_\alpha \partial_\beta \Theta_{\alpha\beta} \tag{1,5}$$

(ν = *Poisson*sche Zahl).

Demnach sind die 3 Komponenten F_{12}, F_{13}, F_{23} harmonische Funktionen. F_{11}, F_{22}, F_{33} sind wegen $\Delta\Delta\Omega = 0$ zwar biharmonisch, unterscheiden sich jedoch nur durch harmonische Funktionen voneinander.

Obwohl uns in dieser Abhandlung Verschiebungen grundsätzlich nicht interessieren, sei doch noch der einfache Zusammenhang zwischen Spannungsfunktionen und den infinitesimalen Verschiebungen u_i vermerkt,

$$G\,u_i = \partial_k \Theta_{ik} - \frac{1}{2}\,\partial_i \Omega \tag{1,6}$$

(G = Schubmodul), für den Leser, der unsere späteren Rechnungen mit dem Schrifttum vergleichen möchte.

Unsere Darstellungen der Spannungsfunktionen der klassischen Elastizitätstheorie sind keineswegs die einzig möglichen. Denn der Tensor der Nullspannungsfunktionen

$$F_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2}\,(\partial_i v_k + \partial_k v_i)\,, \tag{1,7}$$

der symmetrische Gradiententensor eines Vektorfeldes v_i, führt nach (1,2) zu $\sigma_{ik} = 0$; er kann also jedem Tensor F_{ik} überlagert werden. So sind z. B. bei geeigneter Verfügung über v_1, v_2, v_3 mancherlei Varianten unserer obigen Darstellung denkbar.

E. Kröner[2] und *K. Marguerre*[3] haben eine Darstellung gegeben, in der die sechs F_{ik} als biharmonische Funktionen auftreten, verknüpft durch 3 Divergenz-Nebenbedingungen.

[1] *H. Schaefer*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953), S. 356—362.

[2] *E. Kröner*, Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Ergebnisse der angew. Math.; Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

[3] *K. Marguerre*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955), S. 242—263.

Wir haben nun den dritten und letzten Schritt zu tun, nämlich die Spannungsfunktionen den Randbedingungen anzupassen. Dabei setzen wir voraus, daß auf der ganzen Oberfläche des Körpers die Belastung vorgegeben ist. Beim ebenen zweidimensionalen Kontinuum gibt es 3 Spannungsfunktionen[1], die *Airy*sche der Scheibe und die beiden der Plattenbiegung. Sie sind die 3 Komponenten eines Vektors, der sich anschaulich als Momentenvektor der Randbelastung deuten läßt. Stellen wir uns die Randkurve mit ihrer Belastung als dünnen materiellen Draht vor, losgelöst vom Kontinuum! Dann entsteht in diesem geschlossenen Drahte ein Spannungszustand, der bis auf 6 Eigenspannungszustände bestimmbar ist. Machen wir die Spannungsermittlung statisch bestimmt dadurch, daß wir den Draht an einer beliebigen Stelle zerschneiden; dann setzen sich Torsions- und Biegemoment zum Vektor unserer 3 Spannungsfunktionen zusammen. Daß die 6-fache statische Unbestimmtheit erst bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen eine Rolle spielt, ist bekannt. Es bleibt noch die schwierige Frage, wieviele der Informationen, die uns unser Drahtmodell vermittelt, für die Randbedingungen der Kompatibilitätsgleichungen der 3 Spannungsfunktionen benötigt werden. Es muß die materielle Struktur des Kontinuums bekannt sein. Bei der dünnen elastischen Scheibe muß man Randwerte und Normalableitungen der *Airy*schen Spannungsfunktion kennen. In der klassischen Theorie dünner Platten können nicht mehr als die Randwerte beider Spannungsfunktionen verwendet werden.

W. Günther[2] hat gezeigt, daß auch beim gekrümmten zweidimensionalen Kontinuum, der Schale, die Spannungsfunktionen und ihre Randwerte ganz analog statisch anschaulich zu deuten sind.

Ein sehr bemerkenswerter Versuch von *Peretti*[3], eine statische Deutung der 6 Spannungsfunktionen F_{ik} des dreidimensionalen Kontinuums zu erhalten, führt zwar zu ähnlichen Formeln, wie sie bei der *Airy*schen Spannungsfunktion auftreten, liefert aber keinen anschaulichen Zusammenhang zwischen Randwerten und Randbelastung.

Im nächsten Abschnitt soll nun dargelegt werden, daß das obige Modell der materiellen Randkurve, der dünne Draht, dessen Schnittmomente die Randwerte der Spannungsfunktionen ergaben, verallgemeinerungsfähig ist. Dazu haben wir uns die belastete Oberfläche des Körpers als belastete dünne Schale vorzustellen.

Wir werden zeigen, daß der Tensor der Schnittmomente dieser „Krustenschale" identisch mit dem Tensor der Spannungsfunktionen ist. Dieser ist wiederum nur bis auf Nullspannungsfunktionen bestimmt, die mit den Eigenspannungszuständen der unbelasteten Krustenschale zusammenhängen.

2. Statische Deutung der Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums. (1,2) spalten wir auf mit Hilfe des unsymmetrischen Tensors S_{ik} in die beiden Gleichungen

$$S_{ik} = \varepsilon_{\alpha\beta k}\,\partial_\alpha F_{\beta i} - \partial_i \omega_k\,, \tag{2,1}$$

$$\sigma_{ik} = -\,\varepsilon_{\alpha\beta i}\,\partial_\alpha S_{\beta k}\,. \tag{2,2}$$

Der in (2,1) hinzugefügte Gradient verschwindet bei der Rotorbildung (2,2).

Unser Körper sei ein Quader, mit Kanten parallel den Koordinatenachsen. Die Krustenschale besteht somit aus 6 Flächen. Wir betrachten die obere der beiden Flächen $x_3 = \text{const}$.

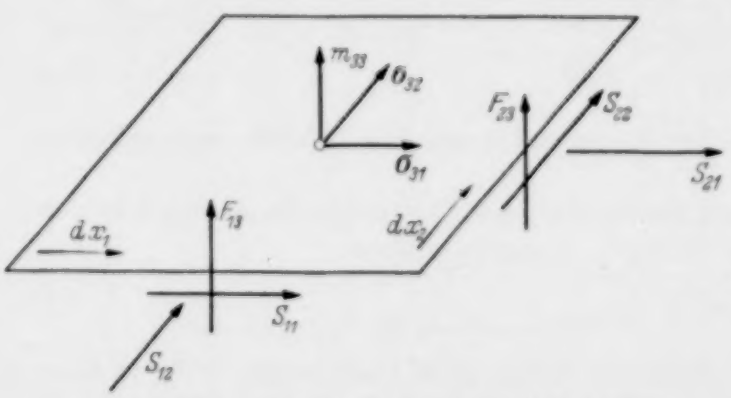


Abb. 1. Gleichgewicht der Scheibe mit Flächenbelastung.

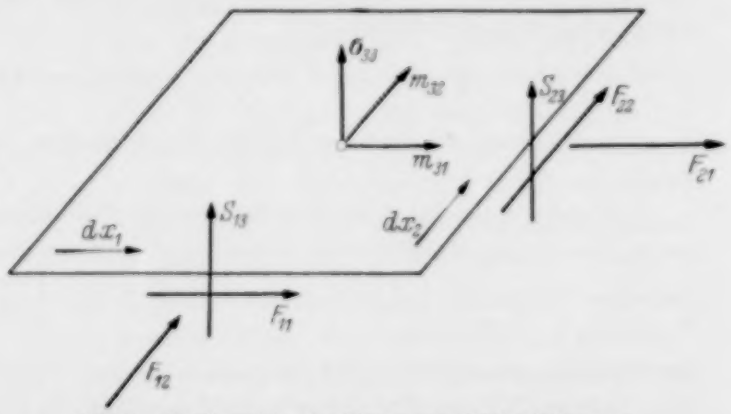


Abb. 2. Gleichgewicht der Platte mit Flächenbelastung.

In den Abb. 1 und 2 ist ein Element dx_1, dx_2 dieses ebenen Kontinuums mit seinen Flächenbelastungen und Schnittreaktionen gezeichnet. Dabei sind Scheiben- und Plattenbelastung getrennt.

[1] *H. Schaefer*, Österr. Ing.-Arch. 10 (1956), S. 267—277.
[2] *W. Günther*, Abh. Braunschwg. Wiss. Ges. 8 (1956), S. 111—120.
[3] *G. Peretti*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1949), S. 77—82.

Die F_{ik} sind Momente, die S_{ik} Kräfte, beide auf die Längeneinheit bezogen. In Abb. 1 mögen die Normalenmomente F_{13} und F_{23} verwundern, die in der Schalenstatik üblicherweise als nicht vorhanden angesehen werden. Solches bedeutet jedoch immer einen Vorgriff auf die Materialeigenschaften der Schale. Da aber bei unserer Krustenschale nur die Gleichgewichtsbedingungen interessieren, spricht nichts gegen die Berücksichtigung von Normalenmomenten.

Unser ebenes Kontinuum ist neben den Flächenkräften σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} noch mit Flächenmomenten m_{31}, m_{32}, m_{33} belastet. Dies, um zu übersichtlicheren Gleichungen zu kommen. Zu gegebener Zeit werden wir die Flächenmomente gleich Null setzen.

Und schließlich muß die Vorzeichenfestsetzung und Indizierung der Kräfte in Abb. 1 unkonventionell erscheinen. Statt der im Schrifttum beliebten Divergenz-Form der Gleichgewichtsbedingungen haben wir hier die Rotor-Form, wie sie durch (2,1) und (2,2) naheliegt, anzustreben.

Die 6 Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\partial_1 S_{21} - \partial_2 S_{11} + \sigma_{31} = 0\,, \tag{2,3}$$

$$\partial_1 S_{22} - \partial_2 S_{12} + \sigma_{32} = 0\,, \tag{2,4}$$

$$\partial_1 F_{23} - \partial_2 F_{13} + S_{11} + S_{22} + m_{33} = 0 \tag{2,5}$$

nach Abb. 1, und

$$\partial_1 F_{21} - \partial_2 F_{11} - S_{13} + m_{31} = 0\,, \tag{2,6}$$

$$\partial_1 F_{22} - \partial_2 F_{12} - S_{23} + m_{32} = 0\,, \tag{2,7}$$

$$\partial_1 S_{23} - \partial_2 S_{13} + \sigma_{33} = 0 \tag{2,8}$$

nach Abb. 2. Dies gilt für den Teil $x_3 = \text{const.}$ der Krustenschale. Wir brauchen aber nur die Indizes zyklisch zu vertauschen, um die Gleichgewichtsbedingungen für $x_1 = \text{const.}$ und $x_2 = \text{const.}$ zu erhalten. Gemeint ist immer diejenige der beiden parallelen Flächen, die zur größeren Konstanten gehört. So erhalten wir insgesamt 3×6 Gleichgewichtsbedingungen. Durch Tensorschreibweise zusammengefaßt:

$$\varepsilon_{\alpha\beta i}\,\partial_\alpha S_{\beta k} + \sigma_{ik} = 0\,, \tag{2,9}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta i}\,\partial_\alpha F_{\beta k} + m_{ik} = S_{ki} - \delta_{ik} S_{\alpha\alpha}\,. \tag{2,10}$$

Über Symmetrieeigenschaften der hier auftretenden Tensoren ist nichts vorausgesetzt. Die Bedingungen, unter denen $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ gilt, erkennt man nach Elimination der S_{ik} und F_{ik}:

$$\partial_i \sigma_{ik} = 0\,; \qquad \partial_i m_{ik} + \varepsilon_{k\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{2,11}$$

Das sind die Gleichgewichtsbedingungen eines Kontinuums, in dem außer den „Kraftspannungen" σ_{ik} noch „Momentenspannungen" m_{ik} auftreten. Solche Kontinua sind von *E.* und *F. Cosserat*[1] betrachtet worden. Stoffe, in denen die m_{ik} eine meßbare Größe hätten, sind nicht bekannt geworden. Wir setzen hinfort $m_{ik} = 0$ und haben damit nach (2,11) $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

Durch Verjüngung folgt aus (2,10)

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = -\,S_{\gamma\gamma} \tag{2,12}$$

und weiter

$$S_{ik} = \varepsilon_{\alpha\beta k}\,\partial_\alpha F_{\beta i} - \frac{1}{2}\,\delta_{ik}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_\alpha F_{\beta\gamma}\,. \tag{2,13}$$

Wir zerlegen F_{ik} in seinen symmetrischen und alternierenden Teil:

$$F_{ik} = F_{(ik)} + \varepsilon_{ik\alpha}\,F_\alpha\,, \tag{2,14}$$

$$F_{(ik)} = \frac{1}{2}\,(F_{ik} + F_{ki})\,; \qquad F_\alpha = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,F_{\beta\gamma}\,.$$

Aus (2,13) wird dann

$$S_{ik} = \varepsilon_{\alpha\beta k}\,\partial_\alpha F_{\beta i} - \delta_{ik}\partial_\alpha F_\alpha \tag{2,15}$$

oder

$$S_{ik} = \varepsilon_{\alpha\beta k}\,\partial_\alpha F_{(\beta i)} - \partial_i F_k\,. \tag{2,16}$$

Wir vergleichen (2,16) mit (2,1) und finden Übereinstimmung, weil dort $F_{\beta i} = F_{i\beta}$ vorausgesetzt und über ω_k nicht verfügt worden war. Ferner ist (2,9) mit (2,1) identisch.

Natürlich würde man sich diese Rechnungen erspart haben, wenn man bereits von (2,12) an $F_{ik} = F_{ki}$ gesetzt hätte. Dabei wäre jedoch die Einsicht, daß man auf der Krustenschale keine

[1] *E.* und *F. Cosserat*, Théorie des corps déformables, Paris 1909.

Symmetrie des Tensors der Spannungsfunktion vorauszusetzen braucht, verlorengegangen. Die Eigenspannungszustände der (unbelasteten) Krustenschale werden durch die Nullspannungsfunktionen $S_{ik}^{(0)}$ und $F_{ik}^{(0)}$ beschrieben. Es sind dies die allgemeinsten Lösungen von (2,9) und (2,10) für $\sigma_{ik}' = 0$, $m_{ik} = 0$. Sie lauten

$$S_{ik}^{(0)} = \partial_i \psi_k ; \qquad F_{ik}^{(0)} = \partial_i \Psi_k - \varepsilon_{ik\varkappa} \psi_\varkappa . \tag{2,17}$$

Daraus berechnet man

$$F_{(ik)}^{(0)} = \frac{1}{2} (\partial_i \Psi_k + \partial_k \Psi_i) ; \qquad F_k^{(0)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{k\varkappa\beta} \partial_\varkappa \Psi_\beta - \psi_k . \tag{2,18}$$

Es gibt somit 6 Spannungsfunktionen ψ_1, ψ_2, ψ_3, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 für die Eigenspannungszustände der Krustenschale.

Abb. 3 zeigt, wie man sich das Gleichgewicht an einer Ecke der Krustenschale vorzustellen hat. Dabei möge die Krustenschale einen endlichen Raumteil oder ein Volumelement umhüllen.

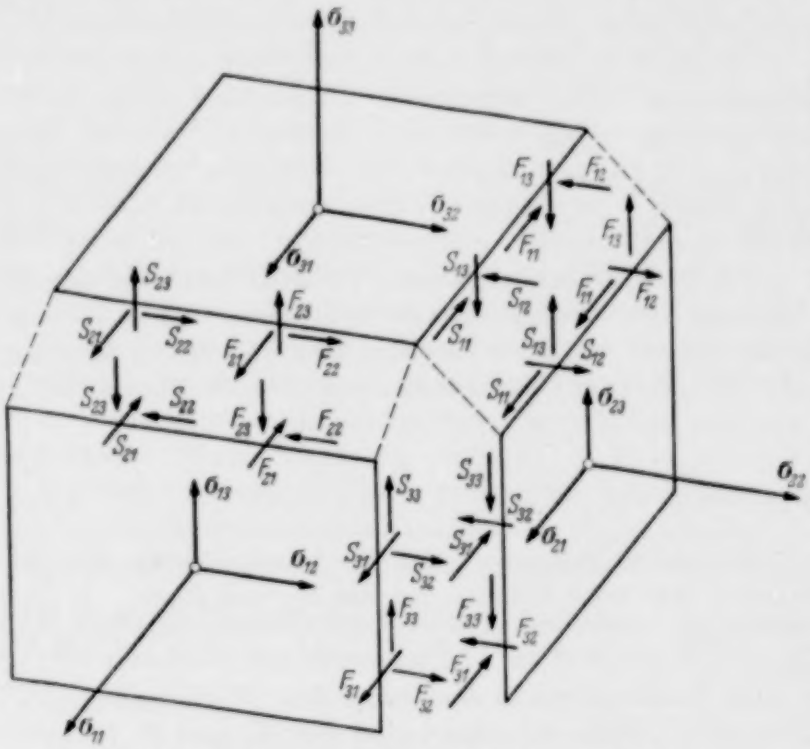


Abb. 3. Gleichgewicht an einer Ecke der Krustenschale.

3. Der an seiner Oberfläche belastete Halbraum. Problem von Boussinesq und Cerruti. An einem Beispiel — geeignet für eine Rechnung in kartesischen Koordinaten — zeigen wir, wie die Begriffsbildung „Krustenschale" die Formulierung der Randbedingungen für den Tensor der Spannungsfunktionen erleichtert und alle dahinzielenden Überlegungen durch Anschauung unterstützt.

Der Halbraum $x_3 \leqq 0$ sei an seiner Oberfläche $x_3 = 0$ belastet; σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} und m_{31}, m_{32}, m_{33} seien als Funktionen von x_1 und x_2 auf $x_3 = 0$ vorgegeben. Gesucht ist der Spannungstensor $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ im Inneren des Halbraumes.

Wir greifen auf Abb. 1 und 2 zurück. Die Ebene $x_3 = 0$ ist Krustenschale. (2,3) bis (2,8) sind ihre Gleichgewichtsbedingungen. Wir müssen einen Spannungszustand der Krustenschale finden, der diesen 6 Gleichgewichtsbedingungen genügt.

Nehmen wir z. B. an, daß alleine die normale Belastung σ_{33} vorhanden wäre. Die Krustenschale wird wie eine Platte beansprucht. Wir setzen sämtliche Schnittreaktionen in Abb. 1 gleich Null, womit (2,3) bis (2,5) erledigt sind. In (2,8) führen wir ein

$$S_{13} = \partial_2 H_3 ; \qquad S_{23} = -\partial_1 H_3 , \tag{3,1}$$

so daß

$$\Delta' H_3 = \sigma_{33} \tag{3,2}$$

(Δ' sei fortan die Abkürzung für $\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2$). (2,6) und (2,7) werden dann erfüllt durch

$$F_{21} = F_{12} = 0 ; \qquad F_{11} = F_{22} = -H_3 . \tag{3,3}$$

Jetzt greife alleine die tangentiale Belastung σ_{31} an. Dies ist eine Scheibenbeanspruchung der Krustenschale, deshalb werden alle Schnittreaktionen in Abb. 2 gleich Null gesetzt. Bleiben (2,3) bis (2,5). In (2,3) wird eingeführt:

$$S_{11} = \partial_2 H_1 ; \qquad S_{21} = -\partial_1 H_1 , \tag{3,4}$$

so daß

$$\Delta' H_1 = \sigma_{31} . \tag{3,5}$$

Ferner setzen wir in (2,4) und (2,5)

$$S_{22} = S_{12} = F_{23} = 0 , \tag{3,6}$$

worauf (2,5) erfüllt wird durch

$$F_{13} = H_1 . \tag{3,7}$$

Mit σ_{32} wird entsprechend verfahren.

Die Momentenbelegung m_{33} alleine wird zu keiner Biegebeanspruchung der Krustenschale Anlaß geben. Bleiben (2,3) bis (2,5). Man hat „reine Schubbeanspruchung" zu erwarten, also

$$S_{12} = S_{21} . \tag{3,8}$$

Nun läge der Gedanke nahe, auf die in der Statik so ungewohnten Normalenmomente F_{13} und F_{23} auf $x_3 = 0$ zu verzichten. Indem wir diese Frage noch offen halten, setzen wir mit einer Konstanten α

$$F_{13} = \alpha\, \partial_2 G_3 ; \qquad F_{23} = -\alpha\, \partial_1 G_3 \tag{3,9}$$

und

$$S_{22} = -(1-\alpha)\, \partial_2\partial_2 G_3 ; \qquad S_{11} = -(1-\alpha)\partial_1\partial_1 G_3 , \tag{3,10}$$

so daß

$$\Delta' G_3 = m_{33} , \tag{3,11}$$

und wegen (2,3) und (2,4)

$$S_{12} = S_{21} = -(1-\alpha)\, \partial_1\partial_2 G_3 . \tag{3,12}$$

Schließlich betrachten wir noch m_{31} alleine, das die Krustenschale wie eine Platte belastet. Also setzen wir alle Schnittreaktionen in (2,3) bis (2,5) gleich Null und erfüllen (2,6) bis (2,8) durch

$$F_{12} = F_{21} = 0 , \tag{3,13}$$

$$F_{11} = \partial_2 G_1 ; \qquad S_{13} = \partial_1\partial_1 G_1 ; \qquad \Delta' G_3 = m_{21} , \tag{3,14}$$

$$F_{22} = F_{11} ; \qquad S_{23} = \partial_1\partial_2 G_1 . \tag{3,15}$$

Für m_{32} entsprechend.

Nun wird überlagert:

$$S_{21} = -\partial_1 H_1 - (1-\alpha)\, \partial_1\partial_2 G_3 ; \qquad S_{11} = \partial_2 H_1 - (1-\alpha)\, \partial_1\partial_1 G_3 , \tag{3,16}$$

$$S_{22} = -\partial_1 H_2 - (1-\alpha)\, \partial_2\partial_2 G_3 ; \qquad S_{12} = \partial_2 H_2 - (1-\alpha)\, \partial_1\partial_2 G_3 , \tag{3,17}$$

$$S_{13} = \partial_2 H_3 + \partial_1\partial_1 G_1 + \partial_1\partial_2 G_2 ; \qquad S_{23} = -\partial_1 H_3 + \partial_1\partial_2 G_1 + \partial_2\partial_2 G_2 , \tag{3,18}$$

$$F_{11} = F_{22} = -H_3 + \partial_2 G_1 - \partial_1 G_2 , \tag{3,19}$$

$$F_{12} = F_{21} = 0 , \tag{3,20}$$

$$F_{13} = H_1 + \alpha\, \partial_2 G_3 ; \qquad F_{23} = H_2 - \alpha\, \partial_1 G_3 . \tag{3,21}$$

Die Berechnung der Randwerte der Spannungsfunktionen ist somit auf die Ermittlung von Partikularlösungen der 6 *Poisson*schen Gleichungen

$$\Delta' H_i = \sigma_{3i} ; \quad \Delta' G_i = m_{3i} \tag{3,22}$$

zurückgeführt.

Der Körper sei isotrop und elastisch. Für seine Spannungsfunktionen gelten (1,3) bis (1,5) mit $F_{ik} = F_{ki}$.

Da wegen (3,20) F_{12} auf $x_3 = 0$ Null ist, muß Θ_{12} als harmonische Funktion überhaupt verschwinden. Nach (3,19) stimmen F_{11} und F_{22} überein auf $x_3 = 0$. Aus (1,3) folgt, daß sie im ganzen Körper übereinstimmen, daß also gilt

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta . \tag{3,23}$$

Zur Lösung von (1,5) empfiehlt sich der Ansatz

$$\Omega = \Theta_{33} + x_3 X , \qquad \Delta X = 0 , \tag{3,24}$$

der nach einfacher Rechnung

$$X = \frac{1}{2(1-\nu)} [2(\partial_1\Theta_{13} + \partial_2\Theta_{23}) + \partial_3(\Theta_{33} - \Theta)] \tag{3,25}$$

ergibt. Unsere Spannungsfunktionen lauten:

$$F_{11} = F_{22} = \Theta + x_3 X , \quad F_{33} = \Theta_{33} + x_3 X , \quad F_{12} = 0 , \quad F_{13} = \Theta_{13} , \quad F_{23} = \Theta_{23} . \tag{3,26}$$

Hierin sind Θ_{13}, Θ_{23} und Θ als bekannt anzusehen, da ihre Werte auf $x_3 = 0$ gegeben sind.

Die noch fehlenden Randbedingungen haben wir unter denjenigen Gleichungen (2,10) zu suchen, die Ableitungen nach x_3 enthalten, also Ableitungen in Richtung der Normalen der Krustenschale. Zunächst bemerkt man, daß $\partial_3 F_{33}$ dort nicht auftritt. In Betracht zu ziehen haben wir die 4 Gleichungen ($i, k = 1, 2$):

$$\partial_2 F_{31} - \partial_3 F_{21} = -(S_{22} + S_{23}) , \tag{3,27}$$

$$\partial_2 F_{32} - \partial_3 F_{22} = S_{21} , \tag{3,28}$$

$$\partial_3 F_{11} - \partial_1 F_{31} = S_{12} , \tag{3,29}$$

$$\partial_3 F_{12} - \partial_1 F_{32} = -(S_{11} + S_{33}) . \tag{3,30}$$

(Es gibt nur Momentenspannungen m_{3i} und zwar nur auf $x_3 = 0$).

Durch Addition von (2,5), (3,27) und (3,30) erhält man

$$-2\,(S_{11}+S_{22}+S_{33}) = m_{33}\,, \tag{3,31}$$

wodurch sich S_{33} eliminieren läßt.

Da F_{12} gleich Null ist, ergeben (3,27) und (3,30) zusammen mit (3,31)

$$\partial_2 F_{31} = S_{11} + \frac{1}{2}\,m_{33}\,; \qquad -\partial_1 F_{32} = S_{22} + \frac{1}{2}\,m_{33}\,. \tag{3,32}$$

Damit kommen wir auf (3,9) zurück, denn (3,32) entscheidet jetzt über den dort noch offengelassenen Faktor α; er muß den Wert 1/2 haben. Aus (3,28) und (3,29) wird, wenn man (3,16), (3,17) und (3,21) einsetzt:

$$\partial_3 F_{11} = \partial_3 F_{22} = \partial_1 H_1 + \partial_2 H_2\,. \tag{3,33}$$

Diese Randbedingung ermöglicht die noch ausstehende Bestimmung von Θ_{33} in (3,26).

Die Randbedingungen (3,27) bis (3,30) sind Momenten-Gleichgewichtsbedingungen. Zwar hatten wir schon vorher sämtliche Gleichgewichtsbedingungen der Krustenschale $x_3 = 0$, nämlich (2,3) bis (2,8), erfüllt. Wie aber aus (2,10) hervorgeht, drücken die zusätzlichen Randbedingungen (3,27) bis (3,30) die Tatsache aus, daß unser Körper im Inneren keine Momentenspannungen besitzt. In einer Theorie des elastischen Körpers mit Momentenspannungen — eine solche gibt es leider nicht — würden sich wahrscheinlich die Randbedingungen der 18 kompatiblen Spannungsfunktionen S_{ik} und F_{ik} einfacher formulieren lassen. Auf $x_3 = 0$ gilt nach (3,19) und (3,21)

$$\Theta = -H_3 + \partial_2 G_1 - \partial_1 G_2\,, \tag{3,34}$$

$$\Theta_{13} = H_1 + \frac{1}{2}\,\partial_2 G_3\,, \tag{3,35}$$

$$\Theta_{23} = H_2 - \frac{1}{2}\,\partial_1 G_3\,. \tag{3,36}$$

H_i und G_i, auf $x_3 = 0$ durch (3,22) bestimmt, haben wir als harmonische Funktionen in $x_3 < 0$ hinein fortgesetzt zu denken.

Nach (3,26) ist auf $x_3 = 0$

$$\partial_3 F_{11} = \partial_3 F_{22} = \partial_3 \Theta + X\,, \tag{3,37}$$

also mit (3,25), (3,33), (3,35) und (3,36)

$$\partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 = \partial_3 \Theta + \frac{1}{1-\nu}\left|\partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 + \frac{1}{2}\,\partial_3(\Theta_{33} - \Theta)\right|. \tag{3,38}$$

Indem wir nun

$$H_1 = \partial_3 A_1\,; \qquad H_2 = \partial_3 A_2 \tag{3,39}$$

(A_1 und A_3 harmonisch) setzen, läßt sich (3,38) schreiben

$$\partial_3\,[\Theta_{33} + (1-2\,\nu)\,\Theta + 2\,\nu\,(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2)] = 0\,. \tag{3,40}$$

Die eckige Klammer enthält lauter harmonische Funktionen; da aber eine harmonische Funktion, deren Normalableitung auf $x_3 = 0$ verschwindet, überhaupt Null ist, wird

$$\Theta_{33} = -2\,\nu\,(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2) + (1-2\,\nu)\,(H_3 - \partial_2 G_1 + \partial_1 G_2) \tag{3,41}$$

und damit

$$X = \partial_1 H_1 + \partial_2 H_2 + \partial_3\,(H_3 - \partial_2 G_1 + \partial_1 G_2)\,. \tag{3,42}$$

Wenn wir jetzt den Spannungstensor σ_{ik} nach (1,2) berechnen, dann erscheinen an der Oberfläche $x_3 = 0$ die vorgegebenen Spannungen σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} vermehrt um die Beträge bzw.

$$-\frac{1}{2}\,\partial_2 m_{33}\,, \qquad \frac{1}{2}\,\partial_1 m_{33}\,, \qquad \partial_2 m_{31} - \partial_1 m_{32}\,.$$

Die auf $x_3 = 0$ vorgegebene Momentenverteilung ist somit in eine statisch äquivalente Kräfteverteilung umgewandelt. Man wird an die klassische Biegetheorie der Platte erinnert, in der die Torsionsmomente am Rande durch statisch äquivalente Querkräfte ersetzt werden.

Im Falle der singulären Belastung durch Einzelkräfte P_1, P_2, P_3 (Problem von *Boussinesq* und *Cerruti*[1]) und die Einzelmomente M_1, M_2, M_3, die im Punkte ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) angreifen, lauten die Lösungen von (3,22)

$$H_i = \frac{P_i}{2\,\pi}\ln r\,; \qquad G_i = \frac{M_i}{2\,\pi}\ln r\,; \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,. \tag{3,43}$$

[1] *A. E. H. Love*, Theory of Elasticity, 4. Aufl., Cambridge 1952.

Boussinesq hat die harmonische Funktion angegeben, die in $x_3 < 0$ regulär ist und auf $x_3 = 0$ den Wert $\ln r$ annimmt:

$$\ln (R - x_3) = \partial_3 [x_3 \ln (R - x_3) + R] , \tag{3,44}$$
$$R = \sqrt{r^2 + x_3^2} .$$

Damit sind auch A_1 und A_2 in (3,39) bekannt.

Sonntag[1] hat die Spannungen infolge Belastung durch Einzelmomente berechnet, indem er die Lösungen von *Boussinesq* und *Cerruti* differentierte. Man vergleiche hierzu unsere Darstellungen (3,19) und (3,21).

Zum Schluß dieses Kapitels noch eine Bemerkung. Auf der Krustenschale ist Gleichgewicht möglich auch ohne Torsions- und Normalenmomente. Man kann also alleine mit den 3 Spannungsfunktionen F_{11}, F_{22} und F_{33} auskommen (*Maxwell*scher Ansatz). Doch zeigt es sich im Falle der tangentialen Einzelkraft (Problem von *Cerruti*), daß Rechnung und Resultat unangemessen kompliziert werden. Man kann jedoch durch nachträgliche Überlagerung geeigneter Nullspannungsfunktionen auf unser obiges einfaches Resultat zurückfinden.

4. Zylinderkoordinaten. Koordinatenflächen als Krustenschale. Das Gedankenmodell einer Krustenschale, bestehend aus den Koordinatenflächen $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$ und $z = \text{const}$, soll jetzt dazu benutzt werden, die Zusammenhänge zwischen σ_{ik}, S_{ik} und F_{ik} in Zylinderkoordinaten ($x_1 = r$; $x_2 = \vartheta$; $x_3 = z$) herzuleiten.

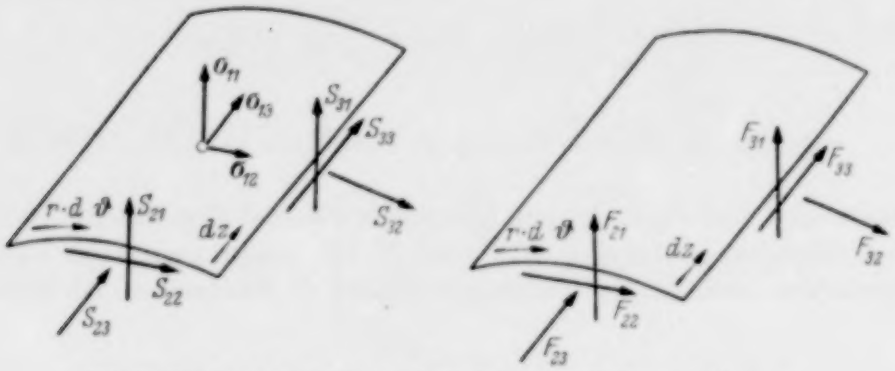


Abb. 4. Zum Gleichgewicht der Zylinderschale; Kräfte und Momente.

Wir beginnen mit der Zylinderschale $r = \text{const}$ (Abb. 4). Ihre 6 Gleichgewichtsbedingungen — wiederum mit Berücksichtigung der Normalenmomente — lauten

$$\frac{\partial S_{21}}{\partial z} - \frac{\partial S_{31}}{r\,\partial \vartheta} + \frac{S_{32}}{r} = \sigma_{11} , \tag{4,1}$$

$$\frac{\partial S_{22}}{\partial z} - \frac{\partial S_{32}}{r\,\partial \vartheta} - \frac{S_{31}}{r} = \sigma_{12} , \tag{4,2}$$

$$\frac{\partial S_{23}}{\partial z} - \frac{\partial S_{33}}{r\,\partial \vartheta} = \sigma_{13} , \tag{4,3}$$

$$\frac{\partial F_{31}}{r\,\partial \vartheta} - \frac{\partial F_{21}}{\partial z} - \frac{F_{32}}{r} = -(S_{22} + S_{33}) , \tag{4,4}$$

$$\frac{\partial F_{32}}{r\,\partial \vartheta} - \frac{\partial F_{22}}{\partial z} + \frac{F_{31}}{r} = S_{21} , \tag{4,5}$$

$$\frac{\partial F_{33}}{r\,\partial \vartheta} - \frac{\partial F_{23}}{\partial z} = S_{31} . \tag{4,6}$$

Für das ebene Kontinuum $\vartheta = \text{const}$ mit den cartesischen Koordinaten z, r können wir auf die Gleichgewichtsbedingungen (2,3) bis (2,10) zurückgreifen

$$\frac{\partial S_{31}}{\partial r} - \frac{\partial S_{11}}{\partial z} = \sigma_{21} , \tag{4,7}$$

$$\frac{\partial S_{32}}{\partial r} - \frac{\partial S_{12}}{\partial z} = \sigma_{22} , \tag{4,8}$$

$$\frac{\partial S_{33}}{\partial r} - \frac{\partial S_{13}}{\partial z} = \sigma_{23} , \tag{4,9}$$

[1] *G. Sonntag*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 263—270.

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial z} - \frac{\partial F_{31}}{\partial r} = S_{12}\,, \tag{4,10}$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial z} - \frac{\partial F_{32}}{\partial r} = -(S_{33} + S_{11})\,, \tag{4,11}$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial z} - \frac{\partial F_{33}}{\partial r} = S_{32}\,. \tag{4,12}$$

Und schließlich die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Kontinuums $z = \text{const.}$ in den Polarkoordinaten r, ϑ nach Abb. 5 und 6:

$$\frac{\partial S_{11}}{r\,\partial\vartheta} - \frac{\partial S_{21}}{\partial r} - \frac{1}{r}(S_{21} + S_{12}) = \sigma_{31}\,, \tag{4,13}$$

$$\frac{\partial S_{12}}{r\,\partial\vartheta} - \frac{\partial S_{22}}{\partial r} - \frac{1}{r}(S_{22} - S_{11}) = \sigma_{32}\,, \tag{4,14}$$

$$\frac{\partial S_{13}}{r\,\partial\vartheta} - \frac{\partial S_{23}}{\partial r} - \frac{1}{r}S_{23} = \sigma_{33}\,. \tag{4,15}$$

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r}(F_{21} + F_{12}) - \frac{\partial F_{11}}{r\,\partial\vartheta} = S_{13}\,, \tag{4,16}$$

$$\frac{\partial F_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r}(F_{22} - F_{11}) - \frac{\partial F_{12}}{r\,\partial\vartheta} = S_{23}\,, \tag{4,17}$$

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r}F_{23} - \frac{\partial F_{13}}{r\,\partial\vartheta} = -(S_{11} + S_{22})\,. \tag{4,18}$$

Von Momentenbelastungen und -Spannungen haben wir diesmal abgesehen. Daß man diese 18 Gleichungen in 2 Tensor-Gleichungen analog (2,9) und (2,10) zusammenfassen kann — man braucht dort nur die gewöhnlichen Ableitungen durch covariante zu ersetzen — ist wohlbekannt.[1] Unsere

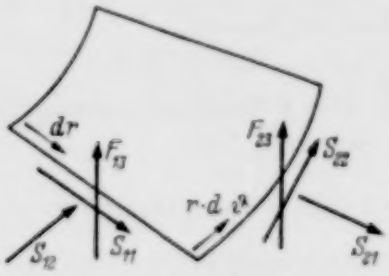


Abb. 5. Zum Gleichgewicht der Scheibe; Polarkoordinaten r, ϑ.

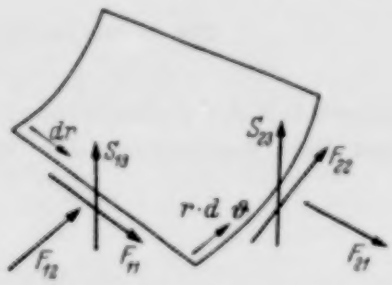


Abb. 6. Zum Gleichgewicht der Platte; Polarkoordinaten r, ϑ.

dortigen Untersuchungen über die Symmetrieeigenschaften von F_{ik} gelten auch in beliebigen Koordinaten, weil die Symmetrieeigenschaften eines Tensors invarianter Natur sind. Für unsere weiteren Zwecke genügt es, den Tensor der Spannungsfunktionen von vornherein als symmetrisch anzusehen. Dann folgt durch Addition von (4,4), (4,11) und (4,18)

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0\,. \tag{4,19}$$

Nimmt man als Krustenschale die Oberfläche eines Volumenelementes, dann ist unmittelbar klar, daß sich die Spannungen σ_{ik} vermittels der Schnittreaktionen S_{ik} und F_{ik} der Krustenschale das Gleichgewicht halten. Nach Elimination der S_{ik} in (4,1) bis (4,18) lassen sich also die 3 Gleichgewichtsbedingungen für die sechs σ_{ik} am Volumenelement identisch in den sechs F_{ik} erfüllen.

Es bedarf keiner weiteren Begründung, daß man auf diese statisch anschauliche Weise die Darstellung der Spannungen durch Spannungsfunktionen in beliebigen Koordinaten finden kann.

Die beiden Tensorgleichungen (2,9), (2,10) regen keineswegs zu einer anschaulichen Interpretation an. Vielmehr möchte man es als Curiosum ansehen, daß sich die 18 Gleichgewichtsbedingungen einer Krustenschale, die aus den Koordinatenflächen besteht, in 2 Tensorgleichungen zusammenfassen lassen.

[1] *B. Finzi*, Rend. Accad. Lincei (6) 19 (1934), S. 578—584, S. 620—623.

5. Die Spannungsfunktionen des elastischen Körpers in Zylinderkoordinaten. Solange die Koordinaten orthogonal sind, bietet der ∇-Kalkül Vorteile. In unserer Bezeichnungsweise schließen wir uns *Marguerre*[1] an.

Was die Integration der Kompatibilitätsbedingungen des Tensors $\boldsymbol{F} = (F_{ik})$ anbelangt, so darf ich wiederum auf meine frühere Arbeit[2] verweisen. Die dortigen kovarianten Formulierungen gestatten unmittelbar die Übertragungen auf Orthogonal-Koordinaten. Man erhält folgende Darstellung für $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{I}\,(\Omega - \Theta_{xx}) \tag{5,1}$$

mit

$$\Delta\boldsymbol{\Theta} = 0 \tag{5,2}$$

und

$$\Delta\Omega = \frac{1}{1-\nu}\,\mathrm{div}\,\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Theta} \tag{5,3}$$

$$(\mathrm{div}\,\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Theta} = \nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta})\,;\quad \Delta = \nabla\cdot\nabla)\,.$$

Nur nebenbei bemerken wir, daß sich der Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ darstellt als

$$G\,\mathfrak{u} = \mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Theta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\Omega\,. \tag{5,4}$$

In Zylinderkoordinaten r, ϑ, z ist Δ der Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{5,5}$$

Auf einen Vektor $\mathfrak{D} = (D_1, D_2, D_3)$ angewendet, gibt er die 3 Komponenten

$$\Delta\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \Delta D_1 - \dfrac{D_1}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial D_2}{\partial\vartheta} \\ \Delta D_2 - \dfrac{D_2}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial D_1}{\partial\vartheta} \\ \Delta D_3 \end{pmatrix}. \tag{5,6}$$

Seine Anwendung auf den symmetrischen Tensor $\boldsymbol{\Theta}$ ergibt:

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}]_{11} = \Delta\Theta_{11} - \frac{2}{r^2}(\Theta_{11} - \Theta_{22}) - \frac{4}{r^2}\frac{\partial\Theta_{12}}{\partial\vartheta}\,, \tag{5,7}$$

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}]_{22} = \Delta\Theta_{22} - \frac{2}{r^2}(\Theta_{22} - \Theta_{11}) + \frac{4}{r^2}\frac{\partial\Theta_{12}}{\partial\vartheta}\,, \tag{5,8}$$

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}]_{33} = \Delta\Theta_{33}\,, \tag{5,9}$$

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}]_{12} = \Delta\Theta_{12} - \frac{4}{r^2}\Theta_{12} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\Theta_{11} - \Theta_{22})\,, \tag{5,10}$$

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}]_{13} = \Delta\Theta_{13} - \frac{1}{r^2}\Theta_{13} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Theta_{23}}{\partial\vartheta}\,, \tag{5,11}$$

$$[\Delta\boldsymbol{\Theta}]_{23} = \Delta\Theta_{23} - \frac{1}{r^2}\Theta_{23} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Theta_{13}}{\partial\vartheta}\,. \tag{5,12}$$

Schließlich benötigen wir noch den Vektor

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Theta_{11}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}(\Theta_{11} - \Theta_{22}) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Theta_{12}}{\partial\vartheta} + \dfrac{\partial\Theta_{13}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\Theta_{12}}{\partial r} + \dfrac{2}{r}\Theta_{12} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Theta_{22}}{\partial\vartheta} + \dfrac{\partial\Theta_{23}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\Theta_{13}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\Theta_{13} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Theta_{23}}{\partial\vartheta} + \dfrac{\partial\Theta_{33}}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{5,13}$$

und den Skalar

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{D} = \frac{\partial D_1}{\partial r} + \frac{1}{r}D_1 + \frac{\partial D_2}{r\,\partial\vartheta} + \frac{\partial D_3}{\partial z}\,. \tag{5,14}$$

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 291.
[2] Siehe Fußnote 1 von S. 291.

Wegen (5,2) gilt, wenn man $\mathfrak{D} = \operatorname{Div} \mathfrak{G}$ setzt,

$$\Delta \operatorname{Div} \mathfrak{G} = \Delta \mathfrak{D} = 0 \tag{5,15}$$

und

$$\Delta \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0\,, \tag{5,16}$$

so daß aus (5,3)

$$\Delta\Delta\Omega = 0 \tag{5,17}$$

folgt.

Eine Partikularlösung von (5,3) ist

$$\Omega = \Theta_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2\,(1-\nu)}(r\,D_1 + z\,D_3)\,. \tag{5,18}$$

Dieser ganze Formelapparat ist recht monströs und unangenehm dadurch, daß die „Potentialfunktionen" Θ_{ik} bereits durch ihre Differentialgleichungen gekoppelt sind.

Das im 2. Abschnitt in kartesischen Koordinaten behandelte Problem des Halbraumes kann in Zylinderkoordinaten ganz entsprechend gelöst werden. Es wird nicht überraschen, daß auch jetzt in den Randbedingungen auf $z = 0$

$$F_{11} = F_{22}\,, \qquad \text{also} \qquad \Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta \tag{5,19}$$

und

$$F_{12} = \Theta_{12} = 0 \tag{5,20}$$

sind. Lösungen der zugehörigen Potentialgleichungen (5,7), (5,8) und (5,10), die diesen Randbedingungen genügen, sind

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta\,, \qquad \Delta\Theta = 0\,; \qquad \Theta_{12} = 0 \tag{5,21}$$

im ganzen Halbkörper. Eine (3,25) entsprechende Partikularlösung von (5,3) ist bei Beachtung von (5,21)

$$\Omega = \Theta_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2\,(1-\nu)}\,z\left[2\left(\frac{\partial\Theta_{13}}{\partial r} + \frac{\Theta_{13}}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Theta_{23}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\,(\Theta_{33} - \Theta)\right], \tag{5,22}$$

worin $\Theta_{\alpha\alpha}$ und der Faktor von z harmonisch sind.

Somit stimmen auf $z = 0$ die Werte von Θ mit den bekannten von $F_{11} = F_{22}$ überein, so daß Θ als harmonische Funktion festgelegt ist. Die weitere Rechnung verläuft nun ganz analog zu derjenigen des 2. Abschnittes.

Eine weitere Partikularlösung von (5,3), das Gegenstück zu (5,22), ist

$$\Omega = \Theta_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2\,(1-\nu)}\,r\left[\frac{\partial}{\partial r}\,(\Theta - \Theta_{33}) + 2\,\frac{\partial\Theta_{13}}{\partial z}\right], \tag{5,23}$$

wieder unter der Voraussetzung $\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta$, $\Theta_{12} = 0$. Θ_{13} und Θ_{23} sind durch ihre Potentialgleichungen gekoppelt. Man darf wohl vermuten, daß diese Lösung für das Problem des beliebig belasteten unendlichlangen Zylinders geeignet ist.

Die Nebenbedingungen $F_{11} = F_{22}$, $F_{12} = 0$ im ganzen Körper kann man selbstverständlich immer durch Überlagerung geeigneter Nullspannungsfunktionen erzwingen, womit aber noch nicht bewiesen ist, daß die Einschränkung (5,21) bei jedem beliebigen Problem möglich ist. Vielmehr müßte gezeigt werden, daß die Darstellung (5,1) bis (5,3) auch nach Überlagerung mit den Nullspannungsfunktionen noch gültig bleibt.

6. Rotationssymmetrie. Wir betrachten nun den Sonderfall, daß Körper und Belastung Rotations-Symmetrie besitzen. Unsere Spannungsfunktionen können als unabhängig von ϑ angenommen werden.

Wenn wir die Einschränkungen (5,21) weiterhin beibehalten, bleibt

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta\,, \qquad \Delta\Theta = 0\,, \tag{6,1}$$

$$\Theta_{12} = 0\,, \tag{6,2}$$

$$\Delta\Theta_{13} - \frac{\Theta_{13}}{r^2} = 0\,, \qquad \Delta\Theta_{23} - \frac{\Theta_{23}}{r^2} = 0\,; \tag{6,3}$$

$$D_1 = \frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial\Theta_{13}}{\partial z}\,, \tag{6,4}$$

$$D_2 = \frac{\partial\Theta_{23}}{\partial z}\,, \tag{6,5}$$

$$D_3 = \frac{\partial\Theta_{13}}{\partial r} + \frac{\Theta_{13}}{r} + \frac{\partial\Theta_{33}}{\partial z}\,. \tag{6,6}$$

Die Differentialgleichungen für D_1 und D_2 bzw. für Θ_{13} und Θ_{23} sind jetzt entkoppelt. Die 3 Partikularlösungen (5,18), (5,22) und (5,23) lauten bzw.:

$$\Omega = \Theta_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2(1-\nu)}(r D_1 + z D_3), \tag{6,7}$$

$$\Omega = \Theta_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2(1-\nu)} z \left[2\left(\frac{\partial \Theta_{13}}{\partial r} + \frac{\Theta_{13}}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\Theta_{33} - \Theta)\right], \tag{6,8}$$

$$\Omega = \Theta_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2(1-\nu)} r \left[\frac{\partial}{\partial r}(\Theta - \Theta_{33}) + 2\frac{\partial \Theta_{13}}{\partial z}\right]. \tag{6,9}$$

Wegen (5,3) und (5,14) geht bei Rotationssymmetrie $D_2 = \partial\Theta_{23}/\partial z$ nicht in Ω ein. Demnach steht Θ_{23} in keinem Zusammenhange mehr mit den anderen Spannungsfunktionen

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta, \qquad \Theta_{33} \qquad \text{und} \qquad \Theta_{13}.$$

Deshalb betrachten wir im nächsten Abschnitt $\Theta_{23} = F_{23}$ gesondert.

7. Torsion des Rotationskörpers. Anhand des Formelsystems (4,1) bis (4,18) stellen wir fest, daß $F_{23} = F_{32}(r, z)$ nur auftritt in (4,4), (4,6), (4,11) und (4,18):

$$S_{11} = -\frac{F_{23}}{r}, \qquad S_{33} = \frac{\partial F_{23}}{\partial r} + \frac{F_{23}}{r}, \qquad S_{22} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial r}, \qquad S_{31} = -\frac{\partial F_{23}}{\partial z}. \tag{7,1}$$

Diese vier S_{ik} erscheinen aber nur in (4,2), (4,7), (4,9) und (4,14), so daß

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r} - \frac{1}{r} F_{23}\right), \tag{7,2}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} F_{23}\right); \tag{7,3}$$

alle anderen σ_{ik} sind Null. Das ist aber der Fall der Torsion (*Marguerre*[1]).

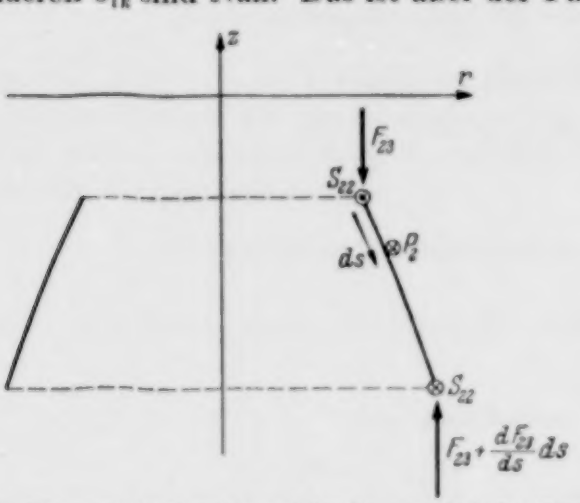


Abb. 7. Momentengleichgewicht auf der Krustenschale bei Torsion.

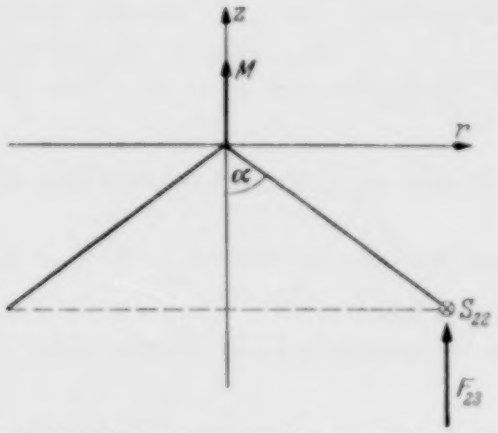


Abb. 8. Einzelmoment an der Krustenschale des Kegels.

Nach Abb. 7 lautet die Bedingung für Momentengleichgewicht an einer Zone der Krustenschale

$$\frac{d}{ds}(r^2 S_{22} + r F_{23}) + r^2 P_2 = 0. \tag{7,4}$$

Nach (7,1) sind Schubkraft S_{22} und Schnittmoment F_{23} nicht unabhängig voneinander, so daß aus (7,4) die Randbedingung für die Spannungsfunktion F_{23} folgt:

$$\frac{d}{ds}\left[r^2\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r} - \frac{1}{r} F_{23}\right)\right] = r^2 P_2. \tag{7,5}$$

Demnach gilt auf der Schnittfläche $z = \text{const}$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial r} - \frac{1}{r} F_{23}\right)\right] = \sigma_{32}, \tag{7,6}$$

eine Darstellung, die mit (7,3) identisch ist.

[1] Siehe Fußnote 3 von S. 291.

Nach (6,3) hat F_{23} der Potentialgleichung

$$\Delta F_{23} - \frac{1}{r^2} F_{23} = 0 \tag{7,7}$$

zu genügen, kann also als Ableitung einer harmonischen Funktion dargestellt werden:

$$F_{23} = \frac{\partial G}{\partial r}\,; \qquad \Delta G = 0\,. \tag{7,8}$$

Werfen wir noch einen kurzen Blick auf das bekannte Problem des Kegels, der an seiner Spitze durch ein Moment M belastet ist (Abb. 8). Das Momentengleichgewicht der Krustenschale verlangt

$$2\pi\,(r^2 S_{22} + r F_{23}) + M = 0\,. \tag{7,9}$$

Bei $\alpha = \pi/2$ berechnet sich der Randwert der Spannungsfunktion aus (7,9) zu

$$F_{23} = -\frac{M}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,, \qquad G = -\frac{M}{4\pi}\ln r\,, \tag{7,10}$$

wodurch wir auf die Lösung

$$G = -\frac{M}{4\pi}\ln\left(\sqrt{r^2 + z^2} - z\right) \tag{7,11}$$

geführt werden. Da nun die in (7,9) auftretenden Größen $r\frac{\partial G}{\partial r}$ und $r^2\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}$ homogen nullter Ordnung sind, bekommt man mit dem modifizierten Ansatz

$$G = -c\ln\left(\sqrt{r^2 + z^2} - z\right) \tag{7,12}$$

die Lösung[1] für beliebige α:

$$c = \frac{M}{2\pi}\,\frac{1}{2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha}\,. \tag{7,13}$$

8. Axiale Symmetrie. Nach Abschnitt 6 haben wir die Spannungsfunktionen

$$F_{11} = F_{22} = F = \Theta - \Theta_{33} + \Omega\,, \tag{8,1}$$

$$F_{33} = \Theta_{33} - \Theta_{33} + \Omega\,, \tag{8,2}$$

$$F_{13} = \Theta_{13}\,, \tag{8,3}$$

wobei Θ und Θ_{33} harmonisch sind und Θ_{13} nach (6,3) der Potentialgleichung

$$\Delta\Theta_{13} - \frac{1}{r^2}\Theta_{13} = 0 \tag{8,4}$$

zu genügen hat.

Den Gleichungen (4,5), (4,10), (4,12) und (4,17) entnehmen wir

$$\left.\begin{aligned} S_{21} &= -\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{F_{13}}{r}\,; & S_{32} &= -\frac{\partial F_{33}}{\partial r} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z}\,,\\ S_{12} &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r}\,; & S_{23} &= \frac{\partial F}{\partial r}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8,5}$$

Die restlichen S_{ik} sind Null.

Nun betrachten wir wieder das Kräftegleichgewicht an der Krustenschale. Die Gleichgewichtsbedingung für die z-Richtung entnimmt man Abb. 9:

$$\frac{d}{ds}(r S_{23}) + r P_3 = 0\,, \tag{8,6}$$

die für die radiale Richtung der Abb. 10:

$$\frac{d}{ds}(r S_{21}) + S_{12}\frac{dr}{ds} + S_{32}\frac{dz}{ds} + r P_1 = 0\,. \tag{8,7}$$

Die Krustenschale unseres Umdrehungskörpers haben wir approximiert durch Krustenschalen der Koordinatenflächen $r = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$ mit den infinitesimalen Stufen dr und dz.

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953, S. 338.

In Θ, Θ_{33} und Θ_{13} stehen 3 Funktionen zur Verfügung, um die 2 Randbedingungen (8,6) und (8,7) zu erfüllen. Diesen Überfluß wird man gerne benutzen, um noch einmal das ganze Formelsystem zu vereinfachen. Dann liegt es nahe, wegen der etwas unbequemen Differentialgleichung (8,4) und der Möglichkeit, (8,5) zu vereinfachen, auf Θ_{13} zu verzichten, also

$$\Theta_{13} = 0 \tag{8,8}$$

zu setzen. Eine andere Vereinfachung wäre, $\Theta_{33} = \Theta$ zu setzen und Θ_{13} beizubehalten. Und schließlich könnte man daran denken, Θ_{33} und Θ_{13} aneinander zu binden, etwa dadurch,

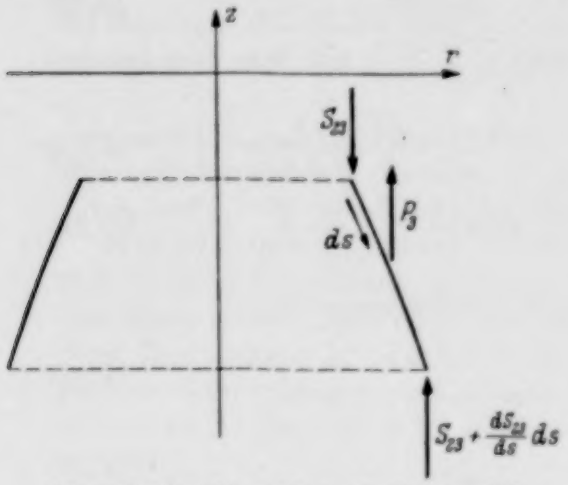


Abb. 9. Kräftegleichgewicht an der Krustenschale in z-Richtung.

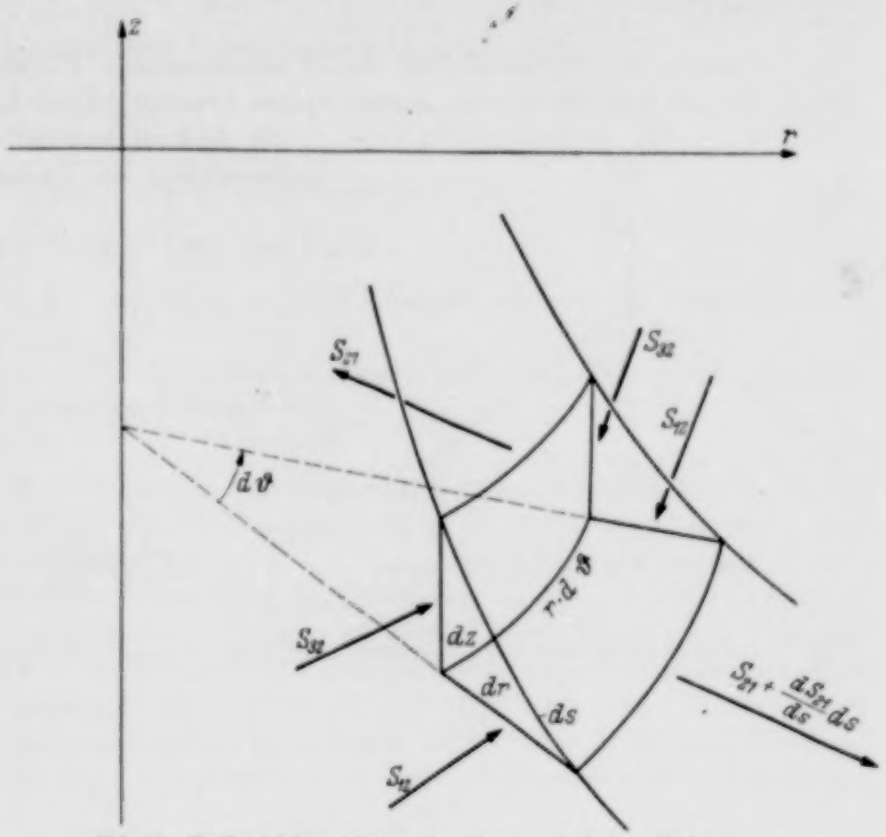


Abb. 10. Kräftegleichgewicht an der Krustenschale in r-Richtung.

daß man sie als die z- bzw. r-Ableitung einer harmonischen Funktion darstellt. Auf die Problematik solcher Vereinfachungen kommen wir noch im Schlußkapitel zu sprechen.

Beim Problem von *Boussinesq*, Einzelkraft K auf Halbraum $z \leqq 0$, empfiehlt sich (8,8). Für Ω benutzen wir die Partikularlösung

$$\Omega = \Theta_{xx} + \frac{1}{2(1-\nu)} z \frac{\partial}{\partial z} (\Theta_{33} - \Theta) . \tag{8,9}$$

Die beiden Randbedingungen (8,6) und (8,7) auf $z = 0$ lauten, wenn man noch (8,5) beachtet,

$$r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{K}{2\pi} = 0 , \tag{8,10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 . \tag{8,11}$$

Wegen (8,1) und (8,9) folgt aus (8,10)

$$\Theta = -\frac{K}{2\pi} \ln r \tag{8,12}$$

auf $z = 0$. (8,11) verlangt auf $z = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Theta_{33} - \Theta) = 0 . \tag{8,13}$$

Da in dieser Gleichung nur harmonische Funktionen auftreten, folgt aus ihr in bekannter Schlußweise

$$\Theta_{33} = -(1-2\nu)\Theta \tag{8,14}$$

im ganzen Halbraum $z \leqq 0$.

(8,1) und (8,2) lauten jetzt

$$F_{11} = F_{22} = F = \Theta - z \frac{\partial \Theta}{\partial z} , \tag{8,15}$$

$$F_{33} = -(1-2\nu)\Theta - z \frac{\partial \Theta}{\partial z} . \tag{8,16}$$

Nach (6,3) hat F_{23} der Potentialgleichung

$$\Delta F_{23} - \frac{1}{r^2} F_{23} = 0 \tag{7,7}$$

zu genügen, kann also als Ableitung einer harmonischen Funktion dargestellt werden:

$$F_{23} = \frac{\partial G}{\partial r}\,; \qquad \Delta G = 0\,. \tag{7,8}$$

Werfen wir noch einen kurzen Blick auf das bekannte Problem des Kegels, der an seiner Spitze durch ein Moment M belastet ist (Abb. 8). Das Momentengleichgewicht der Krustenschale verlangt

$$2\pi\,(r^2\,S_{22} + r\,F_{23}) + M = 0\,. \tag{7,9}$$

Bei $\alpha = \pi/2$ berechnet sich der Randwert der Spannungsfunktion aus (7,9) zu

$$F_{23} = -\frac{M}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,, \qquad G = -\frac{M}{4\pi}\ln r\,, \tag{7,10}$$

wodurch wir auf die Lösung

$$G = -\frac{M}{4\pi}\ln\left(\sqrt{r^2 + z^2} - z\right) \tag{7,11}$$

geführt werden. Da nun die in (7,9) auftretenden Größen $r\,\frac{\partial G}{\partial r}$ und $r^2\,\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}$ homogen nullter Ordnung sind, bekommt man mit dem modifizierten Ansatz

$$G = -c\ln\left(\sqrt{r^2 + z^2} - z\right) \tag{7,12}$$

die Lösung[1] für beliebige α:

$$c = \frac{M}{2\pi}\,\frac{1}{2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha}\,. \tag{7,13}$$

8. Axiale Symmetrie. Nach Abschnitt 6 haben wir die Spannungsfunktionen

$$F_{11} = F_{22} = F = \Theta - \Theta_{xx} + \Omega\,, \tag{8,1}$$

$$F_{33} = \Theta_{33} - \Theta_{xx} + \Omega\,, \tag{8,2}$$

$$F_{13} = \Theta_{13}\,, \tag{8,3}$$

wobei Θ und Θ_{33} harmonisch sind und Θ_{13} nach (6,3) der Potentialgleichung

$$\Delta\Theta_{13} - \frac{1}{r^2}\,\Theta_{13} = 0 \tag{8,4}$$

zu genügen hat.

Den Gleichungen (4,5), (4,10), (4,12) und (4,17) entnehmen wir

$$\left.\begin{aligned} S_{21} &= -\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{F_{13}}{r}\,; & S_{32} &= -\frac{\partial F_{33}}{\partial r} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z}\,,\\ S_{12} &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r}\,; & S_{23} &= \frac{\partial F}{\partial r}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8,5}$$

Die restlichen S_{ik} sind Null.

Nun betrachten wir wieder das Kräftegleichgewicht an der Krustenschale. Die Gleichgewichtsbedingung für die z-Richtung entnimmt man Abb. 9:

$$\frac{d}{ds}\,(r\,S_{23}) + r\,P_3 = 0\,, \tag{8,6}$$

die für die radiale Richtung der Abb. 10:

$$\frac{d}{ds}\,(r\,S_{21}) + S_{12}\,\frac{dr}{ds} + S_{32}\,\frac{dz}{ds} + r\,P_1 = 0\,. \tag{8,7}$$

Die Krustenschale unseres Umdrehungskörpers haben wir approximiert durch Krustenschalen der Koordinatenflächen $r = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$ mit den infinitesimalen Stufen dr und dz.

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953, S. 338.

In Θ, Θ_{33} und Θ_{13} stehen 3 Funktionen zur Verfügung, um die 2 Randbedingungen (8,6) und (8,7) zu erfüllen. Diesen Überfluß wird man gerne benutzen, um noch einmal das ganze Formelsystem zu vereinfachen. Dann liegt es nahe, wegen der etwas unbequemen Differentialgleichung (8,4) und der Möglichkeit, (8,5) zu vereinfachen, auf Θ_{13} zu verzichten, also

$$\Theta_{13} = 0 \qquad (8{,}8)$$

zu setzen. Eine andere Vereinfachung wäre, $\Theta_{33} = \Theta$ zu setzen und Θ_{13} beizubehalten. Und schließlich könnte man daran denken, Θ_{33} und Θ_{13} aneinander zu binden, etwa dadurch,

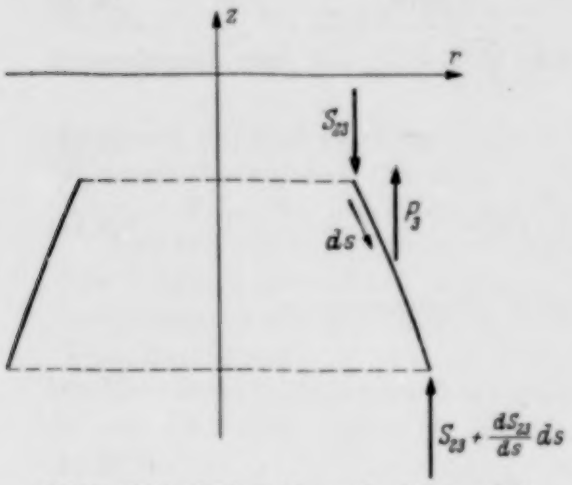


Abb. 9. Kräftegleichgewicht an der Krustenschale in z-Richtung.

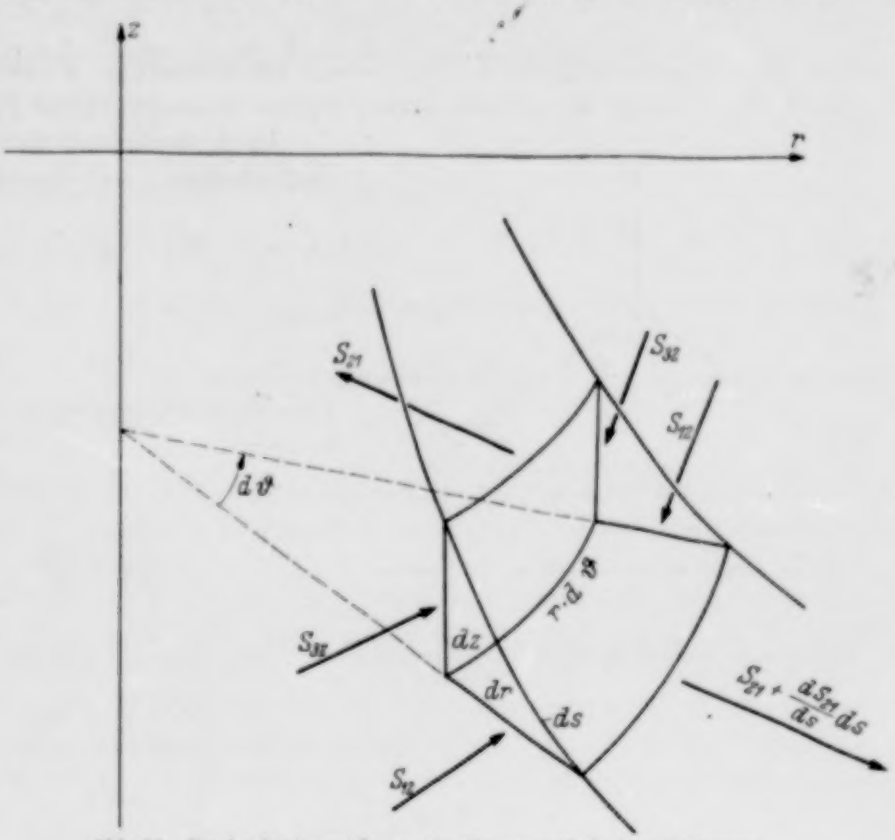


Abb. 10. Kräftegleichgewicht an der Krustenschale in r-Richtung.

daß man sie als die z- bzw. r-Ableitung einer harmonischen Funktion darstellt. Auf die Problematik solcher Vereinfachungen kommen wir noch im Schlußkapitel zu sprechen.

Beim Problem von *Boussinesq*, Einzelkraft K auf Halbraum $z \leqq 0$, empfiehlt sich (8,8). Für Ω benutzen wir die Partikularlösung

$$\Omega = \Theta_{xx} + \frac{1}{2(1-\nu)} z \frac{\partial}{\partial z} (\Theta_{33} - \Theta) . \qquad (8{,}9)$$

Die beiden Randbedingungen (8,6) und (8,7) auf $z = 0$ lauten, wenn man noch (8,5) beachtet,

$$r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{K}{2\pi} = 0 , \qquad (8{,}10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 . \qquad (8{,}11)$$

Wegen (8,1) und (8,9) folgt aus (8,10)

$$\Theta = -\frac{K}{2\pi} \ln r \qquad (8{,}12)$$

auf $z = 0$. (8,11) verlangt auf $z = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Theta_{33} - \Theta) = 0 . \qquad (8{,}13)$$

Da in dieser Gleichung nur harmonische Funktionen auftreten, folgt aus ihr in bekannter Schlußweise

$$\Theta_{33} = -(1 - 2\nu)\, \Theta \qquad (8{,}14)$$

im ganzen Halbraum $z \leqq 0$.

(8,1) und (8,2) lauten jetzt

$$F_{11} = F_{22} = F = \Theta - z \frac{\partial \Theta}{\partial z} , \qquad (8{,}15)$$

$$F_{33} = -(1 - 2\nu)\, \Theta - z \frac{\partial \Theta}{\partial z} . \qquad (8{,}16)$$

Und die harmonische Funktion Θ, die auf $z = 0$ die Randwerte (8,12) besitzt und in $z < 0$ regulär ist, lautet

$$\Theta = -\frac{K}{2\pi} \ln \left(\sqrt{r^2 + z^2} - z \right) . \tag{8,17}$$

Die Homogenitätseigenschaften dieser harmonischen Funktion gestatten es wiederum, daß man rasch die Lösung für den an seiner Spitze beanspruchten Kegel (Abb. 11) gewinnen kann[1].

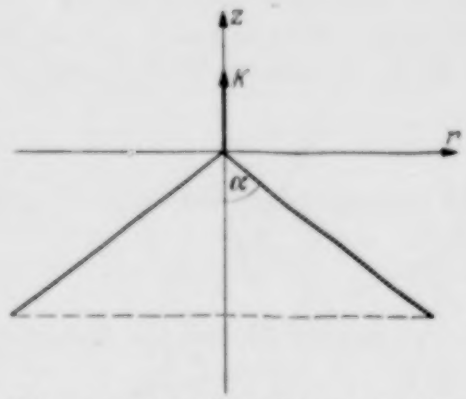


Abb. 11. Kegel mit Einzelkraft an der Spitze.

In Abänderung von (8,14) und (8,17) setzen wir — unter Beibehaltung der Partikularlösung (8,9) —

$$\Theta = -a \frac{K}{2\pi} \ln \left(\sqrt{r^2 + z^2} - z \right) \tag{8,18}$$

und

$$\Theta_{33} = -b\,(1 - 2\nu)\,\Theta . \tag{8,19}$$

Die Randbedingungen (8,6) und (8,7) auf dem Kegelmantel lauten

$$r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{K}{2\pi} = 0 , \tag{8,20}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(r \frac{\partial F}{\partial z} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \sin\alpha + \frac{\partial F_{33}}{\partial r} \cos\alpha = 0 . \tag{8,21}$$

Die Konstanten a und b bestimmen sich aus diesen zwei linearen Gleichungen zu

$$a = \frac{1 - (1 - 2\nu)\cos\alpha}{(1 - \cos^3\alpha) - (1 - 2\nu)\cos\alpha\,(1 - \cos\alpha)} , \tag{8,22}$$

$$b = \frac{1 + \cos\alpha}{(1 - \cos^3\alpha) - (1 - 2\nu)\cos\alpha\,(1 - \cos\alpha)} . \tag{8,23}$$

9. Die Integralsätze von Peretti auf der Krustenschale. Die in (2,9) und (2,10) stehenden Rotorbildungen legen die Anwendung des Satzes von *Stokes* nahe.

Die Summe X_k aller Kräfte, die an einem Teil 0 der Oberfläche des belasteten Körpers angreifen,

$$X_k = \int_0 \sigma_{ik}\, \nu_i \, df \tag{9,1}$$

(ν_i ist der nach außen gerichtete Vektor der Flächennormalen) läßt sich nach (2,9) ausdrücken durch ein Linienintegral über die Berandung C von 0

$$\oint_C S_{lk}\, dx_l + X_k = 0 . \tag{9,2}$$

Für die Momentensumme der Belastung von 0, bezogen auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems, gilt

$$M_k^{(0)} = \int_0 m_{ik}\, \nu_i \, df + \int_0 \varepsilon_{k\alpha\beta}\, x_\alpha\, \sigma_{\lambda\beta}\, \nu_\lambda \, df . \tag{9,3}$$

Setzen wir (2,9) und (2,10) ein und wenden wiederum den Satz von *Stokes* an, so folgt

$$\oint_C (F_{lk} + \varepsilon_{k\alpha\beta}\, x_\alpha\, S_{l\beta})\, dx_l + M_k^{(0)} = 0 . \tag{9,4}$$

Die beiden Integralsätze (9,2) und (9,4) wurden von *Peretti*[2] aufgestellt. *W. Günther*[3] hat sie in allgemeinen Koordinaten formuliert.

Die statische Deutung liegt auf der Hand. Den betrachteten Teil 0 der Körperfläche haben wir uns als Teil der Krustenschale vorzustellen, begrenzt durch die Randkurve C. Die am Bogenelement von C vorhandenen Schnittreaktionen

$$S_k\, ds = S_{lk}\, dx_l ; \qquad F_k\, ds = F_{lk}\, dx_l \tag{9,5}$$

halten der am Teile 0 der Krustenschale angreifenden Belastung das Gleichgewicht.

---

[1] *J. H. Michell*, Proc. Lond. Math. Soc. 32 (1900), S. 23.
[2] Siehe Fußnote 3 von S. 292.
[3] *W. Günther*, Abh. Braunschwg. Wissensch. Ges. 6 (1954), S. 207—219; 10 (1958), S. 195—213.

Ist keine Belastung vorhanden, dann sind die Integranden in (9,2) und (9,4) totale Differentiale, und die S_{ik} und F_{ik} Nullspannungsfunktionen (2,17). Auch bei Belastungssingularitäten müssen sich die S_{ik} und F_{ik} als Nullspannungsfunktionen darstellen lassen; allerdings sind diese dann mit Singularitäten behaftet.

Für das Beispiel des Abschnittes 3 sieht diese Darstellung folgendermaßen aus.

$$-\psi_i = K_i \operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1} = K_i \varphi\,, \tag{9,6}$$

$$-\Psi_1 = (M_1 - x_2 K_3)\varphi + (M_2 + x_1 K_3) \ln r\,, \tag{9,7}$$

$$-\Psi_2 = (M_2 + x_1 K_3)\varphi - (M_1 - x_2 K_3) \ln r\,, \tag{9,8}$$

$$-\Psi_3 = (M_3 - x_1 K_2 + x_2 K_1)\varphi - (x_1 K_1 + x_2 K_2) \ln r\,. \tag{9,9}$$

Wegen $F_{11} = F_{22}$ (3,19) und $F_{12} = F_{21} = 0$ (3,20) bestehen zwischen Ψ_1 und Ψ_2 die Gleichungen

$$\partial_1 \Psi_1 - \partial_2 \Psi_2 = 0\,; \qquad \partial_1 \Psi_2 + \partial_2 \Psi_1 = 0\,. \tag{9,10}$$

Demnach hat man (9,7) und (9,8) aus den komplexen Funktionen $\ln z$ und $z \ln z$ aufzubauen. Auch Ψ_3 wurde harmonisch gewählt. Wesentlich sind die Faktoren von φ in (9,7) bis (9,9). Sie geben auf $x_3 = 0$ das Momentenfeld der Lastsingularität[1].

Man erinnert sich, daß es bei der üblichen Behandlung des Problems von *Boussinesq* und *Cerruti* zum Schlusse erforderlich wird, den Betrag der Belastungssingularität durch Integration über die Spannungen auf einer Halbkugelfläche zu berechnen. Die Integralsätze von *Peretti* ermöglichen diese Bestimmung bereits bei Kenntnis der Randwerte der Spannungsfunktionen. Unsere integrablen Randbedingungen (7,4) und (8,6) sind als einfache Sonderfälle von (9,4) bzw. (9,2) anzusehen. In beiden Fällen ist der geschlossene Integrationsweg C ein Breitenkreis des Rotationskörpers.

10. Schlußbetrachtung und Ausblick. Der erste Ansatz für Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums stammt von *Maxwell* (1870). Es wurde 1892 von *Morera* und *Beltrami* verallgemeinert[2]. In seinem Handbuchartikel aus dem Jahre 1928[3] schreibt *Trefftz*: „Für die rechnerische Durchführung bei besonderen Aufgaben ist diese Methode bisher noch nicht verwendet worden."

Soweit ich habe feststellen können, sind die erst kürzlich erschienenen Arbeiten von *G. Allen*[4] und *Knops*[5] die ersten, die sich des *Maxwell*schen Ansatzes zur Lösung räumlicher Probleme des elastischen Körpers bedienen. Allerdings wird dort der Frage der Randbedingungen keine besondere Beachtung geschenkt. Auf einem ganz neuen Gebiete, das nicht mehr zur klassischen Elastizitätstheorie zu rechnen ist, der Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, haben die Spannungsfunktionen inzwischen eine hervorragende Bedeutung erlangt. Wie *E. Kröner*[6] ausführt, sind im Falle dreidimensional verteilter Versetzungen, wenn also die Deformationen nicht mehr aus einem Verschiebungsfeld ableitbar sind, die Spannungsfunktionen unentbehrlich zur Berechnung der Eigenspannungszustände. Deshalb wird auch die Frage der Randbedingungen als besonders wichtig angesehen.

Die von den Verschiebungen ausgehenden Ansätze von *Papkovitsch* (1932) und *Neuber* (1934) ließen die Frage offen, in welchen Beziehungen sie zu den Spannungsfunktionen von *Maxwell* und *Morera* stehen. Diese Zusammenhänge wurden 1953 von *Schaefer*[7] und 1955 von *Marguerre*[8] klargelegt.

Wer einmal die Lösungsmethoden der dreidimensionalen Elastizitätstheorie durchdacht hat, muß es als einen — zumindest didaktischen — Mangel empfinden, wenn man sich die Randbedingungen an einer Oberfläche, auf der die Kräfte gegeben sind, auf dem Umwege über die Verschiebungen verschaffen muß. Als einen ersten Versuch, diese Lücke auszufüllen, möge die vorliegende Arbeit gewertet werden.

---

[1] *H. Schaefer*, Abh. Braunschwg. Wissensch. Ges. 7 (1955), S. 107—112.
[2] Siehe Fußnote 1 von S. 296.
[3] *E. Trefftz*, Mathematische Elastizitätstheorie, Handbuch d. Physik, Bd. VI, Berlin 1928.
[4] *G. Allen* und *S. C. R. Dennis*, Journ. Mech. and Appl. Math. 11 (1958), S. 172—184.
[5] *R. J. Knops*, Journ. Mech. and Appl. Math. 11 (1958), S. 326—350.
[6] Siehe Fußnote 2 von S. 291.
[7] Siehe Fußnote 1 von S. 291.
[8] Siehe Fußnote 3 von S. 291.

Was noch zu untersuchen bleibt, ist die Rolle der Nullspannungsfunktionen bei Körpern mit Hohlräumen und bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Die Forderung nach Freiheit von Eigenspannungszuständen legt den Spannungsfunktionen zusätzliche Randbedingungen auf, vermutlich 6 Bedingungen an jeder Oberfläche, entsprechend den 6 Nullspannungsfunktionen. Es handelt sich also um die Festlegung der Eigenspannungszustände auf den Krustenschalen des Körpers.

Im Laufe der vorstehenden Untersuchungen haben wir den Potentialfunktionen Θ_{ik}, aus denen sich die Spannungsfunktionen zusammensetzen, eine Reihe von Bedingungen auferlegt. Ob diese Bedingungen immer statthaft sind, mag mit der Frage nach Festlegung der Nullspannungsfunktionen zusammenhängen. Auch die Untersuchungen von *Eubanks* und *Sternberg*[1] über die Vollständigkeit des *Papkovitsch-Neuber*schen Ansatzes führen auf topologische Kriterien.

(Eingegangen am 5. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *Hermann Schaefer*, Braunschweig, Bernerstr. 9.

[1] *R. A. Eubanks* und *E. Sternberg*, Journ. Rat. Mech. Analysis 5 (1956), S. 735—746.

Abstoßende Wirkung von Wänden in reibungslosen Scherströmungen

Von F. Schultz-Grunow

Es handelt sich darum, die Strömung um ein in einer Strömung suspendiertes Teilchen, das in Wandnähe mitschwimmt, und dann die Druckwirkung auf dieses Teilchen zu ermitteln.[1] Es werde zunächst der ebene Fall mit einem Teilchen kreisförmigen Querschnitts behandelt. Die Bedingung des Verschwindens der Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Wand wird durch Spiegelung erfüllt (Abb. 1). Es muß also die Umströmung zweier Zylinder ermittelt werden. Dazu wird das rechtwinklige Koordinatensystem x, y mit dem Nullpunkt im Zylindermittelpunkt, und mit der x-Achse in die Strömungsrichtung weisend und der y-Achse von der Wand wegweisend, eingeführt, ferner werden die beiden Polarkoordinaten-Systeme ϱ, ϑ am oberen, wirklichen und r, Θ am unteren, gespiegelten Zylinder mit ihren Nullpunkten in den Zylindermittelpunkten gebraucht. Es wird eine lineare Scherströmung der Geschwindigkeit U vorausgesetzt (Abb. 1). Da das Teilchen mit der Hauptströmung schwimmen soll, ist die Geschwindigkeit U auf der x-Achse Null, so daß, wenn U_0 der Geschwindigkeitsbetrag am obersten und untersten Punkt des Zylinderumfanges und c der Zylinderhalbmesser ist,

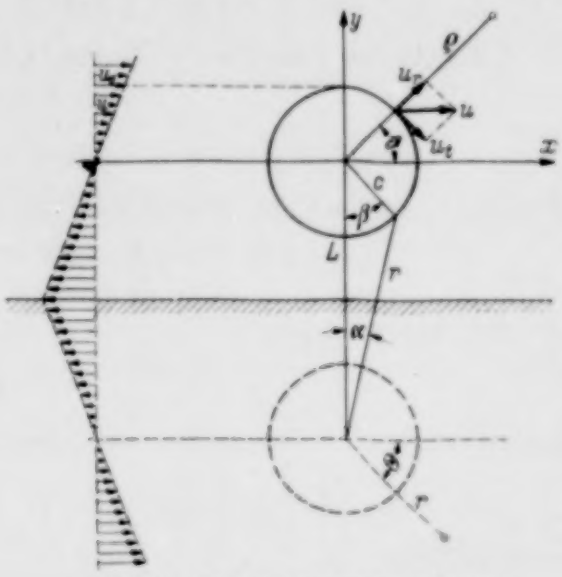


Abb. 1. An der Wand gespiegelter Zylinder in einer Scherströmung.

$$U = U_0 \frac{y}{c}$$

besteht. Am Zylinderumfang ($\varrho = c$) ist wegen $y = c \sin \vartheta$

$$U = U_0 \sin \vartheta$$

und die Radialkomponente

$$U_r = U_0 \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{U_0}{2} \sin 2\,\vartheta\,. \qquad (1)$$

Am Zylinderumfang muß aber die Radialkomponente verschwinden, was durch Überlagerung eines Geschwindigkeitsfeldes erreicht wird, das am Zylinderumfang die Radialgeschwindigkeit $-U_r$ hat. Wegen der vorausgesetzten Reibungslosigkeit der Flüssigkeit ist diese Strömung eine Potentialströmung. Die hier in Frage kommende Potentialströmung hat die Stromfunktion

$$\psi_o = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\varrho^n} \cos n\,\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\varrho^n} \sin n\,\vartheta\,, \qquad (2)$$

wo sich Index o auf den oberen Zylinder bezieht. Entsprechend wird am unteren Zylinder

$$\psi_u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r^n} \cos n\,\Theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^n} \sin n\,\vartheta$$

verwendet.

Durch Überlagerung der Stromfunktionen

$$\psi_{1o} = E \frac{\cos 2\,\vartheta}{\varrho^2}\,; \quad \text{bzw.} \quad \psi_{1u} = E \frac{\cos 2\,\Theta}{r^2}\,, \qquad (3)$$

mit einer noch zu ermittelnden Konstante E kann für jeden Zylinder für sich allein die Bedingung, daß die Radialgeschwindigkeit Null ist, erfüllt werden. Beispielsweise gehört am oberen Zylinderrand zu der Stromfunktion ψ_{1o} die Radialgeschwindigkeit

$$u_r = \frac{\partial \psi_{1o}}{\varrho\, d\vartheta} = -\frac{E}{\varrho^3}\, 2 \sin 2\,\vartheta\,. \qquad (4)$$

Der Vergleich mit (1) zeigt, daß die Konstante E den Wert

$$E = \frac{U_0}{4}\, c^3 \qquad (5)$$

[1] s. a. *F. Schultz-Grunow*, Rheol. Acta 1 (1958), S. 289—296.

haben muß, wenn die Randbedingung erfüllt sein soll. Gleiches gilt selbstverständlich für den unteren Zylinder.

Nun ergibt jede der beiden Stromfunktionen am anderen Zylinder Geschwindigkeiten, die dessen Randbedingungen nicht erfüllen. Statt aber die Geschwindigkeiten zu betrachten, genügt es von jetzt ab die Stromfunktionen zu betrachten, denn an die Stelle der Aussage, daß am Zylinderumfang die Radialgeschwindigkeit Null sein muß, kann auch die treten, daß jeder Zylinder Stromlinie ist und infolgedessen die Stromfunktion an den Zylinderrändern konstante Werte besitzen muß. Die Stromfunktion des anderen Zylinders stört den konstanten Wert, so daß eine weitere Stromfunktion an jedem Zylinder zu überlagern ist, die diese Störung eliminiert. Aber die am einen Zylinder überlagerte Stromfunktion stört wiederum den konstanten Wert am anderen Zylinder, so daß eine weitere Stromfunktion an jedem Zylinder zu überlagern ist, usw. Dieses Verfahren der zukzessiven Überlagerung konvergiert, d. h. die Störung der Randbedingung wird immer geringer, weil nach (2) die einzelnen Stromfunktionen mit dem Radius abnehmen.

Zuerst wird die am unteren Zylinder überlagerte Stromfunktion $\psi_{I\,u}$ am oberen Zylinderumfang berechnet. Nach Abb. 1 hat man die geometrischen Beziehungen für den oberen Zylinderrand

$$c \sin\beta = r \sin\alpha\,; \quad c\cos\beta + r\cos\alpha = L; \quad r^2 = L^2 + c^2 - 2\,L\,c\cos\beta\,,$$

wo L der Abstand beider Zylindermittelpunkte ist. Mit

$$\beta = \vartheta - 270^\circ; \quad \alpha = \Theta - 270^\circ$$

wird

$$c\cos\vartheta = r\cos\Theta\,; \quad c\sin\vartheta + r\sin\Theta = -L; \quad r^2 = L^2 + c^2 + 2\,L\,c\sin\vartheta\,. \tag{6}$$

Hiermit ergibt sich am oberen Zylinderrand

$$\frac{\cos 2\,\Theta}{r^2} = \frac{\cos^2\Theta - \sin^2\Theta}{r^2} = \frac{L^2}{(L^2+c^2)^2}\cdot\frac{a^2 - 1 - 2\,a\sin\vartheta - 2\,a^2\sin^2\vartheta}{(1 + d\sin\vartheta)^2} \tag{7}$$

mit den Abkürzungen

$$a = \frac{c}{L}\,; \qquad d = \frac{2\,L\,c}{L^2 + c^2}\,. \tag{8}$$

Außerdem werden für die einzelnen Summanden in (7) die Abkürzungen

$$\mathrm{I} = \frac{1}{(1 + d\sin\vartheta)^2}\,; \qquad \mathrm{II} = \frac{\sin\vartheta}{(1 + d\sin\vartheta)^2}\,; \qquad \mathrm{III} = \frac{\sin^2\vartheta}{(1 + d\sin\vartheta)^2} \tag{9}$$

eingeführt.

Ferner sei für die spätere Verwendung $\sin\Theta/r$ am oberen Zylinderrand errechnet. Mit (6) wird

$$\frac{\sin\Theta}{r} = -\frac{L}{L^2 + c^2}\left(\frac{1}{1 + d\sin\vartheta} + \frac{a\sin\vartheta}{1 + d\sin\vartheta}\right). \tag{10}$$

Zur Abkürzung wird eingeführt

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{1 + d\sin\vartheta}\,; \qquad \mathrm{V} = \frac{\sin\vartheta}{1 + d\sin\vartheta}\,. \tag{11}$$

Die Ausdrücke (9), (11) werden in *Fourier*reihen entwickelt:

$$\mathrm{I} = a_{2\,\mathrm{I}}\cos 2\,\vartheta + \cdots + b_{1\,\mathrm{I}}\sin\vartheta + \cdots \tag{10a}$$

$$\mathrm{II} = a_{2\,\mathrm{II}}\cos 2\,\vartheta + \cdots + b_{1\,\mathrm{II}}\sin\vartheta + \cdots \tag{10b}$$

$$\mathrm{III} = a_{2\,\mathrm{III}}\cos 2\,\vartheta + \cdots + b_{1\,\mathrm{III}}\sin\vartheta + \cdots \tag{10c}$$

$$\mathrm{IV} = a_{2\,\mathrm{IV}}\cos 2\,\vartheta + \cdots + b_{1\,\mathrm{IV}}\sin\vartheta + \cdots \tag{11a}$$

$$\mathrm{V} = a_{2\,\mathrm{V}}\cos 2\,\vartheta + \cdots + b_{1\,\mathrm{V}}\sin\vartheta + \cdots. \tag{11b}$$

Für die Koeffizienten werden, wenn noch

$$\varepsilon^2 = \frac{1 - d}{1 + d}$$

eingeführt wird, die folgenden Ausdrücke gefunden

$$a_{2\,\mathrm{I}} = -\frac{1 + \varepsilon^2}{(1 + d)^2\,\varepsilon^3} + \frac{4}{d^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - d^2}} - 1\right), \tag{12a}$$

$$b_{1\,\mathrm{I}} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{(1 + d)^2\,\varepsilon^3}, \tag{12b}$$

$$a_{2\,\mathrm{II}} = \frac{1 - \varepsilon^2}{(1 + d)^2\,\varepsilon^3} + 8\,\frac{\varepsilon^6 - 4\,\varepsilon^5 + 5\,\varepsilon^4 - 5\,\varepsilon^2 + 4\,\varepsilon - 1}{(1 + d)^2\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon^2)^4}, \tag{13a}$$

$$b_{1\,\mathrm{II}} = \frac{1 + \varepsilon^2}{(1 + d)^2\,\varepsilon^3} + \frac{2}{d^2} - \frac{2}{d^2\sqrt{1 - d^2}}, \tag{13b}$$

$$a_{2\,\mathrm{III}} = -\frac{1+\varepsilon^2}{(1+d)^2\,\varepsilon^3} - \frac{6}{d^2} + \frac{6}{d^2\sqrt{1-d^2}} - \frac{24}{(1+d)^2}\cdot\frac{-\varepsilon^8+4\varepsilon^7-4\varepsilon^6-4\varepsilon^5+10\varepsilon^4-4\varepsilon^3-4\varepsilon^2+4\varepsilon-1}{-15\varepsilon^8-15\varepsilon^4+6\varepsilon^2+6\varepsilon^{10}+20\varepsilon^6-\varepsilon^{12}-1}, \tag{14a}$$

$$b_{1\,\mathrm{III}} = \frac{1}{(1+d)^2}\left[\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^3} - \frac{4}{\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)^4}(\varepsilon^6-4\varepsilon^5+5\varepsilon^4-5\varepsilon^2+4\varepsilon-1)\right], \tag{14b}$$

$$a_{2\,\mathrm{IV}} = \frac{2}{\sqrt{1-d^2}} - 4\,\frac{(\varepsilon^2+1)(1-\varepsilon)^2}{(1+d)\,\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)^2}, \tag{15a}$$

$$b_{1\,\mathrm{IV}} = \frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\right), \tag{15b}$$

$$a_{2\,\mathrm{V}} = -\frac{4}{(1+d)\,\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)^3}(-\varepsilon^6+3\varepsilon^5-3\varepsilon^4+2\varepsilon^3-3\varepsilon^2+3\varepsilon-1) + \frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\right), \tag{16a}$$

$$b_{1\,\mathrm{V}} = 2\,\frac{(\varepsilon^3+1)(1-\varepsilon)^2}{(1+d)\,\varepsilon\,(1-\varepsilon^2)^2}. \tag{16b}$$

Es ergeben sich so die Reihenentwicklungen

$$\frac{\cos 2\,\Theta}{r^2} = A'\cos 2\,\vartheta + \cdots B'\sin\vartheta + \cdots, \tag{17a}$$

$$\frac{\sin\Theta}{r} = A''\cos 2\,\vartheta + \cdots B''\sin\vartheta + \cdots, \tag{17b}$$

mit den Konstanten

$$A' = \frac{L^2}{(L^2+c^2)^2}\left[(a^2-1)\,a_{2\,\mathrm{I}} - 2\,a\cdot a_{2\,\mathrm{II}} - 2\,a^2\,a_{2\,\mathrm{III}}\right], \tag{18a}$$

$$B' = \frac{L^2}{(L^2+c^2)}\left[(a^2-1)\,b_{1\,\mathrm{I}} - 2\,a\,b_{1\,\mathrm{II}} - 2\,a^2\,b_{1\,\mathrm{III}}\right], \tag{18b}$$

$$A'' = -\frac{L}{L^2+c^2}\left[a_{2\,\mathrm{IV}} + a\cdot a_{2\,\mathrm{V}}\right], \tag{19a}$$

$$B'' = -\frac{L}{L^2+c^2}\left[b_{1\,\mathrm{IV}} + a\,b_{1\,\mathrm{V}}\right]. \tag{19b}$$

Durch Überlagerung von ψ_{1u} nach (3) entsteht somit am oberen Rand nach (17a)

$$[\psi_{1u}]_{\varrho=c} = [A'\cos 2\,\vartheta + \cdots B'\sin\vartheta + \cdots]\,E,$$

und ebenso durch Überlagern von ψ_{1o} am unteren Zylinderrand

$$[\psi_{1o}]_{r=c} = [A'\cos 2\,\Theta + \cdots B'\sin\Theta + \cdots]\,E.$$

Daher ist nun am unteren Zylinderrand und ganz entsprechend am oberen Zylinderrand (vergl. (2)) die Stromfunktion

$$\psi_{2u} = F_2\,\frac{\cos 2\,\Theta}{r^2} + G_2\,\frac{\sin\Theta}{r}, \tag{20}$$

mit

$$F_2 = -E\,A'\,c^2; \quad G_2 = -E\,B'\,c^2 \tag{21}$$

zu überlagern, durch die nun wieder die Bedingung $\psi = \text{konst.}$ am unteren Rand erfüllt wird, jedoch am oberen Rand mit (17a, b) sich

$$[\psi_{2u}]_{\varrho=c} = F_2\,(A'\cos 2\,\vartheta + B'\sin\vartheta) + G_2\,(A''\cos 2\vartheta + B''\sin\vartheta)$$

ergibt und ebenso am unteren Zylinderrand

$$[\psi_{2o}]_{r=c} = F_2\,(A'\cos 2\,\Theta + B'\sin\Theta) + G_2\,(A''\cos 2\,\Theta + B''\sin\Theta).$$

Deshalb ist jetzt am unteren und ebenso am oberen Zylinderrand

$$\psi_{3u} = F_3\,\frac{\cos 2\,\Theta}{r^2} + G_3\,\frac{\sin\Theta}{r}$$

zu überlagern. Mit

$$F_3 = -(F_2\,A' + G_2\,A'')\,c^2, \quad G_3 = -(F_2\,B' + G_2\,B'')\,c, \tag{22}$$

wodurch sich am oberen Rand

$$[\psi_{3u}]_{\varrho=c} = F_3\,(A'\cos 2\,\vartheta + B'\sin\vartheta) + G_3\,(A''\cos 2\,\vartheta + B''\sin\vartheta)$$

ergibt und ebenso am unteren Rand, usw.

Man erkennt, daß für die i-te überlagerte Stromfunktion

$$F_i = -(F_{i-1} A' + G_{i-1} A'') c^2 ; \quad G_i = -(F_{i-1} B' + G_{i-1} B'') c \tag{23}$$

gilt mit dem niedrigsten Wert $i = 2$, für welchen (21) besteht.

Die zahlenmäßige Auswertung für $L/c = 3$ also für einen Wandabstand des Zylindermittelpunktes, der 50% größer als sein Radius ist, ergibt

$$a = \frac{1}{3} ; \quad d = 0{,}6 ; \quad \varepsilon = 0{,}5 .$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{21} &= -1{,}128500 & b_{11} &= -2{,}343000 \\
a_{2\,\mathrm{II}} &= 1{,}417820 & b_{1\,\mathrm{II}} &= 2{,}530000 \\
a_{2\,\mathrm{III}} &= -1{,}689590 & b_{1\,\mathrm{III}} &= -1{,}880781 \\
a_{2\,\mathrm{IV}} &= -0{,}280000 & b_{1\,\mathrm{IV}} &= -0{,}833000 \\
a_{2\,\mathrm{V}} &= 0{,}462968 & b_{1\,\mathrm{V}} &= 1{,}389000 \\
A' &= \frac{1}{L^2} 0{,}3510864 & B' &= \frac{1}{L^2} 0{,}6596154 \\
A'' &= \frac{1}{L} 0{,}113112 & B'' &= \frac{1}{L} 0{,}3333333 \\
F_2 &= -E \cdot 0{,}0390096 & G_2 &= -\frac{E}{L} 0{,}2198718 \\
F_3 &= E \cdot 0{,}027633 & G_3 &= \frac{E}{L} 0{,}0329378
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Es wird also im Ganzen die Stromfunktion

$$\psi = (E + F_2 + F_3) \frac{\cos 2\vartheta}{\varrho^2} + (G_2 + G_3) \frac{\sin \vartheta}{\varrho} \tag{25}$$

am oberen Zylinder überlagert. Die tangentiale Geschwindigkeit, die am Zylinderrand besteht, setzt sich zusammen aus der Tangentialgeschwindigkeit der Hauptströmung (s. Abb. 1)

$$U_t = -U \sin \vartheta = -U_0 \sin^2 \vartheta \tag{26}$$

und der überlagerten Potentialströmung

$$u_t = -\left[\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right]_{\varrho = c} = 2 (E + F_2 + F_3) \frac{\cos 2\vartheta}{c^3} + (G_2 + G_3) \frac{\sin \vartheta}{c^2} . \tag{27}$$

Mit der *Bernoulli*schen Gleichung ergibt sich, wenn p der statische Druck an einem Ort des Zylinderumfanges und p_0 der Gesamtdruck ist,

$$[p_0 - p]_{\varrho = c} = \frac{\varrho}{2} [U_t + u_t]^2_{\varrho = c} . \tag{28}$$

Die senkrecht zur Wand auf den Zylinder wirkende Druckkraft ist

$$A = \int_0^{2\pi} (p_0 - p) \sin \vartheta \, c \, d\vartheta = \frac{\varrho}{2} \int_0^{2\pi} [U_t + u_t]^2_{\varrho = c} \, c \, d\vartheta . \tag{29}$$

Nach Einführen von (26), (27) und Integration wird

$$A = \frac{\varrho}{2} c \pi \left[-\frac{3}{2} U_0 \frac{G_2 + G_3}{c^2} - 2 \frac{(E + F_2 + F_3)(G_2 + G_3)}{c^5} \right] \tag{30}$$

erhalten. Mit (21, 22) wird

$$A = \frac{\pi E^2}{c^3} (B' - A' B' c^2 - B' B'' c) (8 - 2 A' c^2 + 2 A'^2 c^4 + 2 B' A'' c^3) . \tag{31}$$

Mit den Zahlenwerten (24) des numerischen Beispiels wird

$$A = \frac{\varrho}{2} U_0^2 \, c \, 0{,}097600 . \tag{32}$$

Um sicher zu entscheiden, ob es sich hier um eine Druckkraft handelt, die den Zylinder von der Wand abstößt, oder ihn an die Wand zieht, wird auch getrennt integriert über die wandferne und

wandnahe Hälfte des Zylinders. Die erste Integration ergibt

$$\int_0^{\pi} (p_0 - p) \sin\vartheta \, c \, d\vartheta = \frac{\varrho}{2} \frac{E^2}{c^3} 28{,}72 \tag{33a}$$

und die zweite

$$\int_{\pi}^{2\pi} (p_0 - p) \sin\vartheta \, c \, d\vartheta = -\frac{\varrho}{2} \frac{E^2}{c^3} 27{,}16. \tag{33b}$$

Die Kraft, die aus $-p \cdot \sin\vartheta$ resultiert, ist also an der wandfernen Hälfte eine größere Saugkraft als an der wandnahen Zylinderhälfte, so daß der Zylinder von der Wand abgestoßen wird. (5) in (33a, b) eingeführt, bestätigt sich (32).

Nun werde das räumliche Problem betrachtet. Die Scherströmung sei wiederum eben, jedoch habe der in ihr befindliche Körper quer zur Strömungsrichtung endliche Abmessungen. Um eine Tragflügelwirkung des Körpers auszuschließen, soll er zur Strömungsrichtung symmetrische Querschnittsformen besitzen. Hier besteht nach einem Satz von *G. I. Taylor*[1] die Schwierigkeit, daß die nun räumliche Verdrängungsströmung des Körpers nicht mehr durch Potentialströmungen dargestellt werden kann. Wie später gezeigt wurde[2], hat diese Feststellung ihre Ursache darin, daß Körper, auch wenn ihre Querschnitte symmetrisch zur Hauptströmung sind, alleine wegen ihrer Verdrängungswirkung Zirkulation besitzen und daher gebundene Wirbel darstellen, die sich wegen des ersten *Helmholtz*schen Wirbelsatzes als freie Wirbel in die Strömung fortsetzen.

Durch die Zurückführung des Körpers auf einen gebundenen Wirbel wird die Tragflügeltheorie anwendbar[2], wenn der Körper quer zur Strömungsrichtung langgestreckt ist. Danach wird durch die abgehenden Wirbel nur die Anströmrichtung des Körpers geringfügig geändert. Diese Wirkung ist um so geringer, je näher sich der Körper an einer Wand befindet. Die ebene Verdrängungsströmung, wie sie oben in erster Näherung ermittelt wurde, bleibt erhalten. Daher bleibt auch für langgestreckte Körper die Auftriebsformel (31) gültig. Für einen gedrungenen Körper ändert sich lediglich das Zahlenresultat; auch er wird von der Wand abgestoßen, da auch er Verdrängungswirkung besitzt.

Abb. 2. Versuchsanordnung mit parallel einfallendem Licht. *a* Kanalquerschnitt (1 × 8 cm), *b* Glasplatten, *c'* Schirm, *l* Kanallänge, *h* Schirmabstand im Ort des Brennpunktes, δ Dicke der entmischten Schicht.

Dieses, theoretisch erhaltene Resultat, daß in einer Scherströmung eine Wand auf mitschwimmende Teilchen abstoßend wirkt, konnte auch experimentell bestätigt werden. Dazu strömte eine Lösung von $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ g Polystirol je 100 cm³ Toluol durch einen Kanal rechteckigen Querschnitts mit dem Seitenverhältnis 8:1 (s. Abb. 2). Polystirol ist geeignet, weil seine Moleküle in der Lösung die Form kugelförmiger Knäuel haben. Senkrecht zu der durchsichtigen Schmalseite *b* des Kanals wurde parallel gerichtetes Licht geschickt. Wenn nun durch die abstoßende Wirkung der Breitseiten des Kanals ein Konzentrationsgefälle zu den Wänden hin entsteht, so werden die Lichtstrahlen nach der Kanalmitte gebrochen. Dies geschieht nur in unmittelbarer Wandnähe, also in einer Grenzschicht, da die abstoßende Wirkung der Wand sicher mit zunehmendem Wandabstand stark abnimmt. Daneben wird sich die Konzentration auch deshalb stetig ändern, weil die Moleküle, die mehr am Ende der *Maxwell-Boltzmann*schen Verteilungskurve liegen, weiter zur Wand vordringen. Die Ablenkung ist ähnlich der von *E. Schmidt*[3] in freien Temperaturgrenzschichten beobachteten. Das in Abb. 2 von links in den Kanal *a* einfallende parallele Licht wird in den entmischten Schichten der Dicke δ zur Kanalmitte hin abgelenkt, so daß sich die entmischten Schichten auf dem Schirm *c'* als Schatten abbilden und der Kanal auf dem Schirm am $2\,\delta$ schmaler erscheint, als er es wirklich ist. Die in Abb. 3, 4 wiedergegebenen Schirmbilder ohne und mit strömendem Medium bestätigen dies. An der in Abb. 4 gestrichelt eingetragenen wirklichen Kanalbreite liest man $2\,\delta = 2{,}5$ mm für den nur 10 mm breiten Kanal ab.

In Abb. 4 erkennt man außerdem, daß die Kanalbreite durch Brennlinien deutlich eingerahmt ist ähnlich wie bei *E. Schmidt*. Die Brennlinien waren aber im Gegensatz zu *E. Schmidt* nur in einem bestimmten Schirmabstand *h* (s. Abb. 2) scharf, der sich überdies von der Strömungsgeschwindigkeit abhängig zeigte. Um dies zu erklären, wurde der Strahlengang ermittelt: Bedeutet ϱ den

[1] *G. I. Taylor* Proc. Roy. Soc. 93 (1917), S. 99—113.
[2] *F. Schultz-Grunow*
[3] *E. Schmidt*, Forschung a. d. Gebiet d. Ing.-Wesens, 3 (1932), S. 181—189.

Krümmungsradius des Lichtweges, n den Brechungsexponenten, $\frac{dn}{ds}$ die Komponente des Gradienten des Brechungsexponenten senkrecht zum Lichtweg, so gilt[1]

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{ds}.$$

Wie bei *E. Schmidt* hat die Brennlinie ihren Ursprung in einem gewissen Schirmabstand, sie setzt sich aber nicht beliebig weit fort, da die Verhältnisse andere sind. Einmal ist das Grenzschichtprofil ein anderes und zum andern besteht bei *E. Schmidt* der Grenzfall sehr kleiner Ablenkungen, während hier offenbar größere Ablenkungen vorliegen. Die Abhängigkeit von h von der Strömungsgeschwindigkeit ist in Übereinstimmung mit (32), welche Beziehung eine quadratische Abhängigkeit der wandabstoßenden Kraft von der Strömungsgeschwindigkeit gibt.

Abb. 3. Schirmbild des Kanals bei ruhender Flüssigkeit.

Abb. 4. Schirmbild des Kanals bei strömender Flüssigkeit. Gestrichelt ist die Kanalbreite bei ruhender Flüssigkeit nach Abb. 3 gezeigt. Die Differenz ist die Dicke der entmischten Schichten. $2\,\delta = 2{,}5$ mm.

Abb. 6. Lichtband der Breite f auf Schirm c''', das von den in der entmischten Grenzschicht abgelenkten Lichtstrahlen herrührt.

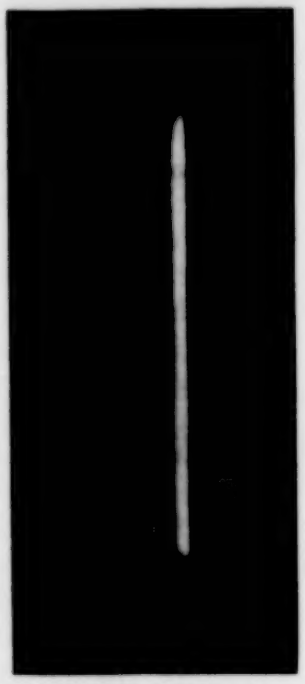


Abb. 7. Am Schirm c'' (s. Abb. 5) auftretende Brennlinie.

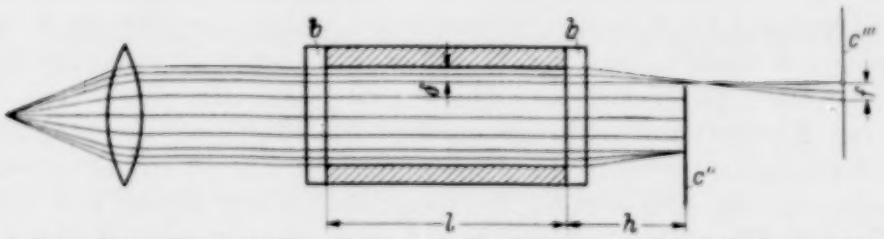


Abb. 5. Versuchsanordnung zur Ermittlung des in der entmischten Schicht abgelenkten Lichtes. Schirm c'' blendet das parallele Licht im Abstand h des Brennpunktes ab. Ablenkung f auf Schirm c'''.

E. Schmidt zeigte ferner, daß das aus der Grenzschicht abgelenkte Licht einen hellen Rahmen um den Grenzschichtschatten bildet und daß aus der Breite dieses Rahmens das Temperaturgefälle an der wärmeabgehenden Wand bestimmt werden kann. Entsprechend wurde hier, wie Abb. 5 zeigt, das parallele Licht durch den Schirm c'' abgeblendet und zwar dort, wo sich die in Abb. 4 gezeigten Brennlinien befinden, so daß auf dem Schirm c' nur das durch die Grenzschicht hindurch getretene Licht erscheint. Das auf diese Weise erhaltene Schirmbild ist in Abb. 6 wiedergegeben, es zeigt ein Lichtband von scharfer Breite f. Zum Vergleich zeigt Abb. 7 ein Schirmbild, wie es unmittelbar hinter dem Schirm c'' aufgenommen wurde, es zeigt also allein die Brennlinie von Abb. 4. Aus der Breite f kann das Konzentrationsgefälle an der Kanalwand ermittelt werden.

(Eingegangen 7. 1. 1959.)

Prof. Dr. sc. techn. *F. Schultz-Grunow*, Lehrstuhl f. Mechanik, Techn. Hochschule Aachen.

[1] Siehe Fußnote 3 von Seite 311.

Behavior of Vehicles Subjected to Wind Gusts

By **A. Slibar** and **P. R. Paslay**

Abstract. This analysis gives the solution for the motion of a fourwheeled, rubber-tired road vehicle subjected to a particular type of gust load. After initially going on a straight forward driving path the car undergoes the action of a wind gust. The forces arising from this sidewise acting wind gust are applied as step functions in time.

The equations of motion, in conjunction with relations expressing the tire behavior, the elastic steering system behavior and a compatibility relation for wheel contact, are derived.

A perturbation procedure is applied to the governing relations and in the solutions the attention is directed to the response of the vehicle in the period of time immediately following the action of the wind gust.

With the resultant solution an illustrative problem of a typical passenger car is given. The numerical results are discussed and shown graphically.

1. Introduction. Considerable attention has been given to the motion of vehicles resulting from various driving conditions. The first analytical approach for predicting the behavior of vehicles was undertaken by *H. Ziegler*[1]. Furthermore, certain problems of automobile motion have been treated by *L. Huber*[2], *O. Dietz* and *R. Harling*[3], *P. Rieckert* and *T. E. Schunck*[4] and more recently by *R. Eberan v. Eberhorst*[5], *W. Kamm*[6], *F. Gauss*[7] and *L. Segel*[8]. The authors have analyzed the motion of automobiles driving through unbanked curves[9] and the susceptibility of the motion of towing vehicles to the reactions of trailers.[10]

Comparison of the analytical results of the above analyses with experiments has shown that in order to predict the performance of a rubber-tired vehicle with sufficient accuracy it is necessary to use proper laws describing the behavior of the tires[3]. The fundamental laws of tire behavior, as proposed by *L. Huber*, have been extensively investigated by *M. Olley*[11] and others.

This analysis is concerned with the prediction of the motion of a vehicle resulting from the action of a wind gust. Prior to the action of the wind gust the vehicle is assumed to be driven along a straight path on a horizontal surface.

2. Statement of Problem. Consider a vehicle traveling on a horizontal surface with a constant forward velocity. In steady state driving it is necessary to overcome the drag forces resulting from the relative velocity between the vehicle and the surrounding air. The drag force in the initial driving condition is assumed to act in the direction of the path. At a certain time, say $t = 0$, the velocity of the surrounding air undergoes an instantaneous change, i. e. a wind gust occurs. It is desired to find the resulting motion of the vehicle, particularly the sidewise motion, due to such a gust load. Since the response time of the average driver[6] is about 1 second, the primary interest in gust load effects will be directed toward the period of time elapsing between the application of the wind gust and the first steering corrections. This means that to arrive at the analytical predictions for this motion the steering wheel must be assumed fixed (i. e. — no steering wheel corrections).

For a complex mechanical system such as a vehicle, in order to make the problem tractable, it is necessary to make a number of simplifying assumptions. In this paper the body of the vehicle

---

[1] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 9 (1938).
[2] *L. Huber*, Dtsche. Kraftfahrtforschung, Berlin, (1940), H. 44.
[3] *O. Dietz* und *R. Harling*, Dtsche. Kraftfahrtforschung, Berlin, (1940), H. 44.
[4] *P. Rieckert* and *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 11 (1940).
[5] *R. Eberan v. Eberhorst*, ATZ 55 (1953).
[6] *W. Kamm*, ATZ 56 (1954).
[7] *F. Gauss*, ATZ 56 (1954).
[8] *L. Segel*, Trans. SAE 65 (1957).
[9] *P. R. Paslay* and *A. Slibar*, Ing.-Arch. 24 (1956).
[10] *P. R. Paslay* and *A. Slibar*, Susceptibility of the Motion of Towing Vehicles to Forces arising from Trailers, to be published.
[11] *M. Olley*, Proc. Inst. of Auto. Engrs., 41 (1946).

is assumed to be rigid and the relative motion between axles and the vehicle body are neglected. We furthermore assume there is no tow-in or camber and that after the wind gust the vehicle continues along a path with constant forward velocity component.

The resulting wind pressure forces acting on the rigid body, in general, can be represented by three orthogonal force components (x, y, z-directions in Fig. 1) and two moment vectors directed

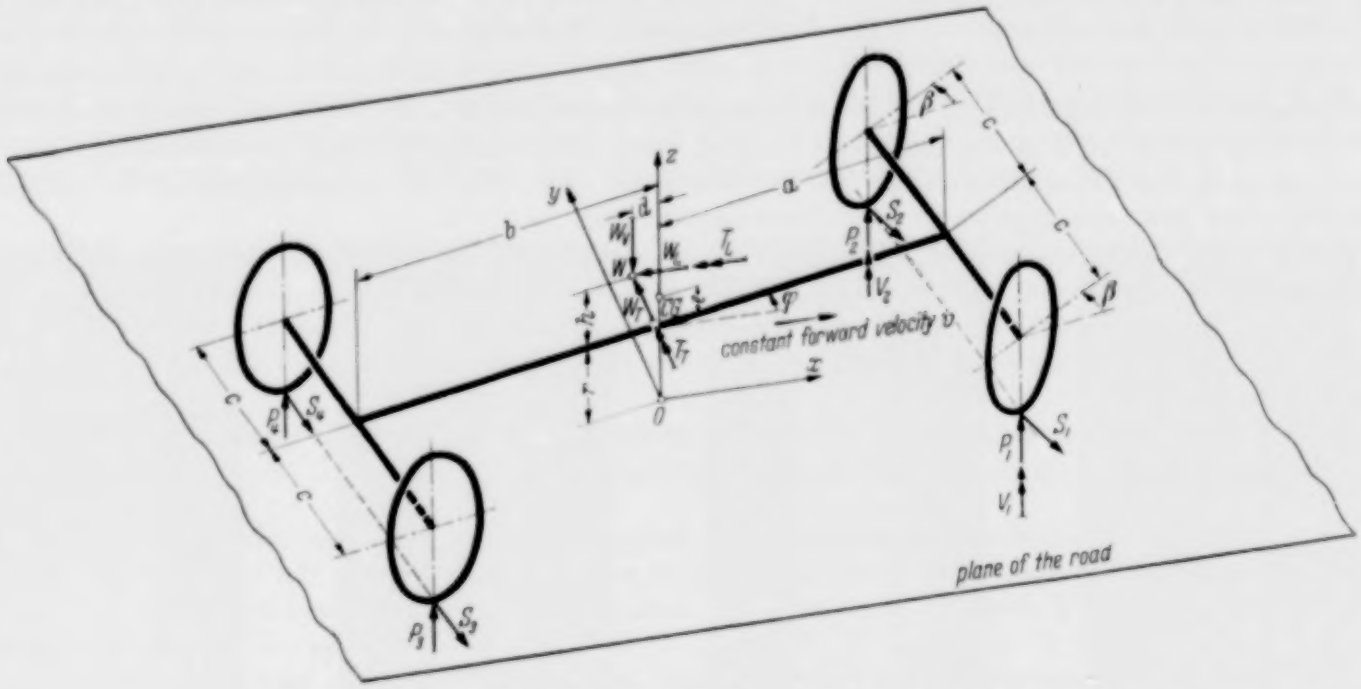


Fig. 1. Sketch of vehicle model showing acting force system and coordinate system.

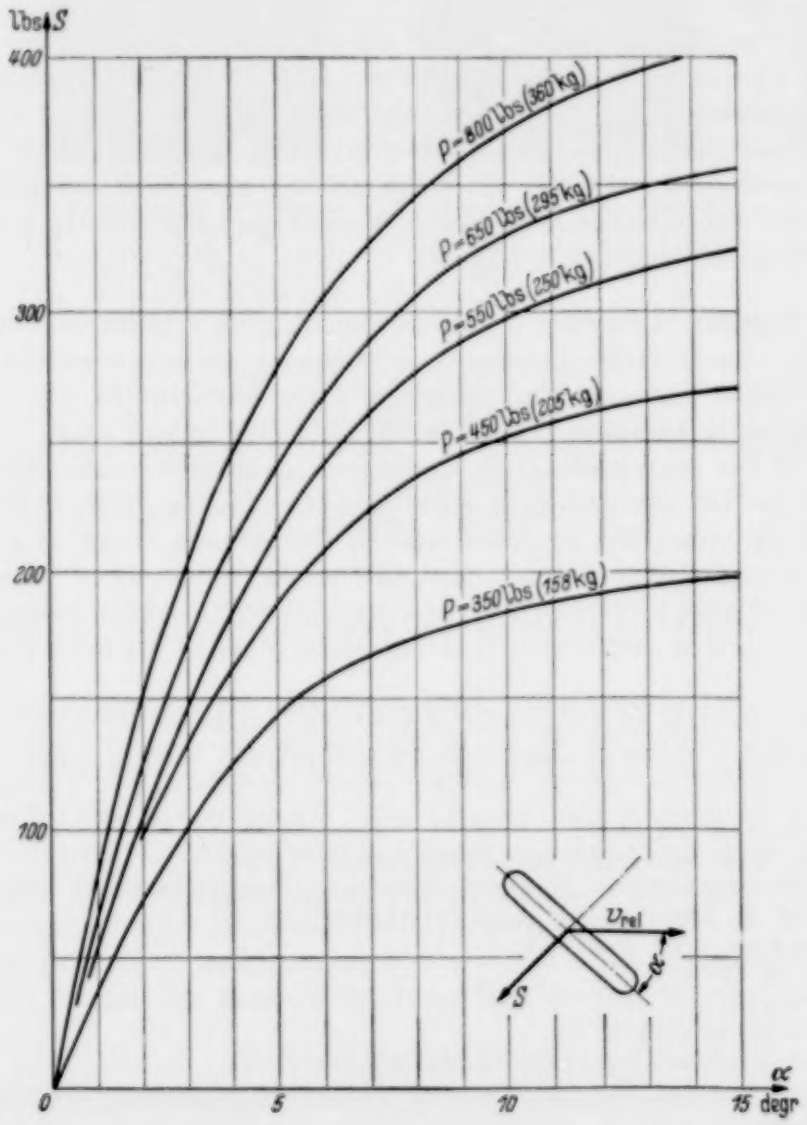


Fig. 2a. The sideforce S as a function of the slip angle α of the wheel for different normal loads, from *L. Huber* [2].

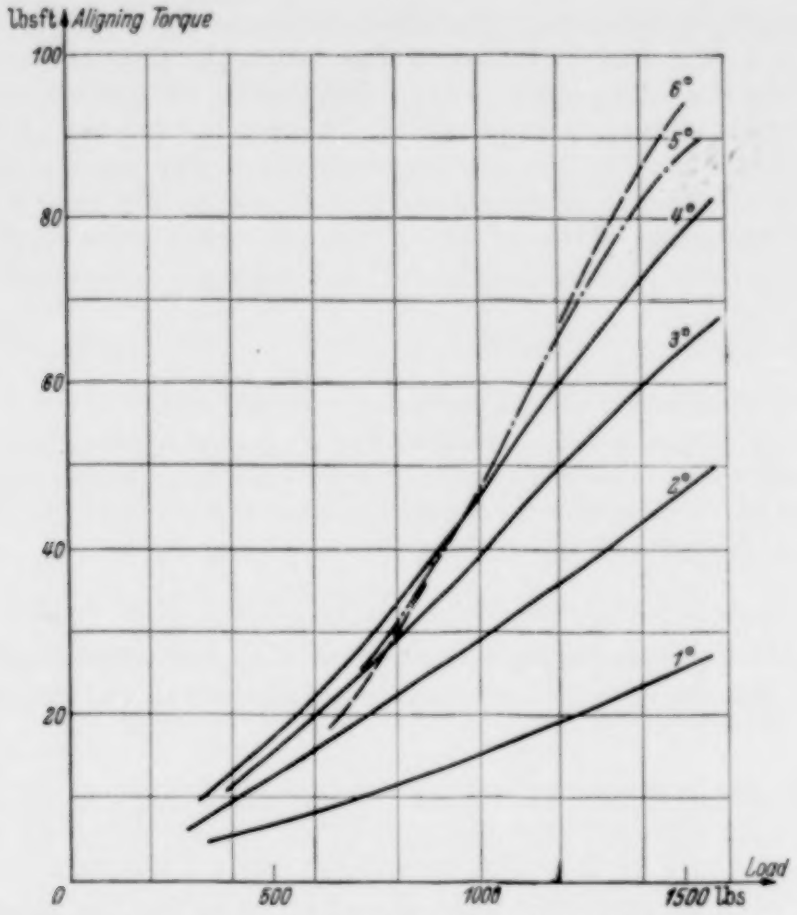


Fig. 2b. The aligning torque V as a function of the normal load for different values of slip angles as parameters, from *M. Olley* [11].

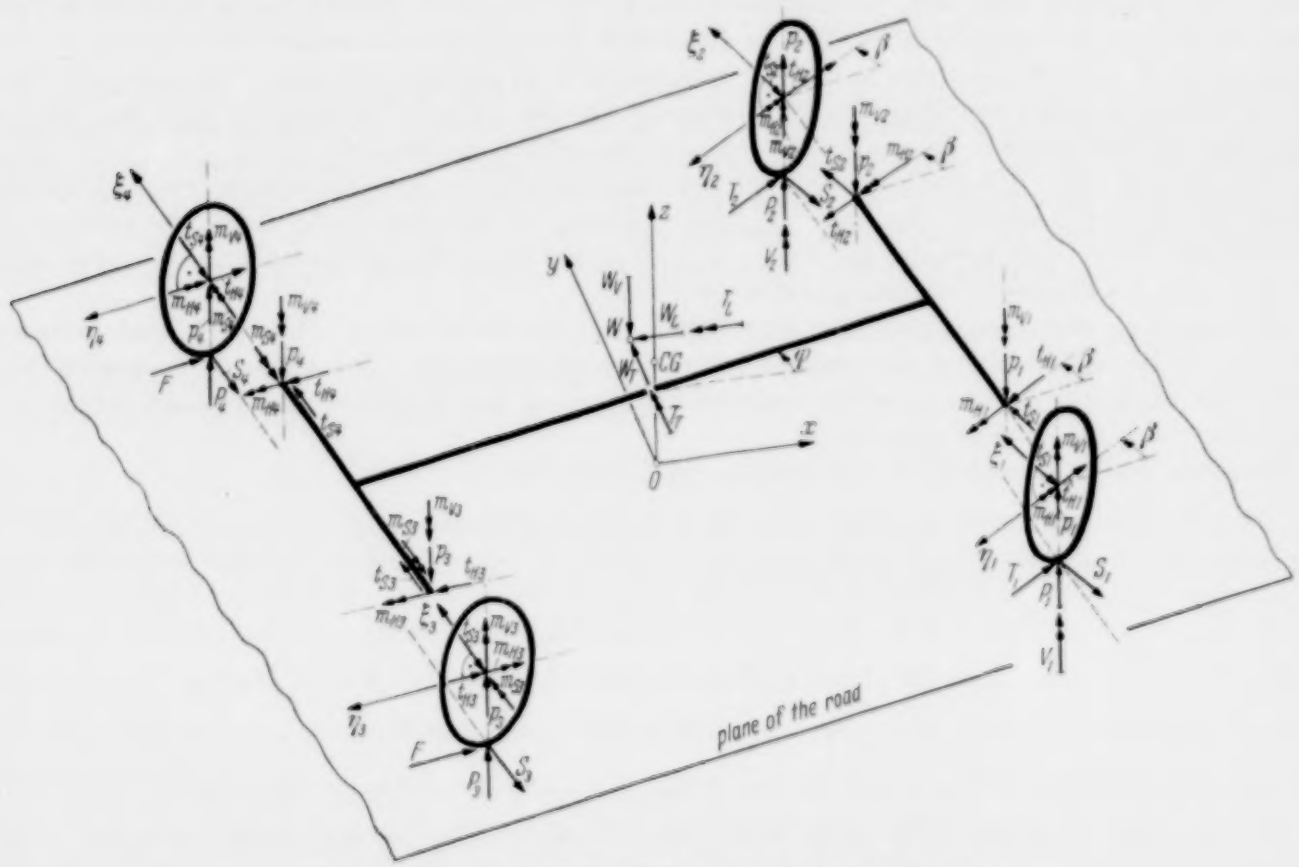


Fig. 3. Free body force diagram of body and wheels of vehicle model.

parallel to the x- and y-axes. The location of the wind force system, W, can be shifted along the longitudinal axis of the body in order to account for possible moments about the z-axis. The wind forces, the geometry and the coordinate directions are shown in Figure 1.

In Figure 1 the forces and moments transmitted from the road to the tires are shown. The interdependence of these forces and moments with the loading and kinematic conditions has been

determined experimentally and can be summarized as follows: If the plane of the tire is perpendicular to the road and a force must be transmitted normal to the plane of the tire then the velocity vector of the axis of the tire with respect to the road must be inclined at an angle (measured in a plane parallel to the road) to the plane of the tire. This angle is defined as the slip angle α. The force transmitted from the road to the tire perpendicular to the plane of the tire is called the sideforce S. This sideforce depends on the normal load P and the slip angle α. To a first approximation this force is independent of the velocity of the axis of the tire with respect to the road.

The sideforce S, as a function of normal load P and slip angle α, for slip angles in the range of interest is

$$S = (\bar{c} - c' P)\, P \alpha\,. \tag{2.1}$$

The constants $\bar{c}$ and c' account for the properties of a specific tire.

In addition to the sideforce, a self aligning torque is created by the shear forces acting in the contact area of tire and road. This self aligning torque may be represented by a vector, V, perpendicular to the plane of the road. For the range of interest of slip angles, the self aligning torque V as a function of normal load P and slip angle α, is

$$V = (\bar{\bar{c}} - c''\ P)\, P \alpha$$

where $\bar{\bar{c}}$ and c'' are constants representing the properties of a specific tire. Typical measured values of sideforce S and self aligning torque V, as a function of slip angle α and normal load P, are shown in Figure 2.

3. Derivation of Governing Equations. Figure 3 is a breakdown of the system showing all forces and moments acting upon the body and wheels. The tire normal forces P_i, the tire sideforces S_i and the wind force component W_L acting in the negative driving direction; and W_V, acting in the negative z-direction — have previously been explained. Also the tire moment components V_i and the wind moment components T_L, acting about the negative driving direction, and T_T, acting about the positive y-direction, — have been discussed. F and T_i are the forces transmitted from the road to the tire tangentially. F represents the driving force necessary for uniform forward velocity, v. T_i is developed due to angular accelerations of the front wheels. The remaining forces t_{Hi}, t_{Si} and p_i are the coupling forces transmitted in the axles. The symbols m_{Vi}, m_{Hi} and m_S represent the components of coupling moments transmitted in the axles.

The mass of the rigid body of the vehicle is denoted by M_B and the mass of each of the four wheels by M_W. I_B denotes the mass moment of inertia of the rigid body about the vertical axis through the center of gravity of the body. I_a and I_d represent the mass moments of inertia about the axle and the diameter of each wheel respectively.

The angle φ, measured as indicated in Figure 1 is the swim angle. The swim angle measures the yaw of the rigid body of the vehicle to the forward direction. The angle, β, measured as indicated in Figure 1, characterizes the relative rotation of the planes of the forward wheels with respect to the rigid body of the vehicle.

The equations of motion for the vehicle rigid body are

$$\begin{aligned}
&-(t_{H1}+t_{H2})\cos(\varphi+\beta)-(t_{S1}+t_{S2})\sin(\varphi+\beta)\\
&\quad-(t_{H3}+t_{H4})\cos\varphi-(t_{S3}+t_{S4})\sin\varphi-W_L=0\,, &(3.1)\\
&-(t_{H1}+t_{H2})\sin(\varphi+\beta)+(t_{S1}+t_{S2})\cos(\varphi+\beta)\\
&\quad-(t_{H3}+t_{H4})\sin\varphi+(t_{S3}+t_{S4})\cos\varphi+W_T=M_B\ddot{y}\,, &(3.2)\\
&-p_1-p_2-p_3-p_4-W_V-M_B g=0\,, &(3.3)\\
&+a(t_{S1}+t_{S2})\cos\beta-c(t_{S1}-t_{S2})\sin\beta-a(t_{H1}+t_{H2})\sin\beta-c(t_{H1}-t_{H2})\cos\beta-b(t_{S3}+t_{S4})\\
&\quad-c(t_{H3}-t_{H4})-dW_T\cos\varphi-dW_L\sin\varphi-m_{V1}-m_{V2}-m_{V3}-m_{V4}=I_B\ddot{\varphi}\,, &(3.4)\\
&c(p_1-p_2+p_3-p_4)+\Big[\overset{M_B\cdot\ddot{y}}{\cancel{\textstyle\sum F_y}}e-h\,W_T\Big]\cos\varphi-\Big[\overset{0}{\cancel{\textstyle\sum F_x}}e+h\,W_L\Big]\sin\varphi-(m_{H1}+m_{H2})\cos\beta\\
&\quad-(m_{H3}+m_{H4})-T_L\cos\varphi+T_T\sin\varphi=0\,, &(3.5)\\
&a(p_1+p_2)-b(p_3+p_4)-dW_V-\Big[\overset{0}{\cancel{\textstyle\sum F_x}}c+h\,W_L\Big]\cos\varphi-\Big[\overset{M_B\cdot\ddot{y}}{\cancel{\textstyle\sum F_y}}e-h\,W_T\Big]\sin\varphi\\
&\quad-(m_{H1}+m_{H2})\sin\beta-(m_{S3}+m_{S4})+T_L\sin\varphi+T_T\cos\varphi=0\,. &(3.6)
\end{aligned}$$

The equations of motion, in *Eulerian* coordinates, for the wheels are (Figure 3)

$$\left.\begin{aligned} -t_{S1} - S_1 &= M_W \ddot{\xi}_1 , & -T_1 r &= I_a \dot{\omega}_1 , \\ -t_{H1} - T_1 &= M_W \ddot{\eta}_1 , & -m_{H1} + S_1 r &= I_a \omega_1 (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) , \\ p_1 + P_1 - M_W g &= 0 , & m_{V1} + V_1 &= I_d (\ddot{\varphi} + \ddot{\beta}) . \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned} -t_{S2} - S_2 &= M_W \ddot{\xi}_2 , & -T_2 r &= I_a \dot{\omega}_2 , \\ -t_{H2} - T_2 &= M_W \ddot{\eta}_2 , & -m_{H2} + S_2 r &= I_a \omega_2 (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) , \\ p_2 + P_2 - M_W g &= 0 , & m_{V2} + V_2 &= I_d (\ddot{\varphi} + \ddot{\beta}) . \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{aligned} -t_{S3} - S_3 &= M_W \ddot{\xi}_3 , & m_{S3} - F r &= I_a \dot{\omega}_3 , \\ -t_{H3} - F &= M_W \ddot{\eta}_3 , & -m_{H3} + S_3 r &= I_a \omega_3 \dot{\varphi} , \\ p_3 + P_3 - M_W g &= 0 , & m_{V3} &= I_d \ddot{\varphi} . \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned} -t_{S4} - S_4 &= M_W \ddot{\xi}_4 , & m_{S4} - F r &= I_a \dot{\omega}_4 , \\ -t_{H4} - F &= M_W \ddot{\eta}_4 , & -m_{H4} + S_4 r &= I_a \omega_4 \dot{\varphi} , \\ p_4 + P_4 - M_W g &= 0 , & m_{V4} &= I_d \ddot{\varphi} , \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

where the ξ_i-η_i- coordinate directions are shown in Figure 3 and ω_i is the angular velocity of the i^{th}-wheel about its axle.

Since the rigid body of the vehicle is connected to four wheels which simultaneously contact the ground the problem is statically indeterminate. The problem therefore is first order redundant and one more relation is necessary. This additional relation can be found by considering front and rear spring coupling between the body and axles characterized by the spring constants k_f and k_r respectively. Assuming a displacement of the body with respect to the axles of the most general form, writing the six equilibrium conditions and eliminating the displacements leads to

$$(P_1 - P_2)\, k_r = (P_3 - P_4)\, k_f . \tag{3.11}$$

As was pointed out earlier, attention is focused upon the motion of the vehicle immediately following the gust excitation. Accounting for the delay in the drivers reaction therefore, for the period under consideration, the steering wheel is assumed to be locked. This does not preclude a relative rotation of the planes of the front wheels with respect to the rigid body about a vertical axis due to elasticity of the steering system. If furthermore after rotation these two planes are assumed to be parallel, the above considerations lead to the following relation

$$m_{V1} + m_{V2} = - K_S \beta = - V_1 - V_2 + 2\, I_d (\ddot{\varphi} + \ddot{\beta}) \tag{3.12}$$

where K_S denotes the stiffness of the steering system.

Equation (2.1) written for each wheel becomes

$$S_i = - (\bar{c} - c'\, P_i)\, P_i \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots 4) . \tag{3.13}$$

The self aligning torques transmitted in the contact area between tires and road will influence the front wheel relative rotation angle β. The self aligning torques transmitted to the rear tires will be negligible compared to the other external moments transmitted to the rigid body of the vehicle. For the front wheels Equation (2.2) gives

$$V_i = - (\bar{\bar{c}} - c''\, P_i)\, P_i \alpha_i \qquad (i = 1, 2) . \tag{3.14}$$

For the elimination of the components of the accelerations $\ddot{\xi}_i$, η_i the following geometric relations can be derived:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= (-c\,\ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\sin\varphi)\sin\beta - (-a\,\ddot{\varphi} - c\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\cos\varphi)\cos\beta , \\ \ddot{\eta}_1 &= (-c\,\ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\sin\varphi)\cos\beta + (-a\,\ddot{\varphi} - c\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\cos\varphi)\sin\beta , \\ \ddot{\xi}_2 &= (c\,\ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\sin\varphi)\sin\beta + (a\,\ddot{\varphi} - c\,\dot{\varphi}^2 + \ddot{y}\cos\varphi)\cos\beta , \\ \ddot{\eta}_2 &= (c\,\ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\sin\varphi)\cos\beta - (a\,\ddot{\varphi} - c\,\dot{\varphi}^2 + \ddot{y}\cos\varphi)\sin\beta , \\ \ddot{\xi}_3 &= c\,\dot{\varphi}^2 - b\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi , \qquad \ddot{\xi}_4 = -c\,\dot{\varphi}^2 - b\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi , \\ \ddot{\eta}_3 &= -c\,\ddot{\varphi} - b\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\sin\varphi , \qquad \ddot{\eta}_4 = c\,\ddot{\varphi} - b\,\dot{\varphi}^2 - \ddot{y}\sin\varphi . \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Furthermore, from the geometry, the slip angles α_i result as,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi + \beta - \arctan\left(\frac{a\,\dot\varphi\cos\varphi + c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v + c\,\dot\varphi\cos\varphi - a\,\dot\varphi\sin\varphi}\right),\\
\alpha_2 &= \varphi + \beta - \arctan\left(\frac{a\,\dot\varphi\cos\varphi - c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v - c\,\dot\varphi\cos\varphi - a\,\dot\varphi\sin\varphi}\right),\\
\alpha_3 &= \varphi - \arctan\left(\frac{-b\,\dot\varphi\cos\varphi + c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v + c\,\dot\varphi\cos\varphi + b\,\dot\varphi\sin\varphi}\right),\\
\alpha_4 &= \varphi - \arctan\left(\frac{-b\,\dot\varphi\cos\varphi - c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v - c\,\dot\varphi\cos\varphi + b\,\dot\varphi\sin\varphi}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Assuming no tangential slip between the tires and the road the angular velocities of the wheels, ω_i, in terms of the swim angle φ, the steering angel β, the forward velocity v and the slip angles α_i become

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{r}\sqrt{(a\,\dot\varphi\cos\varphi + c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y)^2 + (v + c\,\dot\varphi\cos\varphi - a\,\dot\varphi\sin\varphi)^2}\\
&\qquad\times\cos\left[\varphi + \beta - \arctan\frac{a\,\dot\varphi\cos\varphi + c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v + c\,\dot\varphi\cos\varphi - a\,\dot\varphi\sin\varphi}\right],\\
\omega_2 &= \frac{1}{r}\sqrt{(a\,\dot\varphi\cos\varphi - c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y)^2 + (v - c\,\dot\varphi\cos\varphi - a\,\dot\varphi\sin\varphi)^2}\\
&\qquad\times\cos\left[\varphi + \beta - \arctan\frac{a\,\dot\varphi\cos\varphi - c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v - c\,\dot\varphi\cos\varphi - a\,\dot\varphi\sin\varphi}\right],\\
\omega_3 &= \frac{1}{r}\sqrt{(-b\,\dot\varphi\cos\varphi + c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y)^2 + (v + c\,\dot\varphi\cos\varphi + b\,\dot\varphi\sin\varphi)^2}\\
&\qquad\times\cos\left[\varphi - \arctan\frac{-b\,\dot\varphi\cos\varphi + c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v + c\,\dot\varphi\cos\varphi + b\,\dot\varphi\sin\varphi}\right],\\
\omega_4 &= \frac{1}{r}\sqrt{(-b\,\dot\varphi\cos\varphi - c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y)^2 + (v - c\,\dot\varphi\cos\varphi + b\,\dot\varphi\sin\varphi)^2}\\
&\qquad\times\cos\left[\varphi - \arctan\frac{-b\,\dot\varphi\cos\varphi - c\,\dot\varphi\sin\varphi + \dot y}{v - c\,\dot\varphi\cos\varphi + b\,\dot\varphi\sin\varphi}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

and the angular accelerations of the wheels, $\dot\omega_i$, become

$$\left.\begin{aligned}
\dot\omega_1 &= \frac{1}{r}\sqrt{(c\,\ddot\varphi - a\,\dot\varphi^2 + \ddot y\sin\varphi)^2 + (a\,\ddot\varphi + c\,\dot\varphi^2 + \ddot y\cos\varphi)^2}\\
&\qquad\times\cos\left[\beta - \arctan\frac{a\,\ddot\varphi + c\,\dot\varphi^2 + \ddot y\cos\varphi}{c\,\ddot\varphi - a\,\dot\varphi^2 + \ddot y\sin\varphi}\right],\\
\dot\omega_2 &= \frac{1}{r}\sqrt{(-c\,\ddot\varphi - a\,\dot\varphi^2 + \ddot y\sin\varphi)^2 + (a\,\ddot\varphi - c\,\dot\varphi^2 + \ddot y\cos\varphi)^2}\\
&\qquad\times\cos\left[\beta - \arctan\frac{a\,\ddot\varphi - c\,\dot\varphi^2 + \ddot y\cos\varphi}{-c\,\ddot\varphi - a\,\dot\varphi^2 + \ddot y\sin\varphi}\right],\\
\dot\omega_3 &= \frac{1}{r}(c\,\ddot\varphi + b\,\dot\varphi^2 + \ddot y\sin\varphi)\,.\\
\dot\omega_4 &= \frac{1}{r}(-c\,\ddot\varphi + b\,\dot\varphi^2 + \ddot y\sin\varphi)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

The coupling reactions m_{Vi}, m_{Si}, m_{Hi}, t_{Hi}, t_{Si} and p_i are now eliminated from the equations of motion. From Equations (3.1) to (3.10) there results

$$\begin{aligned}
&\left[M_W(\ddot\eta_1 + \ddot\eta_2) - \frac{I_a}{r}(\dot\omega_1 + \dot\omega_2)\right]\cos(\varphi+\beta) + [M_W(\ddot\xi_1 + \ddot\xi_2) + S_1 + S_2]\sin(\varphi+\beta)\\
&\quad + [M_W(\ddot\eta_3 + \ddot\eta_4) + 2F]\cos\varphi + [M_W(\ddot\xi_3 + \ddot\xi_4) + S_3 + S_4]\sin\varphi - W_L = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
&\left[M_W(\ddot\eta_1 + \ddot\eta_2) - \frac{I_a}{r}(\dot\omega_1 + \dot\omega_2)\right]\sin(\varphi+\beta) - [M_W(\ddot\xi_1 + \ddot\xi_2) + S_1 + S_2]\cos(\varphi+\beta)\\
&\quad + [M_W(\ddot\eta_3 + \ddot\eta_4) + 2F]\sin\varphi - [M_W(\ddot\xi_3 + \ddot\xi_4) + S_3 + S_4]\cos\varphi + W_T = M_B\,\ddot y\,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$+ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - 4\,M_W\,g - M_B\,g - W_V = 0\,. \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&- a\,[M_W\,(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + S_1 + S_2]\cos\beta - c\,[-M_W\,(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) - (S_1 - S_2)]\sin\beta \\
&\quad - a\left[-M_W\,(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + \frac{I_a}{r}\,(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2)\right]\sin\beta - c\left[-M_W\,(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2) + \frac{I_a}{r}\,(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2)\right]\cos\beta \\
&\quad + b\,[M_W\,(\ddot{\xi}_3 + \ddot{\xi}_4) + (S_3 + S_4)] - c\,[-M_W\,(\ddot{\eta}_3 - \ddot{\eta}_4)] - d\,W_T\cos\varphi \\
&\quad - d\,W_L\sin\varphi + V_1 + V_2 = I_B\,\ddot{\varphi} + I_d\,(4\,\ddot{\varphi} + 2\,\ddot{\beta})\,.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
&c\,(-P_1 + P_2 - P_3 + P_4) + e\cos\varphi\left\{\left[M_W\,(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) - \frac{I_a}{r}\,(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2)\right]\sin(\varphi + \beta)\right. \\
&\quad - [M_W\,(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + S_1 + S_2]\cos(\varphi + \beta) + [M_W\,(\ddot{\eta}_3 + \ddot{\eta}_4) + 2\,F]\sin\varphi \\
&\quad \left. - [M_W\,(\ddot{\xi}_3 + \ddot{\xi}_4) + S_3 + S_4]\cos\varphi + W_T\right\} - h\,W_T\cos\varphi - h\,W_L\sin\varphi \\
&\quad + [I_a\,(\omega_1 + \omega_2)\,(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) - r\,(S_1 + S_2)]\cos\beta + I_a\,(\omega_3 + \omega_4)\,\dot{\varphi} \\
&\quad - r\,(S_3 + S_4) - T_L\cos\varphi + T_T\sin\varphi = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
&a\,(-P_1 - P_2 + 2\,M_W\,g) - b\,(-P_3 - P_4 + 2\,M_W\,g) - d\,W_V - h\,W_L\cos\varphi \\
&\quad - e\sin\varphi\left\{\left[M_W\,(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) - \frac{I_a}{r}\,(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2)\right]\sin(\varphi + \beta) - [M_W\,(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + S_1 + S_2]\cos(\varphi + \beta)\right. \\
&\quad \left. + [M_W\,(\ddot{\eta}_3 + \ddot{\eta}_4) + 2\,F]\sin\varphi - [M_W\,(\ddot{\xi}_3 + \ddot{\xi}_4) + S_3 + S_4]\cos\varphi + W_T\right\} \\
&\quad + h\,W_T\sin\varphi + [I_a\,(\omega_1 + \omega_2)\,(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) - r\,(S_1 + S_2)]\sin\beta \\
&\quad - [I_a\,(\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) + 2\,r\,F] + T_L\sin\varphi + T_T\cos\varphi = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

The 34 Equations, (3.11) through (3.24), determine the solution for the unknowns $\varphi, \beta, \ddot{y}$, P_1, P_2, P_3, P_4, S_1, S_2, S_3, S_4, V_1, V_2, α_1, α_2, α_3, α_4, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$, $\dot{\omega}_3$, $\dot{\omega}_4$, $\ddot{\xi}_1$, $\ddot{\xi}_2$, $\ddot{\xi}_3$, $\ddot{\xi}_4$, $\ddot{\eta}_1$, $\ddot{\eta}_2$, $\ddot{\eta}_3$, $\ddot{\eta}_4$ and F if the initial driving conditions and the external forces W_L, W_T, W_V and moments T_T, T_L are prescribed as functions of time. The distance d, characterizing the position of the wind load relative to the center of gravity of the car can, for a specified geometry, be derived from aerodynamic considerations.

4. Perturbation Solution. The set of governing equations is non-linear and can currently be solved only approximately. Of the different procedures for determining solutions the perturbation method is selected here. In order to proceed with this scheme the magnitudes of φ, y and β are restricted to values small compared to one, i. e.

$$\varphi \ll 1\,, \qquad \beta \ll 1\,, \qquad \frac{\dot{y}}{v} \ll 1\,. \tag{4.1}$$

Then, to the linear approximation, the geometric conditions become

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\xi}_1 &= a\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}\,, & \ddot{\eta}_1 &= -c\,\ddot{\varphi}\,, \\
\ddot{\xi}_2 &= a\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}\,, & \ddot{\eta}_2 &= c\,\ddot{\varphi}\,, \\
\ddot{\xi}_3 &= -b\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}\,, & \ddot{\eta}_3 &= -c\,\ddot{\varphi}\,, \\
\ddot{\xi}_4 &= -b\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}\,, & \ddot{\eta}_4 &= c\,\ddot{\varphi}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{r}\,(v + c\,\dot{\varphi})\,, & \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{r}\,c\,\ddot{\varphi}\,, \\
\omega_2 &= \frac{1}{r}\,(v - c\,\dot{\varphi})\,, & \dot{\omega}_2 &= -\frac{1}{r}\,c\,\ddot{\varphi}\,, \\
\omega_3 &= \frac{1}{r}\,(v + c\,\dot{\varphi})\,, & \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{r}\,c\,\ddot{\varphi}\,, \\
\omega_4 &= \frac{1}{r}\,(v - c\,\dot{\varphi})\,, & \dot{\omega}_4 &= -\frac{1}{r}\,c\,\ddot{\varphi}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v},\\
\alpha_2 &= \varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v},\\
\alpha_3 &= \varphi + \frac{b\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v},\\
\alpha_4 &= \varphi + \frac{b\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Before occurrence of the gust the vehicle is in a steady state driving condition under the action of the wind loads W_{L0}, W_{V0} and T_{T0} and the steady state tire loads are P_{10}, P_{20}, P_{30} and P_{40}. The transverse component of the wind forces acting upon the vehicle before occurrence of the gust is neglected. Consideration of the perturbation scheme used here shows that no additional generality would be introduced by inclusion of admissible values of initial transverse components of wind forces. At time $t = 0$ the wind loads undergo a step change of the amounts ΔW_L, ΔW_T, ΔW_V and ΔT_T, ΔT_T and accordingly a time dependent change in tire loads ΔP_1, ΔP_2, ΔP_3 and ΔP_4 occurs. In order to allow linearization of Equations (3.13) the time dependent variations of the normal tire loads are restricted to small values compared to the initial steady state magnitudes, i. e.

$$\frac{\Delta P_i}{P_i} \ll 1\,. \tag{4.5}$$

Now, to first order terms, the sideforces S_i and self aligning torques V_i are,

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= -(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10}\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\ddot{y}}{v}\right),\\
S_2 &= -(\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right),\\
S_3 &= -(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30}\left(\varphi + \frac{b\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right),\\
S_4 &= -(\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}\left(\varphi + \frac{b\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

and

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= -(\bar{c} - c''\,P_{10})\,P_{10}\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right),\\
V_2 &= -(\bar{c} - c''\,P_{20})\,P_{20}\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

and also by inspection of Equations (3.19) trough (3.24) the tangential tire force F must be expressable as

$$F = F_0 + \Delta F\,. \tag{4.8}$$

Substituting Relations (4.1) trough (4.8) into the equations of motion, i. e. Equations (3.19) through (3.24), (3.11) and (3.12), it is possible to separate the equations into steady state and time dependent parts. Furthermore, due to the perturbation procedure, the time dependent set of equations is linear. The steady state equations are

$$\left.\begin{aligned}
&2\,F_0 = W_{L0}\,,\\
&P_{10} + P_{20} + P_{30} + P_{40} - 4\,M_W\,g - W_{V0} - M_B\,g = 0\,,\\
&c\,(-P_{10} + P_{20} - P_{30} + P_{40}) = 0\,,\\
&a\,(-P_{10} - P_{20} + 2\,M_W\,g) - b\,(-P_{30} - P_{40} + 2\,M_W\,g) - d\,W_{V0} - h\,W_{L0} - 2\,r\,F_0 + T_{T0} = 0,\\
&(P_{10} - P_{20})\,k_r = (P_{30} - P_{40})\,k_f\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

The first of Equations (4.9) solves for F_0 and the four remaining equations can clearly be written in matrix form as

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +\frac{b}{a} & +\frac{b}{a} \\ +1 & -1 & -\frac{k_f}{k_r} & +\frac{k_f}{k_r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \\ P_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4\,M_W\,g + W_{V0} + M_B\,g \\ 0 \\ -2\,M_W\,g\left(1-\frac{b}{a}\right) + \frac{d}{a}\,W_{V0} + \frac{h}{a}\,W_{L0} + \frac{1}{a}\,T_{T0} + \frac{r}{a}\,W_{L0} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

which can be solvedas follows

$$\begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \\ P_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) & \left(-\frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(+\frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) \\ \left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) & \left(-\frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(-\frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) \\ \left(+\frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(-\frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) & \left(+\frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(-\frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) \\ \left(+\frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(+\frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) & \left(+\frac{1}{2\left(\frac{b}{a}+1\right)}\right) & \left(+\frac{1}{2\left(\frac{k_f}{k_r}+1\right)}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (+4\,M_W + M_B)\,g + W_{V0} \\ 0 \\ -2\,M_W\,g\left(1-\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{h}{a}+\frac{r}{a}\right)W_{L0} + \frac{d}{a}\,W_{V0} + \frac{1}{a}\,T_{T0} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

resulting in

$$\left.\begin{aligned} P_{10} = P_{20} &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\frac{b}{a}+1}\right]\cdot[(4\,M_W + M_B)\,g + W_{V0}] \\ &\quad - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{b}{a}+1}\left[-2\,M_W\left(1-\frac{b}{a}\right)g + \left(\frac{h}{a}+\frac{r}{a}\right)W_{L0} + \frac{d}{a}\,W_{V0} + \frac{1}{a}\,T_{T0}\right], \\ P_{30} = P_{40} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{b}{a}+1}\right] \\ &\quad \times\left[(4\,M_W + M_B)\,g + W_{V0} - 2\,M_W\,g\left(1-\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{h}{a}+\frac{r}{a}\right)W_{L0} + \frac{d}{a}\,W_{V0} + \frac{1}{a}\,T_{T0}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

The first matrix on the right hand side of Equation (4.11) only contains parameters which solely depend on the vehicle design while the second matrix on the right hand side is a measure of external loading.

The first order contribution to the governing equations can be written in terms of the known zero solution, as

$$2\,\Delta F = \Delta W_L\,. \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} &(4\,M_W + M_B)\,\ddot{y} = 2\,M_W\,(b-a)\,\ddot{\varphi} \\ &+\dot{\varphi}\left\{\frac{b}{v}\left[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}\right] - \frac{a}{v}\left[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}\right]\right\} \\ &+\varphi\left\{(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (c - c'\,P_{20})\,P_{20} + (c - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40} + 2\,F_0\right\} \\ &-\frac{\dot{y}}{v}\left\{(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20} + (\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}\right\} \\ &+\beta\left\{(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}\right\} + \Delta W_T\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4 = \Delta W_V . \tag{4.15}$$

$$(\Delta P_1 - \Delta P_2)\, k_r = (\Delta P_3 - \Delta P_4)\, k_f . \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}\left\{I_B + 2\,I_d + 2\,\frac{c^2}{r^2}\,I_a + 2\,M_W\,(a^2 + b^2 + 2\,c^2)\right.\\
&+\dot{\varphi}\left\{\frac{a^2}{v}\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] + \frac{b^2}{v}\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}]\right\}\\
&+\varphi\,\{-a\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] + b\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}] + d\,W_{L0}\}\\
&+2\,M_W\,(a - b)\,\ddot{y}\\
&+\frac{\dot{y}}{v}\,\{a\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] - b\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}]\}\\
&-\beta\,\{a\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] + K_S\} + d\,\Delta W_T = 0 .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
&e\left\{-2\,M_W\,(a\,\ddot{\varphi} + \ddot{y}) + [(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right) + 2\,F_0\,\varphi\right.\\
&\left.+2\,M_W\,(b\,\ddot{\varphi} - \ddot{y}) + [(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}]\left(\varphi + b\,\frac{\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right)\right\} - h\,W_{L0}\,\varphi\\
&+2\,I_a\,\frac{v}{r}\,\dot{\varphi} + \left\{2\,I_a\,\frac{v}{r}\,(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) + r\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right)\right\}\\
&+T_{T0}\,\varphi + r\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}]\left(\varphi + \frac{b\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right) + c\,(-\Delta P_1 + \Delta P_2 - \Delta P_3 + \Delta P_4)\\
&+(e - h)\,\Delta W_T - \Delta T_L = 0 .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$a\,(\Delta P_1 + \Delta P_2) - b\,(\Delta P_3 + \Delta P_4) + d\,\Delta W_V + h\,\Delta W_L + r\,\Delta W_L - \Delta T_T = 0 . \tag{4.19}$$

$$[(\bar{c} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c''\,P_{20})\,P_{20}]\left(\varphi + \beta - \frac{a\,\dot{\varphi}}{v} - \frac{\dot{y}}{v}\right) + 2\,I_d\,(\ddot{\varphi} + \ddot{\beta}) + K_S\,\beta = 0 . \tag{4.20}$$

Equations (4.13) gives the solution for ΔF, Equations (4.15), (4.16), (4.18) and (4.19) are the only equations containing ΔP_1, ΔP_2, ΔP_3 and ΔP_4 and consequently determine the unsteady state contributions to the tire normal loads in terms of φ, y and β. The three remaining Equations (4.14), (4.17) and (4.20) are three second order simultaneous, non-homogeneous differential equations determining the swim angle φ, the front wheel rotation β and the sidewise motion y.

Solving Equation (4.17) for β and substituting into Equation (4.20) and (4.14) leads to the following set

$$\beta = \bar{A}\,\ddot{\varphi} + \bar{B}\,\dot{\varphi} + \bar{C}\,\varphi + \bar{G}\,\ddot{y} + \bar{E}\,\dot{y} + d\,\frac{\Delta W_T}{\bar{D}}, \tag{4.21}$$

where

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A} &= \frac{I_B + 2\,I_d + 2\,\frac{c^2}{r^2}\,I_a + 2\,M_W\,(a^2 + b^2 + 2\,c^2)}{\bar{D}},\\
\bar{B} &= \frac{\frac{a^2}{v}\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10}] + [(\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] + \frac{b^2}{v}\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}]}{\bar{D}},\\
\bar{C} &= \frac{-a\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] + b\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}] + d\,W_{L0}}{\bar{D}},\\
\bar{D} &= a\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10}] + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] + K_S ,\\
\bar{E} &= \frac{\frac{a}{v}\,[(\bar{c} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{c} - c'\,P_{20})\,P_{20}] - \frac{b}{v}\,[(\bar{c} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{c} - c'\,P_{40})\,P_{40}]}{\bar{D}},\\
\bar{G} &= \frac{2\,M_W\,(a - b)}{\bar{D}},
\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

and

$$\bar{A}\,\varphi^{(IV)} + \bar{B}\,\varphi^{(III)} + \bar{C}\,\ddot{\varphi} + \bar{D}\,\dot{\varphi} + \bar{E}\,\varphi + \bar{H}\,y^{(IV)} + \bar{J}\,y^{(III)}\,\bar{L}\,\ddot{y} + \bar{N}\,\dot{y} = \bar{G}\,d\,\Delta W_T \tag{4.23}$$

where

$$\left.\begin{aligned}
\bar{A} &= 2\,I_d\,\bar{\bar{A}}\,,\\
\bar{B} &= 2\,I_d\,\bar{\bar{B}}\,,\\
\bar{C} &= [(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10}] + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20} + K_S]\,\bar{\bar{A}} + 2\,I_d\,(\bar{\bar{C}} + 1)\,,\\
\bar{D} &= [(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20} + K_S]\,\bar{\bar{B}}\\
&\qquad - \frac{a}{v}\,[(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20}]\,,\\
\bar{E} &= [(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20} + K_S]\,\bar{\bar{C}}\\
&\qquad + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20}\,,\\
\bar{G} &= -\,[(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20} + K_S]\cdot\frac{1}{\bar{\bar{D}}}\,,\\
\bar{H} &= 2\,I_d\,\bar{\bar{G}}\,,\\
\bar{J} &= 2\,I_d\,\bar{\bar{E}}\,,\\
\bar{L} &= [(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20} + K_S]\,\bar{\bar{G}}\,,\\
\bar{N} &= [(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20} + K_S]\,\bar{\bar{E}}\\
&\qquad - \frac{1}{v}\,[(\bar{\bar{c}} - c''\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c''\,P_{20})\,P_{20}]
\end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

and

$$C\,\ddot{\varphi} + D\,\dot{\varphi} + E\,\varphi + L\,\ddot{y} + N\,\dot{y} = \Delta W_T\left(1 + \frac{d}{\bar{\bar{D}}}\right), \tag{4.25}$$

where

$$\left.\begin{aligned}
C &= -\,2\,M_W\,(b - a) - \bar{\bar{A}}\,[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\,,\\
D &= \left(\frac{a}{v} - \bar{\bar{B}}\right)[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\\
&\qquad - \frac{b}{v}\,[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{40})\,P_{40}]\,,\\
E &= (-\,\bar{\bar{C}} - 1)\,[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\\
&\qquad - [(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{40})\,P_{40}] - 2\,F_0\,,\\
L &= 4\,M_W + M_B - \bar{\bar{G}}\,[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\,,\\
N &= \left(\frac{1}{v} - \bar{\bar{E}}\right)[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{10})\,P_{10} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{20})\,P_{20}]\\
&\qquad + \frac{1}{v}\,[(\bar{\bar{c}} - c'\,P_{30})\,P_{30} + (\bar{\bar{c}} - c'\,P_{40})\,P_{40}]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

The particular solutions φ_P and y_P of Equations (4.23) and (4.25) are

$$\varphi_P = \frac{\left[N\,\bar{\bar{G}}\,d - \left(1 - \frac{d}{\bar{\bar{D}}}\right)\bar{\bar{N}}\right]\Delta W_T}{\bar{\bar{E}}\,N - \bar{\bar{N}}\,E}\,, \tag{4.27}$$

$$y_P = \frac{\left[\bar{\bar{E}}\left(1 + \frac{d}{\bar{\bar{D}}}\right) - E\,\bar{\bar{G}}\,d\right]\Delta W_T}{\bar{\bar{E}}\,N - \bar{\bar{N}}\,E}\cdot t\,. \tag{4.28}$$

For the homogeneous solutions y_H and φ_H of Equations (4.23) and (4.25) there follows

$$y_H = \sum_{n=1}^{6} Y_n \cdot e^{\lambda_n t}, \tag{4.29}$$

$$\varphi_H = \sum_{n=1}^{6} \Phi_n \cdot e^{\lambda_n t} \tag{4.30}$$

provided no repeated roots of the characteristic equation

$$\begin{aligned}\lambda_n^6 (L\bar{A} - C\bar{H}) + \lambda_n^5 (L\bar{B} + N\bar{A} - C\bar{J} - D\bar{H}) + \lambda_n^4 (L\bar{C} + N\bar{B} - C\bar{L} - D\bar{J} - E\bar{H}) \\ + \lambda_n^3 (L\bar{D} + N\bar{C} - C\bar{N} - D\bar{L} - E\bar{J}) + \lambda_n^2 (L\bar{E} + N\bar{D} - D\bar{N} - E\bar{L}) \\ + \lambda_n (N\bar{E} - E\bar{N}) = 0\end{aligned} \tag{4.31}$$

occur. Since the characteristic Equation (4.31) is of sixth order, the roots (except $\lambda_1 = 0$) cannot be given explicitly in terms of the known coefficients. The six values of Y_n and six values of Φ_n are not independent of each other and are related through the following equations

$$\left.\begin{aligned}(\bar{A}\lambda_n^4 + \bar{B}\lambda_n^3 + \bar{C}\lambda_n^2 + \bar{D}\lambda_n + \bar{E})\,\Phi_n + (\bar{H}\lambda_n^4 + \bar{J}\lambda_n^3 + \bar{L}\lambda_n^2 + \bar{N}\lambda_n)\,Y_n = 0\,, \\ (C\lambda_n^2 + D\lambda_n + E)\,\Phi_n + (L\lambda_n^2 + N\lambda_n)\,Y_n = 0\,. \\ (n = 1, \ldots, 6)\end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Equation (4.21) determines β as follows

$$\beta = \sum_{n=1}^{6} \{\Phi_n (\bar{\bar{A}}\lambda_n^2 + \bar{\bar{B}}\lambda_n + \bar{\bar{C}}) + Y_n (\bar{\bar{G}}\lambda_n^2 + \bar{\bar{E}}\lambda_n)\}\, e^{\lambda_n t} + \bar{\bar{C}}\varphi_P + \bar{\bar{E}}\dot{y}_P + \frac{d \cdot \Delta W_T}{\bar{\bar{D}}}\,. \tag{4.33}$$

Equations (4.32) result in six relations between the twelve unknown constants Φ_n and Y_n. The following six initial conditions suffice for determination of the remaining six constants. These initial consitions are,

$$\left.\begin{aligned}\text{at } t = 0: \quad \varphi = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad y = 0\,, \\ \dot{\varphi} = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \dot{y} = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

5. Illustrative Problem. As an application of the above results, the behavior under wind gusts of a passenger vehicle having the following defining parameters is considered:

Masses and moments of inertia:

$M_B = 9.56$ lb-sec^2/in
$M_W = 0.2$ lb-sec^2/in
$I_B = 10^4$ lb-in-sec^2
$I_a = 20$ lb-in-sec^2
$I_d = 12$ lb-in-sec^2

Dimensions:

$a = 60$ in
$b = 72$ in
$c = 30$ in
$d = 0$
$e = 6$ in
$r = 15$ in
$h = 20$ in

Tire charcteristics:

$\bar{c} = 12.17$ l/rad
$c' = 0.00598$ l/lb rad
$\bar{\bar{c}} = 1$ in/rad
$c'' = 0$

velocity $v = 1000$ in/sec (57.4 mph),
suspension characteristics $k_f/k_r = 0.8$,
steering characteristic $K_S = 1000 \frac{\text{in lbs}}{\text{rad}}$,

Forces and moments:

$W_{L0} = +300$ lbs $\qquad T_{T0} = 0$
$W_{V0} = -100$ lbs $\qquad \Delta T_T = 0$
$\Delta W_T = +100$ lbs $\qquad \Delta T_L = 0$
$\Delta W_L = 0$.

Zero order solution:
From the first of Equations (4.9)

$$F_0 = 150 \text{ lbs}$$

and from (4.11)

$$\begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \\ P_{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1005 \\ 1005 \\ 945 \\ 945 \end{pmatrix} \text{lbs} . \tag{5.1}$$

First order solution:
From Equation (4.21) follows

$$\beta = + 0.0194\,\ddot{\varphi} + 0.1455\,\dot{\varphi} + 0.1967\,\varphi - 6.47 \times 10^{-6}\,\ddot{y} - 0.197 \times 10^{-3}\,\dot{y} \tag{5.2}$$

and from Equation (4.23)

$$+ 0.466\,\varphi^{(IV)} + 3.49\,\ddot{\varphi}^{(III)} + 87.2\,\ddot{\varphi} + 426\,\dot{\varphi} + 2601\,\varphi - 0.155 \times 10^{-3}\,y^{(IV)} - 4.73 \times 10^{-3}\,y^{(III)} - 19.48\,\ddot{y} - 2.603\,\dot{y} = 0 . \tag{5.3}$$

From Equation (4.25) there results

$$- 244.3\,\ddot{\varphi} - 1.944\,\dot{\varphi} - 27.400\,\varphi + 10.44\,\ddot{y} + 27.12\,\dot{y} = 100 \tag{5.4}$$

and from Equations (4.27) and (4.28)

$$\varphi_P = - 0.333 \text{ rad} \qquad \text{and} \qquad y_P = - 333.0 \times t \text{ in} . \tag{5.5}$$

As will be shown the particular solutions for the swim angle φ and the sidewise motion y of the car are not contained in the homogeneous solution and are, therefore admissible. The physical significance of the particular solution is best visualized as the solution as $t \to \infty$. For the specific vehicle under consideration (i. e. $d = 0$) the resulting motion due to the particular solution is such that the vehicle velocity would turn into the negative resultant external wind force direction. In this theoretical driving condition the slip angles α_i would be zero so that the tire side forces S_i and restoring moments V_i would vanish. The relation between φ_P and y_P for $d = 0$ is then

$$\varphi_P = \frac{\dot{y}_P}{v} . \tag{5.6}$$

The value of φ_P in this problem exceeds the values allowable for linearization and perturbation procedures used in this work. However, as has earlier been pointed out, since no steering corrections are introduced, the solution is of interest for the period of time immediately following the action of the sidewise gust. Since the system variables φ, β, y start from zero initial values and vary continuosly in their amounts, the first period of time after gust loading allows the mathematical procedure given here.

From Equation (4.31) the characteristic equation for this specific passenger car becomes

$$\lambda_n (4.8266\,\lambda_n^5 + 47.737\,\lambda_n^4 + 986.46\,\lambda_n^3 + 4885.0\,\lambda_n^2 + 30174.0\,\lambda_n - 779.85) = 0 . \tag{5.7}$$

The roots of this equation are:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 , & \lambda_4 &= - 1.8264 + 11.4914\,i , \\ \lambda_2 &= - 3.1317 + 6.0466\,i , & \lambda_5 &= - 1.8264 - 11.4914\,i , \\ \lambda_3 &= - 3.1317 - 6.0466\,i , & \lambda_6 &= + 0.02574 . \end{aligned} \tag{5.8}$$

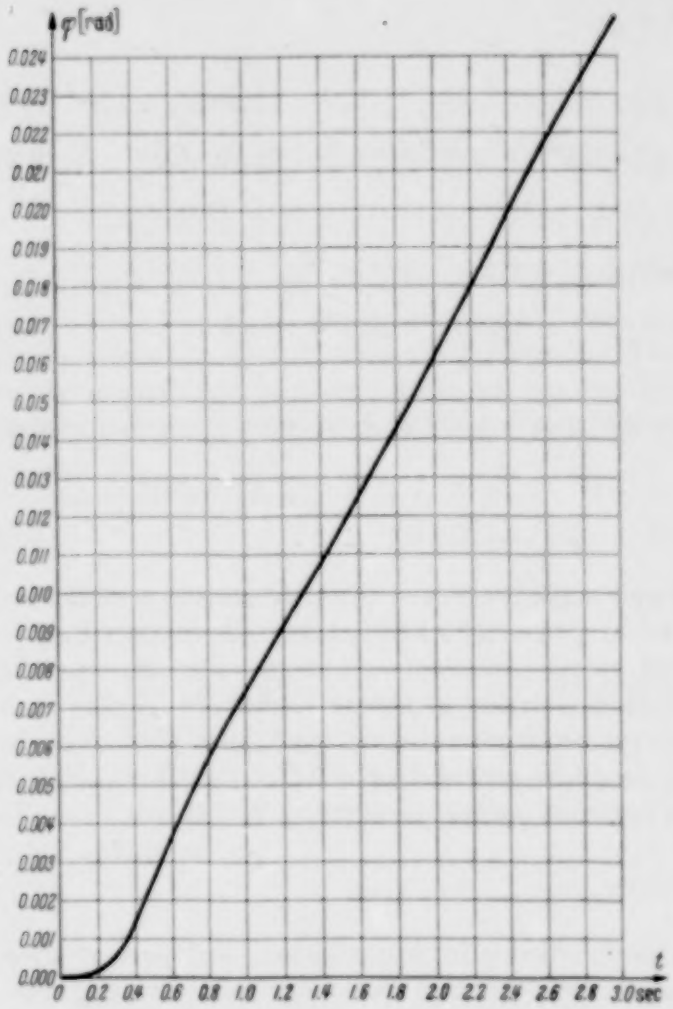
With these values of the characteristic roots and requiring the initial conditions (4.34) to be satisfied, the solutions for the swim angle φ and the sidewise motion y in real form become

$$\begin{aligned} \varphi = {} & 2\,e^{-3.1317\,t} \cdot [(+ 0.0006747) \cos (+ 6.0466\,t) - 0.0006307 \sin (+ 6.0466\,t)] \\ & + 2\,e^{-1.8264\,t} \cdot [(- 0.00001178) \cos (+ 11.491\,t) + 0.0001421 \sin (+ 11.491\,t)] \\ & + (+ 0.3320)\,e^{(+.02574)\,t} - 0.33333 \end{aligned} \tag{5.9}$$

and

$$\begin{aligned} y = {} & (- 12938.0) + 2\,e^{(-3.1317)\,t} [(- 0.03003) \cos (+ 6.0466\,t) + (0.01111) \sin (+ 6.0466\,t)] \\ & + 2\,e^{-1.8264\,t} [(+ 0.001241) \cos (+ 11.491\,t) + (+ 0.0007710) \sin (+ 11.491\,t)] \\ & + 12{,}938.\,e^{(+0.02574)\,t} - \frac{1000\,t}{3} . \end{aligned} \tag{5.10}$$

The solutions for the swin angle φ and the sidewise motion y determined by Equations (5.9) and (5.10) are shown graphically in Figures 4 and 5. The relative front wheel rotation β is given by Equation (4.33) and all the remaining first order unknowns are given in this paper in terms of φ, y, β, and their derivatives and by use of (4.33), (5.9) and (5.10) may easily be determined.



Fg. 4. The swim angle φ as a function of time t during the time interval of $t = 0$ to $t = 3$ sec immediately following the gust load.

With respect to the resulting swim angle, φ, and the sidewise motion, y, the reader should note that for the vehicle considered in this calculation the parameter d — distance between center of gra-

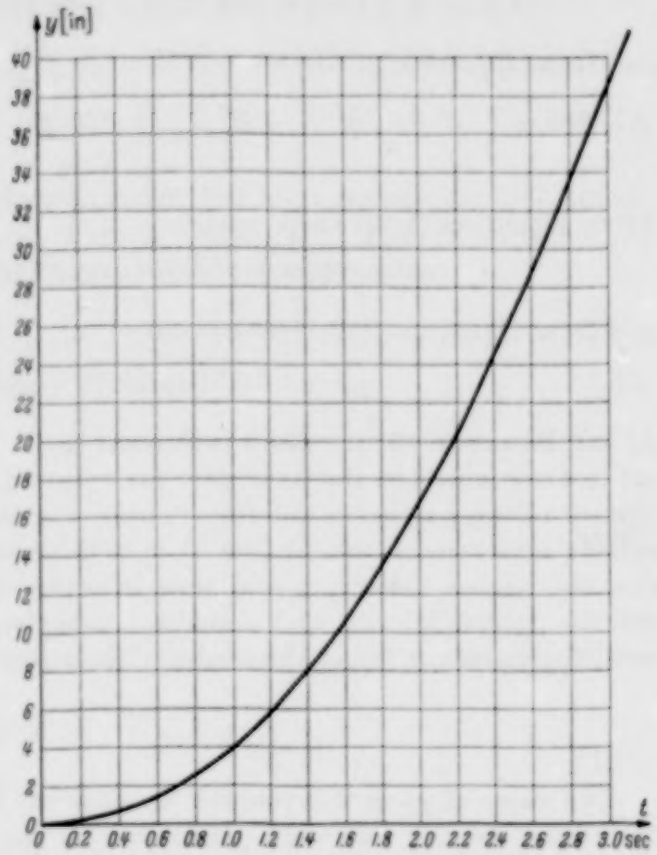


Fig. 5. The sidewise motion y as a function of time t during the time interval of $t = 0$ to $t = 3$ sec immediately following the gust load.

vity of body of vehicle and center of wind loading — was zero. Physically it appears, that the resulting functions for φ and y (shown in Figures 4 and 5) could be appreciably altered for different values of d. This value d will primarily be determined by the vehicle profile. The heavy damping upon the vibration response (als clearly shown by Figures 4 and 5) is a result of damping created by tire sideforces.

(Eingegangen am 11. November 1958.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr. *A. Slibar*, Stuttgart N, Keplerstr. 10, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Dr. *P. R. Paslay*, General Electric Company, Schenectady N. Y.

Über einen durch Kreiselwirkung hervorgerufenen Reibungseffekt im Kugellager

Von **R. Sonntag**

1. Einleitung. In einem konischen Spurzapfen-Kugellager mit festem Stützring (Abb. 1) wird durch die Kreiselmomente der Kugeln ein eigentümlicher, meines Wissens bisher nicht bekannter Reibungseffekt hervorgerufen, der bewirkt, daß bei einer bestimmten Drehzahl der Welle die für Kugellager streng geforderte reine Rollbewegung der Kugeln aufhört. Die bei Überschreitung dieser Grenzdrehzahl plötzlich hinzutretende Gleitung der Kugeln hat zur Folge, daß solche Lager rasch heiß laufen, was auch von der Erfahrung bestätigt wird. Die Kenntnis dieser Grenzdrehzahl und ihrer Abhängigkeit von den geometrischen Größen, den Reibungszahlen, der Belastung pro Kugel und der Anlaufbeschleunigung ist daher von praktischem Interesse, um so mehr, als neuerdings die konischen Spurzapfen-Kugellager durch die Feinwerktechnik erhöhte Bedeutung erhalten haben. Hier sei nur auf ihre Verwendung in den zahlreichen Kreiselinstrumenten der Flugzeuge hingewiesen.

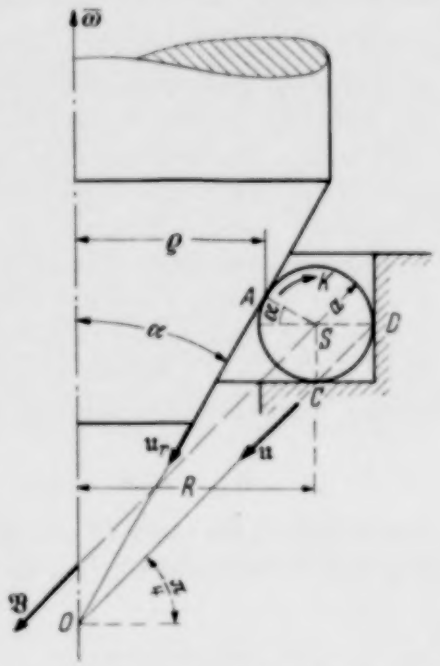


Abb. 1. Konisches Spurzapfen-Kugellager.

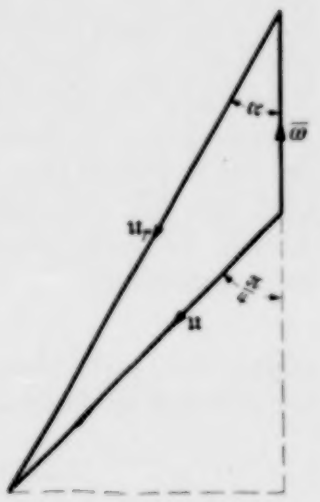


Abb. 2. Dreieck der Drehvektoren (zu Abb. 1).

2. Das Kreiselmoment der Kugel eines konischen Spurzapfen-Kugellagers. Ist $\overline{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Welle und $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{u}_r$ die absolute bzw. relative Winkelgeschwindigkeit einer Kugel, so sind diese drei Vektoren bekanntlich durch das Winkelgeschwindigkeitsdreieck, (Abb. 2) entsprechend der Vektorgleichung $\mathfrak{u} = \overline{\omega} + \mathfrak{u}_r$, kinematisch miteinander verbunden. Wenn, wie in Abb. 1, die durch den Berührungspunkt A gehende Richtungslinie des Vektors $\mathfrak{u}_r$ mit der Erzeugenden des Kegels vom halben Öffnungswinkel α zusammenfällt, ($\alpha < \pi/4$), wodurch die bohrende Reibung in diesem Punkt vermieden wird, so ist nach Abb. 2

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ctg}\alpha - 1}\,\omega\,, \qquad u_r = \frac{u}{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}\,. \tag{1}$$

Der auf den Schwerpunkt S bezogene Drall einer Kugel vom Halbmesser a, der Masse m und der auf einen Durchmesser bezogenen Drehmasse $\Theta = 2/5\; m \cdot a^2$ ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{u}\,\Theta\,. \tag{2}$$

Wird der Drallvektor $\mathfrak{B}$ längs seiner Richtungslinie so weit verschoben, daß sein Fußpunkt auf der Wellenachse liegt, Abb. 1, so beschreibt er einen Kegelmantel um die Wellenachse mit der Drehgeschwindigkeit ω_s des — mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfallenden — Schwerpunktes S, die sich — am einfachsten durch Parallelverlegung des Vektors $\mathfrak{u}$ nach S — zu

$$\omega_s = \frac{a}{R\sqrt{2}}\,u \tag{3}$$

ergibt. Die Drallspitze beschreibt dabei einen Kreis vom Halbmesser $B/\sqrt{2}$, so daß die Drallände-rung im Zeitelement dt bei gleichförmiger Bewegung

$$|d\mathfrak{B}| = \frac{B}{\sqrt{2}}\,\omega_s\,dt \tag{4}$$

beträgt. Der kleine Vektor $d\mathfrak{B}$ steht senkrecht auf der sich mit ω_s drehenden, von der Wellenachse und der momentanen Drehachse C—D der Kugel aufgespannten Präzessionsebene, in der sämtliche Winkelgeschwindigkeits-Vektoren sowie der Drallvektor liegen, und weist in Abb. 1 auf den Beschauer zu. Der Vektor des Kreiselmoments der Kugel

$$\mathfrak{K} = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \tag{5}$$

weist demnach vom Beschauer weg und stellt ein im Uhrzeigersinn drehendes Kräftepaar dar, auch dann, wenn die Drehung der Welle im entgegengesetzten Sinn erfolgt. Seine Größe beträgt mit (4), (3), (2), (1)

$$K = \frac{B}{\sqrt{2}}\,\omega_s = \frac{a}{2R}\,\Theta\,u^2 = \frac{2}{5}\,m \cdot \frac{a^3}{R\cdot(\operatorname{ctg}\alpha - 1)^2}\cdot\omega^2\,. \tag{6}$$

Da das Kreiselmoment der Kugel identisch ist mit dem resultierenden Kräftepaar der *Coriolis*kräfte ihrer Massenpunkte, so läßt sich (6) auch mit Hilfe der Relativmechanik herleiten, freilich auf eine viel umständlichere Weise.

3. Der Reibungseffekt. a) Anlauf der Welle mit sehr kleiner Drehbeschleunigung $\dot\omega$. Vom Standpunkt eines an der Kugelbewegung teilnehmenden Beobachters, für den sich die Kugel in Ruhe, im Gleichgewicht befindet, ist das Kreiselmoment ein wirkliches, physikalisch nachweisbares Moment; denn es ruft in den Berührungspunkten A, C, D der Kugel mit der Welle und dem festen Stützring Reibungskräfte in der Präzessionsebene hervor, die nur für den — hier allein interessierenden — Grenzfall bestimmt werden können, in dem sie ihre Größtwerte erreicht haben, die Kugel sich also an der Gleitgrenze befindet (Grenze zwischen Ruhe und — vom Kreiselmoment angestrebter — Drehung um die senkrecht auf der Präzessionsebene stehende Schwerpunktachse). Da das Reibungsmoment in diesem Fall seinen Größtwert $(M_F)_{max}$ besitzt, gilt dasselbe auch von dem ihm das Gleichgewicht haltenden Kreiselmoment. Dieser Grenzzustand wird während des Anlaufs bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Welle erreicht, die sich aus der Momentengleichung

$$K_{max} = K_{\omega=\omega_1} = (M_F)_{max} \tag{7}$$

ergibt. Ist $\dot\omega$ sehr klein und α kleiner als etwa 30°, so gilt dasselbe auch von der in A senkrecht auf der Präzessionsebene stehenden Reibungskraft F'_A, die zur Drehbeschleunigung

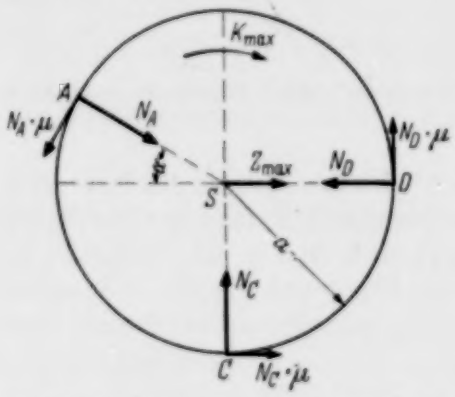


Abb. 3. Gleichgewichtssystem der Kräfte an der Kugel nach Erreichen ihrer Grenz-Drehgeschwindigkeit.

$$\dot u = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ctg}\alpha - 1}\,\dot\omega \tag{8}$$

der Kugel nötig ist nach der dynamischen Grundgleichung für die Drehbewegung

$$\left(\Theta + m\cdot\frac{a^2}{2}\right)\dot u = 0{,}9\,m\,a^2\cdot\dot u = F'_A\cdot p \tag{9}$$

mit p als Lot von A auf die momentane Drehachse C—D der Kugel. Bei vernachlässigbar kleinem F'_A liegt die am Momentengleichgewicht nach (7) beteiligte, maximale Reibungskraft $(F_A)_{max}$ von der Größe

$$(F_A)_{max} = N_A\cdot\mu \tag{10}$$

in der Präzessionsebene. N_A bedeutet die von der achsialen Wellenbelastung Q herrührende Normalkraft in A, die bei n Kugeln

$$N_A = \frac{Q}{n\cdot\sin\alpha} \tag{11}$$

beträgt, und μ die Haftreibungszahl, die in jedem der drei Berührungspunkte A, C, D dieselbe sein soll. An der bei $\omega = \omega_1$ an der Gleitgrenze befindlichen Kugel greifen die in Abb. 3 eingetragenen Komponenten der Berührungskräfte, das Kreiselmoment $K_{max} = K_{\omega=\omega_1}$ und die Fliehkraft

$$Z_{\omega=\omega_1} = m\,R\cdot(\omega_s)_1^2 = m\cdot\frac{a^2}{R\cdot(\operatorname{ctg}\alpha - 1)^2}\cdot\omega_1^2 \tag{12}$$

der Kugel an, die mit Rücksicht auf (6) auch

$$Z_{\omega=\omega_1} = \frac{5}{2}\,\frac{K_{max}}{a} \tag{13}$$

ist. (Das Gewicht der Kugel werde vernachlässigt.) Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt:

$$N_C = N_A \cdot \sin\alpha - \frac{Z_{\omega=\omega'\mu}}{1+\mu^2}; \qquad N_D = N_A \cdot \cos\alpha + \frac{Z_{\omega=\omega_1}}{1+\mu^2}. \tag{14}$$

Wegen der kleinen Reibung im Kugellager ($\mu \cong 0{,}05$) kann μ^2 gegen 1 vernachlässigt werden. Damit wird das Reibungsmoment

$$(M_F)_{max} = (N_A + N_C + N_D)\,\mu \cdot a = \{N_A(1+\sin\alpha+\cos\alpha) + Z_{\omega=\omega_1}(1-\mu)\}\,\mu\, a, \tag{15}$$

und aus (7) folgt jetzt unter Beachtung der Gleichungen (6), (11), (12), (14), (15) die der Gültigkeit der Kinematik eine obere Schranke setzende Grenzwinkelgeschwindigkeit der Welle

$$\omega_1 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - 1}{a}\sqrt{\frac{Q\,R\,\mu\,(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{0{,}4\,m\,(1-2{,}5\,\mu)\,n\cdot\sin\alpha}}. \tag{16}$$

Nach Überschreitung des Grenzwerts ω_1 könnte die Gerade C—D nur dann die momentane Drehachse der Kugel auch weiterhin bleiben, wenn sie gegen den Wellenzapfen reibungslos gleiten könnte, was jedoch der Erfahrung widerspricht. Sie muß daher ihre Richtung ändern, was aber mit Gleitung der Kugeln im Stützring verbunden ist. Diese Gleitung kann nur in C erfolgen, da D ein Rollpunkt bleibt, weil nach (14) N_D wesentlich größer ist als N_C und außerdem N_D im Gegensatz zu N_C mit wachsender Fliehkraft zunimmt. Während ω den Grenzwert ω_1 überschreitet, muß sich die in C vorhandene maximale Reibungskraft $N_C \cdot \mu$ aus der Präzessionsebene herausdrehen und in die zu ihr senkrechte, der Gleitgeschwindigkeit entgegengesetzte Richtung einstellen. Da in dieser Ebene die Reibungskraft in C jetzt fehlt, ist kurz nach der Überschreitung von ω_1 das Reibungsmoment kleiner als zuvor, d. h. kleiner als $(M_F)_{max}$ (15). Der Drallvektor muß also jetzt auf Grund des Flächensatzes einen Winkel $\beta_1 < \pi/4$ mit der Lotrechten bilden, der sich mit $\omega = \omega_1$ aus einer allgemeinen, für jedes $\omega > \omega_1$ geltenden, transzendenten Gleichung ergibt, die man durch Gleichsetzen des Reibungsmoments mit dem Kreiselmoment erhält. Nach dieser drehen sich mit wachsendem ω Drallvektor und Momentanachse weiter gegen die Lotrechte hin, ohne sie ganz zu erreichen. Diese eigenartige Drehung hat auch der Versuch bestätigt.

Zahlenbeispiel:

$a = 1$ cm, $\alpha = 30°$, $R = 4{,}1$ cm,
$mg = 0{,}033$ kg, $n = 10$, $\mu = 0{,}05$ $Q = 10$ kg.

Damit wird:

$$u = 1{,}93\,\omega \quad \text{(Gl. 1)}, \qquad \omega_s = \frac{1}{3}\,\omega \quad \text{(Gl. 3)}.$$

$$\omega_1 = 210\,\frac{1}{\text{sek}} \quad \text{(Gl. 16)}, \qquad K_{max} = 0{,}265\,\text{kg cm (Gl. 6)}, \quad \beta_1 = 34°.$$

Bisher war stillschweigend angenommen worden, daß die von der Wellenbelastung Q herrührende, unbestimmt bleibende Reibungskraft im Berührungspunkt A zwischen Welle und Kugel gleich Null ist. Wird jetzt zwecks Feststellung eines etwaigen Einflusses dieser Reibungskraft $(F_A)_Q$ der andere Grenzfall vorausgesetzt, daß sie, deren Pfeil nur die aus Abb. 4 ersichtliche Richtung haben kann, ihren Größtwert $N_A \cdot \mu$ besitzt, so sind im Ruhezustand der Welle die in diese Abbildung eingetragenen Reibungskräfte an der Kugel vorhanden. Das Momentengleichgewicht verlangt, daß die Summe der Momente der in C und D wirkenden, unbestimmt bleibenden Reibungskräfte $(F_C)_Q$ und $(F_D)_Q$ entgegengesetzt gleich dem Moment der Reibungskraft $(F_A)_Q$ sein muß, so daß

$$(F_C)_Q + (F_D)_Q = (F_A)_Q = N_A \cdot \mu \tag{17}$$

ist, wobei für N_A wegen des sehr kleinen μ wieder der in (11) angegebene Wert gesetzt werden kann. Da in A bereits die größte Reibungskraft vorhanden ist, so kann das im Uhrzeigersinn drehende Kreiselmoment nur in C und D zusätzliche Reibungskräfte erzeugen. Während seines allmählichen Anwachsens bringt es zunächst die dort von Q hervorgerufenen Reibungskräfte zum Verschwinden (unter gleichzeitiger, sehr geringer Änderung der Normalkräfte in diesne beiden Punkten) und ruft weiterhin Reibungskräfte F_C und F_D hervor, deren Pfeile die entgegengesetzte Richtung haben wie die der ursprünglich vorhandenen, so daß mit Gleichung (17)

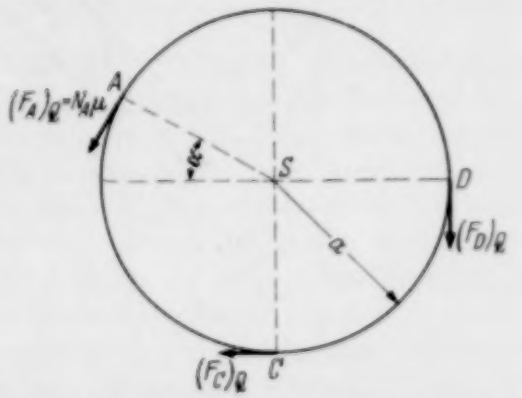


Abb. 4. Mögliches System von Reibungskräften an der ruhenden Kugel.

$$K = [(F_C)_Q + (F_D)_Q + F_C + F_D] \cdot a = (N_A \cdot \mu + F_C + F_D)\,a \cdot \tag{18}$$

ist. Wenn F_C und F_D ihre Größtwerte $N_C \cdot \mu$ und $N_D \cdot \mu$ erlangt haben, hat auch das Reibungsmoment und mit ihm das Kreiselmoment — ebenso wie zuvor — seinen Maximalwert erreicht. Für $(M_F)_{max}$ gilt dann (15), so daß auch (16) für ω_1 in diesem Grenzfall gültig bleibt, wie zu erwarten war. Obwohl hier die maximale Reibungskraft $(F_A)_Q = N_A \mu$ schon im Ruhezustand in der Präzessionsebene liegt, also zu Beginn des Anlaufs keine Reibungskomponente F'_A senkrecht zu dieser Ebene vorhanden ist, welche die Kugel nach Gleichung (9) beschleunigt, so kommt diese Komponente trotzdem dadurch zustande, daß der Vektor der maximalen Reibungskraft $N_A \mu$, da er durch kein äußeres Moment an die Präzessionsebene gefesselt ist, aus dieser Ebene heraustreten und jeden beliebigen Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ mit ihr bilden kann.

b) Anlauf der Welle mit beliebig großer Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$. Der Einfachheit der Darstellung halber werde hier vorausgesetzt, daß der halbe Öffnungswinkel des Spurzapfenkegels $\alpha = 45°$ ist. Bei diesem Winkel kann natürlich die Richtungslinie des Drehvektors $\mathfrak{u}_r$ nicht mehr mit der Erzeugenden des Kegels zusammenfallen, da nach (1) $u = \infty$ würde, so daß auch in A bohrende Reibung vorhanden ist. Sind a und R, bzw. $\varrho = R - \frac{a}{\sqrt{2}}$ (Abb. 5) gegeben, so ist der Winkel ε zwischen der absoluten Drehachse C—D und der relativen Drehachse A—0 der Kugel durch

$$\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{2\,\varrho}{a\,(\sqrt{2}+1)} + 1$$

festgelegt. Der Abb. 5 entnimmt man

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) = \frac{\varrho}{\varrho + a\,(\sqrt{2}+1)}$$

und der Abb. 6

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) = \frac{u}{u + \omega\sqrt{2}}\,.$$

Damit ergibt sich

$$u = \frac{\varrho}{a}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \omega\,. \tag{19}$$

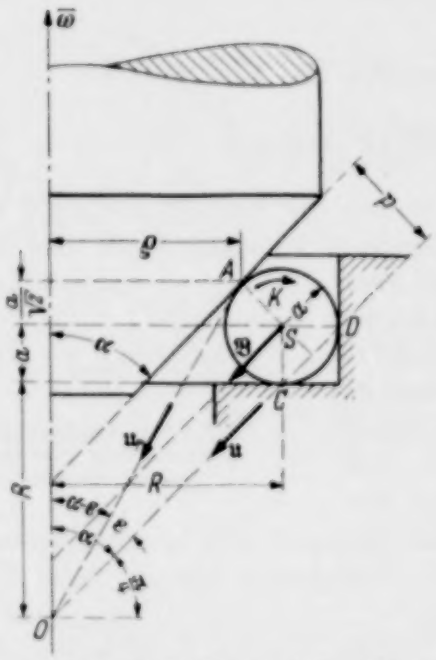


Abb. 5. Kugellager mit konischem Zapfen vom halben Öffnungswinkel $\alpha = 45°$.

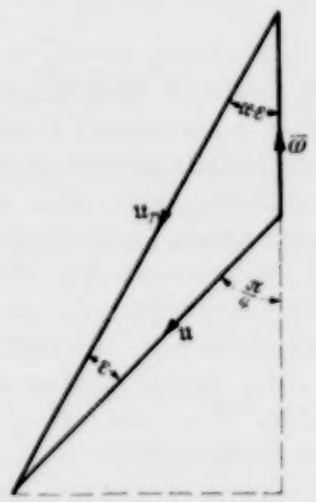


Abb. 6. Dreieck der Drehvektoren (zu Abb. 5).

Das Kreiselmoment wird

$$K = \frac{B}{\sqrt{2}}\,\omega_s = \frac{a}{2\,R}\,\Theta \cdot u^2 = \frac{2}{5}\,m\,\frac{a\,\varrho^2}{R}\,\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot \omega^2 \tag{20}$$

und an Stelle von (16) tritt für sehr kleines $\dot{\omega}$

$$(\omega_1)_{\dot{\omega} \to 0} = \frac{\sqrt{2}+1}{\varrho}\,\sqrt{\frac{Q\,R \cdot \mu\,(2+\sqrt{2})}{0{,}4\,m\,(1-2{,}5\,\mu) \cdot n}}\,. \tag{21}$$

Für eine beliebig große, weiterhin als konstant vorausgesetzte Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$ der Welle folgt aus (9) mit (19) und $p = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (Abb. 5) die senkrecht zur Präzessionsebene gerichtete Komponente der Reibungskraft in A

$$F'_A = \frac{0{,}9\, m \cdot a}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\, \dot{u} = \frac{0{,}9\, m\, \varrho}{1{,}5 + \sqrt{2}}\, \dot{\omega} = \lambda_1 \cdot \dot{\omega} \tag{22}$$

mit

$$\lambda_1 = 0{,}309\, m\, \varrho\,. \tag{23}$$

Da sie nach Abb. 7 im Gleichgewicht steht mit der im Schwingungsmittelpunkt M der Kugel angreifenden, resultierenden Trägheitskraft

$$T = \frac{m\, a}{\sqrt{2}}\, \dot{u} = \frac{m\, \varrho}{1 + \sqrt{2}}\, \dot{\omega}$$

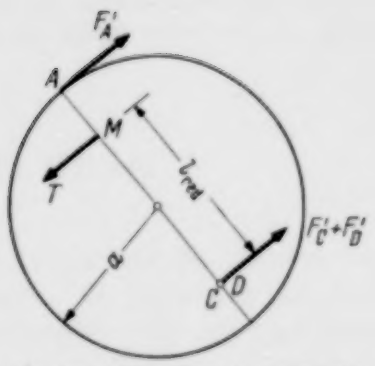


Abb. 7. Gleichgewichtssystem der senkrecht zur Präzessionsebene gerichteten Kräfte an der Kugel während des Anlaufs der Welle.

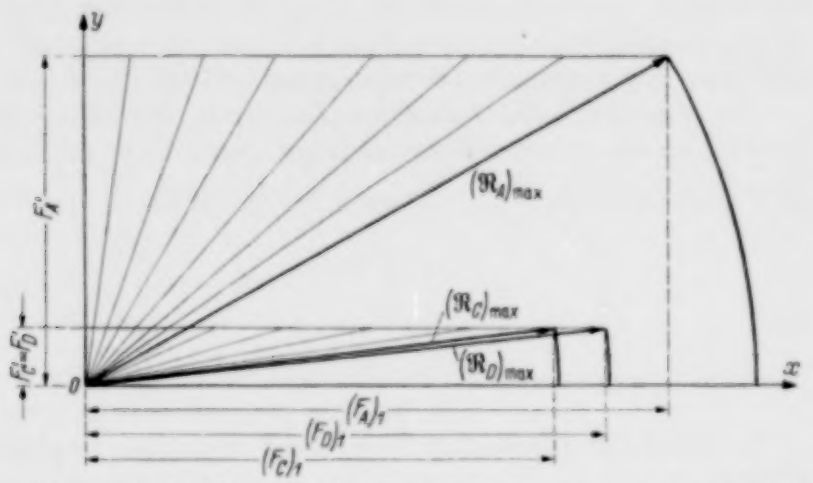


Abb. 8. Veränderlichkeit der drei Reibungsvektoren während des Anlaufs der Welle mit einer Drehbeschleunigung $\dot{\omega} < \frac{q\sqrt{2}}{\lambda_1}$. $\left(\text{mit } q = \frac{Q}{n}\,\mu\right)$

und den ebenfalls senkrecht auf der Präzessionsebene stehenden, unbekannten Komponenten F'_C und F'_D der Reibungskräfte in C und D, die für $\alpha = \pi/4$ gleich groß sind, so folgen diese zu

$$F'_C = F'_D = \frac{1}{2}\left(\frac{m\, \varrho}{1 + \sqrt{2}}\, \dot{\omega} - F'_A\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m\, \varrho}{1 + \sqrt{2}} - \lambda_1\right) \cdot \dot{\omega} = \frac{1}{2}\lambda_2 \cdot \dot{\omega} \tag{24}$$

mit

$$\lambda_2 = 0{,}105\, m\, \varrho\,. \tag{25}$$

Obwohl die drei Reibungsvektoren windschief zueinander sind, läßt sich ihre Veränderlichkeit während des Anlaufvorgangs in einer Ebene verfolgen, da ihre Komponenten in der Präzessionsebene bekannte Richtungen haben. In Abb. 8 sind auf einer waagerechten x-Achse diese, durch das Kreiselmoment hervorgerufenen Komponenten F_A, F_C, F_D und auf der lotrechten y-Achse die senkrecht auf der Präzessionsebene stehenden Komponenten F'_A, F'_C, F'_D, die von der Winkelbeschleunigung $\dot{u}$ der Kugel herrühren, aufgetragen. Die in der x, y-Ebene liegenden Reibungsvektoren seien mit $\Re_A$, $\Re_C$, $\Re_D$ bezeichnet. Die zu Beginn des Anlaufs in die y-Achse fallenden Vektoren drehen sich mit wachsendem ω infolge Zunahme des Kreiselmoments. Da ihre Spitzen zunächst waagrechte Geraden durchlaufen, solange bei konstantem $\dot{\omega}$ auch $\dot{u}$ konstant bleibt, ist mit der Drehung eine Vergrößerung ihrer Beträge verbunden. Wenn der Vektor $\Re_A$ seinen Größtwert $N_A \cdot \mu$ erreicht hat, kommt er zum Stillstand, so daß seine x-Komponente

$$(F_A)_1 = \sqrt{(N_A \cdot \mu)^2 - (\lambda_1 \cdot \dot{\omega})^2} \tag{26}$$

durch das weiterhin anwachsende Kreiselmoment — zunächst wenigstens — nicht vergrößert werden kann. Die Vektoren $\Re_C$ und $\Re_D$ setzen ihre Dreh-Streckung fort, bis auch sie ihre Größtwerte $(N_C)_1 \cdot \mu$ bzw. $(N_D)_1 \cdot \mu$ erlangt haben (Abb. 8). In diesem Augenblick ist diejenige Drehgeschwindigkeit ω_1 der Welle erreicht, die der Gültigkeit der kinematischen Beziehung, Gleichung (19), eine Schranke setzt. Sie folgt aus der Momentengleichung

$$K_{\omega = \omega_1} = [(F_A)_1 + (F_C)_1 + (F_D)_1] \cdot a \tag{27}$$

mit $(F_A)_1$ nach (26) und

$$(F_C)_1 = \sqrt{[(N_C)_1 \cdot \mu]^2 - \left(\frac{\lambda_2 \dot{\omega}}{2}\right)^2}, \tag{28}$$

$$(F_D)_1 = \sqrt{[(N_D)_1 \cdot \mu]^2 - \left(\frac{\lambda_2 \dot{\omega}}{2}\right)^2}. \tag{29}$$

Wird zur Abkürzung

$$(F_A)_1 = N_A \mu_A, \qquad (F_C)_1 = (N_C)_1 \cdot \mu_C, \qquad (F_D)_1 = (N_D)_1 \cdot \mu_D$$

gesetzt, so ergeben sich aus dem Gleichgewicht der Kräfte in der Präzessionsebene für die Normalkräfte in C und D im Grenzzustand $\omega = \omega_1$ die folgenden Ausdrücke, zunächst in impliziter Form

$$(N_C)_1 = \frac{N_A}{\sqrt{2}}[1 - \mu_D + \mu_A(1 + \mu_D)] - Z_1 \mu_D, \tag{30}$$

$$(N_D)_1 = \frac{N_A}{\sqrt{2}}[1 + \mu_C - \mu_A(1 - \mu_C)] + Z_1, \tag{31}$$

wobei $\mu_C \cdot \mu_D$ gegen eins bereits vernachlässigt ist.

Da nun die Verhältniszahlen μ_A, μ_C, μ_D kleiner sind als die Haftreibungszahl μ und diese selbst hier als vernachlässigbar klein gegen eins angesehen werden kann ($\mu \cong 0{,}05$), so gehen (30) und (31) mit $\frac{N_A}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{n}$ nach (11) über in

$$(N_C)_1 = \frac{Q}{n} - Z_1 \cdot \mu_D, \tag{32}$$

$$(N_D)_1 = \frac{Q}{n} + Z_1. \tag{33}$$

In (32) kann glücklicher Weise auch noch das „implizite" Glied $Z_1 \mu_D$ gegen Q/n vernachlässigt werden.

Denn aus (27) folgt unter Beachtung der Beziehung zwischen K und Z laut (13), sowie mit (30), (31) und $N_A = \frac{Q}{n}\sqrt{2}$

$$Z_1 < 2{,}5\,(N_A + (N_C)_1 + (N_D)_1)\,\mu = 2{,}5\,\frac{Q}{n}\,(2 + \sqrt{2})\,\frac{\mu}{1 - 2{,}5\,\mu},$$

so daß mit $\mu = 0{,}05$

$$Z_1 \cdot \mu_D < Z_1 \mu < 0{,}024\,\frac{Q}{n} \tag{34}$$

ist, dieses Glied also in (32) vernachlässigt werden und daher

$$(N_C)_1 = \frac{Q}{n} \tag{35}$$

gesetzt werden kann.

Mit der zur Abkürzung eingeführten Bezeichnung

$$\frac{Q}{n}\mu = q \tag{36}$$

lassen sich die Gleichungen (26), (28), (29) unter Beachtung von (11), (35), (33) einfacher wie folgt schreiben

$$(F_A)_1 = q\sqrt{2}\,\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\,q}\,\dot{\omega}\right)^2} \tag{37}$$

$$(F_C)_1 = q \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_2}{2q}\,\dot{\omega}\right)^2}, \tag{38}$$

$$(F_D)_1 = q\,\sqrt{\left(1 + \frac{Z_1 \cdot \mu}{q}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_2}{2q}\,\dot{\omega}\right)^2} \tag{39}$$

mit

$$\frac{Z_1 \cdot \mu}{q} = \frac{m\,\varrho^2 \cdot n}{Q\,R\,(\sqrt{2}+1)^2}\,\omega_1^2 \tag{40}$$

[nach (3), (19), (36)]. Nunmehr läßt sich aus (27) mit $K_{\omega=\omega_1}$ nach (20) der Grenzwert ω_1 für ein gegebenes $\dot{\omega}$ von beliebiger Größe zu

$$\omega_1^2 = \frac{R(\sqrt{2}+1)^2}{m\left(R-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left|\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \mu^2\right|} \times \left\{\frac{2}{5}\left[(F_A)_1 + (F_C)_1\right] + \frac{Q}{n}\mu^2 + \mu\sqrt{\left[(F_A)_1 + (F_C)_1 + \frac{2}{5}\frac{Q}{n}\right]^2 - \left[\frac{\lambda_2 \cdot \dot{\omega}}{2\mu}\right]^2 \cdot \left|\left(\frac{2}{5}\right)^2 - \mu^2\right|}\right\} \tag{41}$$

berechnen.

Der Nachweis, daß im Bereich $\omega > \omega_1$ bei beliebig veränderlichem, z. B. konstantem $\dot{\omega}$ gleitende Reibung auftritt und daher die der kinematischen Gleichung (19) zu Grunde liegende Bedingung nicht mehr erfüllt ist, daß die augenblickliche Drehachse der Kugel in die Gerade C—D fällt, läßt sich hier indirekt führen, indem man die Frage stellt: Nach welchem Gesetz müßte sich $\dot{\omega}$ mit der Zeit ändern, damit diese Bedingung auch noch nach Überschreitung des Grenzwerts ω_1 erfüllt ist? Wird dieser Fall als möglich angesehen, dann setzen bei Steigerung der Drehzahl über ω_1 hinaus die auf ihre Größtwerte angewachsenen drei Reibungsvektoren ihre Drehung fort, wobei ihre Spitzen Kreisbögen um 0 beschreiben (Abb. 8). Die Winkelgeschwindigkeit u der Kugeln wächst bei abnehmender Winkelbeschleunigung $\dot{u}$ infolge Abnahme der beschleunigenden Komponente

$$F'_A = \frac{0{,}9\, m\, a}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\dot{u} = \gamma_1\,\dot{u}$$

nach Gl. (22) mit

$$\gamma_1 = 0{,}528\, m \cdot a \tag{42}$$

weiter an und mit ihr die drei Komponenten F_A, F_C, F_D entsprechend der Zunahme des Kreiselmoments. An Stelle der Gleichung (24) tritt in dem Bereich $\omega > \omega_1$

$$F'_C = F'_D = \frac{1}{2}\gamma_2\,\dot{u} \tag{43}$$

mit

$$\gamma_2 = \frac{m\,a}{\sqrt{2}} - \gamma_1 = 0{,}179\, m\, a \tag{44}$$

und an Stelle von (27) tritt jetzt in leicht ersichtlicher Weise die folgende mit a gekürzte Momentengleichung, in der $\frac{m\,a^2}{2\,R} = b$ gesetzt wurde, als Differentialgleichung für $u(t)$.

$$0{,}4\, b\, u^2 = q\left\{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_1}{\sqrt{2}\,q}\dot{u}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{\gamma_2}{2\,q}\dot{u}\right)^2} + \sqrt{\left(1+\frac{b\,\mu}{q}u^2\right)^2 - \left(\frac{\gamma_2}{2\,q}\dot{u}\right)^2}\right\}. \tag{45}$$

Mit $\dot{u} = 0$ folgt daraus

$$u_{max} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{Q\,2\,R\cdot\mu\,(2+\sqrt{2})}{0{,}4\,m\,(1-2{,}5\,\mu)\cdot n}}. \tag{46}$$

Da u_{max} von $\dot{\omega}$ unabhängig ist, müßte sich diese Formel auch aus (21) ergeben, die für verschwindend kleines $\dot{\omega}$ gilt, was auch, wenn man (19) beachtet, zutrifft.

Hiernach würde die momentane Drehachse nur dann die Gerade C—D sein können, die Kugel also nur dann eine reine Rollbewegung ausführen, wenn von dem Augenblick ab, in dem ω den Grenzwert ω_1 nach (41) erreicht, die Drehbeschleunigung $\dot{\omega}$ der Welle nach dem gleichen Gesetz mit der Zeit abnehmen würde wie die sich aus der Lösung der Differentialgleichung (45) ergebende Drehbeschleunigung $\dot{u}$ der Kugel, da nur dann die kinematische Beziehung (19) nicht verletzt würde. In diesem Fall würde auch ω nach Erreichen des Größtwerts $\omega_{max} = (\omega_1)_{\dot{\omega}\to 0}$ nach (21) konstant bleiben. Ist dagegen, wie hier vorausgesetzt, $\dot{\omega}$ = konst., so muß nach Überschreitung des Grenzwerts ω_1 (41) jedenfalls eine andere Achse zur Drehachse werden, was aber Gleitung der Kugeln bedingt.

Die größtmögliche Winkelbeschleunigung $\dot{u}_{max}$ wird der Kugel durch $(F'_A)_{max} = N_A \cdot \mu = q\sqrt{2}$ erteilt. Das ist nach (22) für

$$\dot{\omega} = \frac{q\sqrt{2}}{\lambda_1} \tag{47}$$

der Fall, womit aus (37) $(F_A)_1 = 0$ folgt. Dieses $\dot{\omega}$ beträgt mit den Werten des Zahlenbeispiels: $2 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{sek}^2}$ und aus (41) ergibt sich damit $\omega_1^{\times} = 132 \frac{1}{\text{sek}}$, während nach (21) $(\omega_1)_{\dot{\omega} \to 0} = 173 \frac{1}{\text{sek}}$ wird.

Der Grenzwert $\omega_1^{\times}$ stellt zugleich einen Minimalwert dar; denn da F_A' nicht größer werden kann als $q\sqrt{2}$, gilt er auch für jedes beliebige $\dot{\omega} > \frac{q\sqrt{2}}{\lambda_1}$.

In dem „kinematischen Intervall" $0 < \omega < \omega_1^{\times}$, in dem die Kugel mit

$$\dot{u}_{max} = \frac{\varrho}{a} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{q\sqrt{2}}{\lambda_1}$$

[nach Gl. (22) u. (19)] beschleunigt wird, ist der Vektor $(\mathfrak{R}_A)_{max}$ an die y-Achse gefesselt, so daß in diesem ganzen Bereich $F_A = 0$ ist (Abb. 9). Das Kreiselmoment kann also in A keine

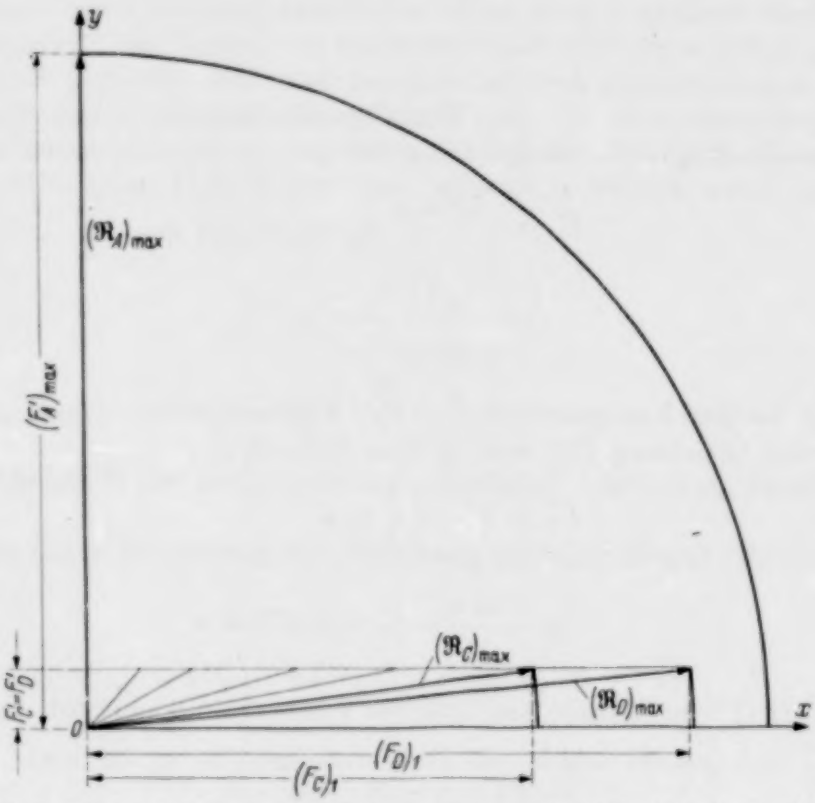


Abb. 9. Veränderlichkeit der drei Reibungsvektoren während des Anlaufs der Welle mit einer Drehbeschleunigung $\dot{\omega} \geqq \frac{q\sqrt{2}}{\lambda_1}$.

Reibungskraft hervorrufen! Hier tritt ein weiterer Reibungseffekt auf, und zwar als Folge der kinematischen Kopplung von $\dot{u}$ und $\dot{\omega}$ durch Reibungsschluß. Im Bereich $0 < \omega < \omega_1^{\times}$ drehen sich also nur die Reibungsvektoren $\mathfrak{R}_C$ und $\mathfrak{R}_D$ unter gleichzeitiger Vergrößerung ihrer Beträge so lange, bis sie bei $\omega = \omega_1^{\times}$ ihre Größtwerte erreicht haben[1].

(Eingegangen am 24. Oktober 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *Rudolf Sonntag*, Techn. Hochschule Karlsruhe, Kaiserstr. 12, Institut für Technische Mechanik.

[1] Meinem Assistenten, Dipl.-Ing. *O. Molerus* danke ich für seine Unterstützung bei der kurzfristigen Abfassung dieser Arbeit.

Mechanics of the Power and Launching Phase for Missiles and Satellites

By C. A. Traenkle

1. Introduction and Survey of Problems. a) Approach Delineation. Long Range Missiles and Satellite Vehicles require very high initial velocities to be put into their respective trajectories or orbits. This is done during launching by a power burst of the propulsion system, usually a rocket or reaction motor. A short survey shows that the Power Phase occupies a considerable portion of the whole trajectory, with regard to time as well as displacement, since the acceleration of the orbital vehicle has to be kept relatively small. Therefore the mechanics of the Power Phase should be analyzed in detail, as it may be surmised that the economy with regard to pay loads and fuel consumption will depend heavily on the special programming of this Power Phase.

b) Orbit Parameters. The orbital vehicle be pushed momentarily to a velocity v_0 under the elevation angle ψ at the launch point 0 at the surface of the earth (see Fig. 1); at first, the influence of the atmosphere be disregarded. Then the elements v_0, ψ determine completely a Keplerian orbit, normally an ellipse, around the earth center. Only the part 0 (Launch), *Ap* (Apogee), *I* (Impact) outside the earth's surface is real: these "Impact Orbits" may be used as missile trajectories or as part of an "Ascent Ellipse" for a Satellite, with the arc 0 *Ap* as the coasting phase.

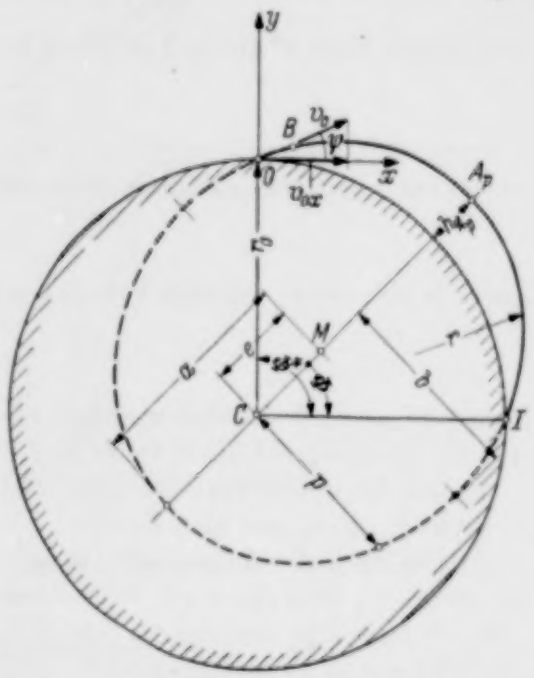


Fig. 1. Impact Orbit.

The parameters of the *Keplerian* Orbit can be deduced by the integration of the respective equations of motion, as shown in the textbooks of Mechanics[1, 2]. For completeness, the results for a spherical earth may be shortly delineared here:

The polar form of the ellipse equation is

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} .$$

The Semi Latus Rectum p follows as an integration constant from the orbit equation

$$p = K_t r_0 , \tag{1.1}$$

where $K_t \equiv k_{0x}^2$ Energy Parameter,

$k_{0x} \equiv v_{0x}/v_{s0}$ Velocity Ratio of $v_{0x} = v_0 \cos \psi$, (1.2)

$v_{S0} = \sqrt{G/r_0} = \sqrt{g_0 r_0} = 7.91$ km/s Surface Satellite Velocity, (1.3)

$r_0 = 6370$ km Earth Radius,

$g_0 = 9.81$ m/s^2 Earth Surface Gravitation,

$G = 3.99 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2 Earth Gravitational Constant.

The Semi Major Axis a can be deduced directly by equating the total energy content of the orbiting body as the sum of potential and kinetic energy

$$a = r_0/(2 - k_0^2) , \tag{1.4}$$

where $k_0 \equiv v_0/v_{S0}$ Velocity Ratio of v_0, (1.5)

it is noted that for $k_0 = \sqrt{2} \equiv k_E \equiv v_E/v_{S0}$

the equation turns to $a = \infty$,

k_E being the Velocity Ratio of the so called "Escape Velocity" v_E.

[1] *A. Sommerfeld*, Mechanics I, New York (1952).

[2] *S. Timoshenko* and *D. H. Young*, Advanced Dynamics, New York (1948) p. 87.

The following formulae can now be deduced from the basic relations of the ellipse geometry:

Semi Minor Axis	$b = (p\,a)^{1/2}$,	(1.6)
Linear Eccentricity	$e = (a^2 - b^2)^{1/2}$,	(1.7)
Numerical Eccentricity	$\varepsilon = e/a$	
and explicity	$\varepsilon^2 = \mathrm{t\,a\,n}^2\,\psi\,K_t^2 + (K_t - 1)^2$,	(1.8)
Altitude of Apogee	$h_{Ap} = e + a - r_0$.	(1.9)

The Range Angle Φ^* (see Fig. 1) can be deduced from the orbit equation, according to Ref.[1,2]

$$\tan\frac{\Phi^*}{2} = \frac{\tan\psi}{1/K_t - 1}. \tag{1.10}$$

The Flight Time t^* from O to I can be computed by the *Keplerian* Time Equation

$$\frac{n}{2}\,t^* = u + \varepsilon \sin u\,, \tag{1.11}$$

where the Eccentric Anomaly u is calculated by

$$r_0 = a\,(1 + \varepsilon\cos u)\,, \tag{1.12}$$

and n is the Mean Angular Velocity according to *Kepler*'s Third Law

$$n = 2\,\pi/T = (G/a^3)^{1/2}. \tag{1.13}$$

It may be pointed out that the signs of ε in the Ellipse Equationand in Eqs. (1.11) & (1.12) are adjusted to the Apogee Line CAp as axis of origin.

It will be noted that the orbit elements are deduced from the vector of the initial velocity, given by v_0, ψ, r_0; see also Ref.[3].

The numerical values of the Impact Orbit of Fig. 1 have been calculated according to the above formulae:

Φ^*	$= 90^\circ = 10\,000$ km Earth Quadrant,			ψ	$= 22.5^\circ$
v_0	$= 7.20$ km/s	k_0	$= 0.910$	$k_{0,}$	$= 0.840$
p	$= 4490$ km	a	$= 5430$ km	b	$= 4940$ km
e	$= 2215$ km	h_{Ap}	$= 1275$ km	t^*	$= 32.2$ min.

This selected example has the additional property of achieving a maximum range with the given amount of velocity. For these "Maximum Range" trajectories, there exist special and interesting interrelations; see for instance Ref.[2-4].

The effect of the diurnal rotation of the earth has not been accounted for, as yet: it can be added eventually by simple kinematic superposition of the velocity components.

c) Short Time — Long Time Launch. The Orbit Mechanics of the preceding paragraph are deduced under the assumption that the initial velocity v_0 can be instantaneously imparted to the orbital body, as in a cannon barrel or an a launching rack: Instant Velocity v_0 by Impulse Launching. — Of course, this is an abstraction. No cannon barrel or launching rack of reasonable length could sustain the extreme acceleration pressures, nor could the body bear the acceleration loads, which would be required to achieve these extreme end velocities in such a short time. Apart from these limitations of structural strength, there is moreover the limitation of aerodynamic heating, which requires to start with a moderate speed, at least while the body penetrates the atmosphere, to prevent its burning up by air friction. These reasons lead to the well established practice that big rockets have to be launched with moderate accelerations. The mean acceleration may amount to $a_F \approx 3\,g$, as a numerical example. An overall calculation shows then, that the arc length of the acceleration phase (Power Phase OB of Fig. 1) would amount to approximately 1100 km and its duration to approximately 5 minutes. These values are in fact sizable portions of the respective trajectory quantities. It is therefore peremptory to analyze the Power Phase in detail: during the "Long Time" Launch of the rocket, the gravity influence produces an appreci-

[1] *M. Rauscher*, Aeronautical Dynamics, New York (1953) p. 35.
[2] *Ph. A. Lapp*, Trajectory Studies, MIT-Report T-63 (1954).
[3] *M. Vertregt*, Astronautica Acta 4 (1958) p. 135.
[4] MIT-Summer Program in Orbital- and Satellite Vehicles (1956): *W. McKay, P. E. Sandorff, J. S. Prigge* et al.

able velocity component v_G, which is superimposed over the propulsion velocity v_F of the propulsion system itself, resulting in the compound velocity v_0; this latter should be substituted for the above instant velocity, as shown below.

d) Power Phase Sections. The end point of the Power Phase is the Burn Out Point B (Fig. 1), where the required compound velocity $v_0 = v(B)$ should be attained. This is simultaneously the initial velocity vector for the free flight path and determines the range angle Φ^* acc. to Eq. (1.10). The characteristic details of the Power Phase Trajectory are shown in the schematic sketch of Fig. 2. The coordinate system has its origin at the launch site 0 at the moment of launching: x is tangent to the earth surface, in the direction towards the target and y is perpendicular to it. The system is fixed with respect to inertial space, i. e. it does not participate in the diurnal rotation of the earth.

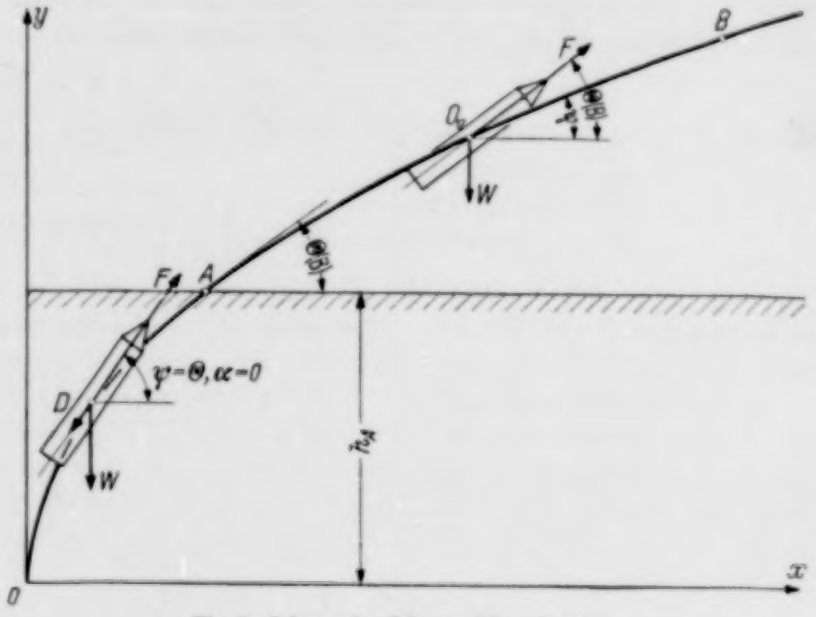


Fig. 2. Schematic of Power Phase Sections.

e) A-Phase. The first section of the Power Phase, the Atmospheric Penetration or A-Phase, starts usually with a vertical ascent, since the shells of big rockets are built as light as possible to save weight: the shell might otherwise collapse under the weight of its own propellant load, if started on an inclined launch track. Immediately after the launch, the rocket is tilted automatically and slowly towards the target; this tilt program is characterized by a tilt rate parameter C which will be defined later. The actual flight path results from the interaction of rocket propulsion, gravity and aerodynamic forces. It is desirable to bring the aerodynamic drag to a minimum. This is achieved by keeping the angle of attack α of the rocket at zero, which is equivalent to keeping the rocket axis coincident with the flight path tangent; the angle conditions are:

$$\alpha = 0\,, \qquad \psi = \Theta\,, \tag{1.14}$$

where ψ flight path angle, Θ rocket attitude angle, both measured with respect to the x-axis. This arrangement presents one of the major practically applied programs, the "Zero α-Regime", or simply "α-Case". It is also often noted as "Gravity Turn", since gravity is one of the major factors, determining its turn rate.

The A-Phase ends, when the flight path reaches point A, emerging from the atmospheric layer of the "Appreciable Atmosphere" of thickness h_A: that is a nominal altitude, where by definition the density ratio has decreased to such a low value, that the aerodynamic forces become negligible. One may assume as attenuation relation

$$\varrho/\varrho_0 = e^{-h/h_\varrho}\,,$$

which describes satisfactorily the average values of decrease, if one substitutes for the "Rate Altitude" h_ϱ an appropriate mean value. It is with $h_\varrho = 7.1$ km:

ϱ_A/ϱ_0	h_A, approximately		
1/100	32.7 km,	100 000 ft,	20 ml,
1/1000	49.1 km,	150 000 ft,	30 ml.

Numerical computations, according to 6. below, confirm indeed, that the aerodynamic drag D becomes negligible, after having passed through the above altitude range for h_A. The numerical values of h_A are relatively low, because also the corresponding velocity of the vehicle is still low: with continuing acceleration of the vehicle, the air density will fall much more rapidly, so that there will be a continuous net decrease of D to zero. — The layer h_A is relatively thin, compared with the earth radius or the apex altitude of the trajectory, and amounts in Fig. 1 comparatively to only a fraction of the thickness of the pencil line.

f) B-Phase. The flight path beyond point A traverses practically empty space, where aerodynamic forces are no more existent. Therefore the attitude angle Θ can be set independently

of the flight path angle ψ to such an amount $\Theta(B)$, as to counterbalance most economically the influence of gravity by an appropriate component of the rocket thrust; this compensation will lead to the Optimal Θ Theorem of Chp. 5 below. — The discontinuity of ϱ and Θ in point A is naturally an abstraction, helping to understand the phenomena; however, this concept can be modified and refined in subsequent steps, if necessary.

2. Reference Trajectory. a) Equation of Motion. The trajectory analysis has to start from the fundamental Newtonian equations of motion. The momentum equation considers the rocket as a point mass and reads in vectorial form:

$$m\,\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{W}, \tag{2.1}$$

where $W = m\,g$ rocket weight, variable with time,
m rocket mass,
F rocket thrust,
P total aerodynamic force of Lift L & Drag D.

The equation for the moment of momentum would be required additionally for analyzing rotations around the rocket axes as in stability and control problems; these are separate problems of their own and will not be considered here.

b) Inertial Coordinate System. An important simplification in the above equation is the use of the inertial coordinate system $x\,y$ (Fig. 2). No additional fictitious forces, as used in a rotating system, have to be introduced here: no centrifugal force $m\,r\,\dot{\varphi}^2$ and no *Coriolis* force $2\,m\,\dot{r}\,\dot{\varphi}$ (see also Fig. 19). This would have been the case in the geocentric polar coordinate system, which on the other hand is best suited for treating the trajectories as *Keplerian* orbits in their total circumference.

c) Reference- and Iterative Integration. Another simplification is introduced by disregarding, at first, the influence of the aerodynamic Drag D and by considering g as a constant, both in magnitude and direction (y-direction). The corresponding trajectory integration is called "Reference Integration", resulting in the "Reference Trajectory". It will be shown in the later chapters, how the neglected influences can be added subsequently in iterative steps as perturbation terms, converging rapidly into the exact limit function: "Iterative Integration" — method.

The perturbation terms, to be considered, are:

1. the aerodynamic forces, particularly the aerodynamic Drag, D-Term;
2. the variation of g with altitude, H-Term;
3. the directional variation of g, due to earth curvature, C-Term. —

In fact, the numerical influence of the perturbation terms is rather small, as verified by later computations: it does not exceed some few percent of the end values. It is therefore permissible to disregard at first the perturbation terms at all and to analyze the effect of the parameter variations for optimization processes already at the stage of the Reference Trajectory. Moreover, the influence of the perturbation terms does not change much among a trajectory family: since only relative differences are important for the purpose of comparison, those terms cancel out even to an accuracy of higher order.

d) Reference Terms G and F. The Reference Trajectory can be found by integrating the differential equation (2.1), simplified according to the above discussions:

$$m\,\dot{\vec{v}} = \vec{W} + \vec{F};$$

the first integration will yield the velocity vector diagram or hodograph, the second one the flight path. It is obvious that the process can be separated into the two components:

I. Gravity Component, G-Term

$$m\,\dot{v}_G = W,$$

where

$$W = -m\,g$$

is in the constant direction of the $-y$ axis; the integration values in the direction of the $+y$ axis are therefore:

velocity $\quad v_G = -g\,t\,,$ (2.2)

or as increment $\quad \Delta v_G = -g\,\Delta t\,,$ (2.3)

displacement $\quad y_G = -\frac{g}{2}\,t^2.$ (2.4)

II. Propulsion Component, *F*-Term

$$m \dot{\vec{v}}_F = \vec{F}$$

where the propulsion force F is, according to the impulse equation $F = c_F \dot{m}$; the integration is performed for a constant direction of the rocket axis, as a basis of comparison

$$\dot{v}_F = \frac{F}{m} = \frac{c_F}{t_U} \cdot \frac{1}{1 - t/t_U}, \qquad v_F = c_F \ln \mu, \tag{2.5}$$

increment from point i to k $\Delta v_F^{(i \to k)} = v_F^{(k)} - v_F^{(i)}$, (2.6)

where

$\dot{m}$	$= m_0/t_U$	constant mass flow rate
m	$= m_0 (1 - t/t_U)$	instantaneous mass
m_0		initial total mass
m_P		initial propellant mass
t_U		Burn Up time, fictitious
t_B		Burn Out time
μ	$\equiv m/m_0 = 1/(1 - t/t_U)$	mass ratio
ζ	$\equiv m_P/m_0 = t_B/t_U$	propellant factor
a	$= c_F/t_U$	initial acceleration
c_F		mean exhaust velocity;

these relations and definitions are treated in detail in Ref.[1]. The magnitude t_U is the fictitious time, after which the total rocket mass would be burnt up, assuming a constant burning rate of $\dot{m} = m_0/t_U$. In assuming a mean value for c_F, the minor influence of variable atmospheric counter pressure is averaged out. The exhaust velocity c_F is characteristic for the energy content of the propellant, which may be also expressed optionally by the so called "specific impulse"

$$I_S \equiv F/g\,\dot{m} = c_F/g, \qquad \text{in} \quad \frac{\text{lbs}}{\text{lbs/s}} \quad \text{or} \quad \text{s}.$$

The above velocity components will be combined in the *A*- and *B*-Phase vectorially, i. e., according to their proper relation and direction (see Fig. 3); this will be shown in the following paragraphs. The propulsion velocity v_F for a two stage rocket is represented separately in Fig. 4 as a

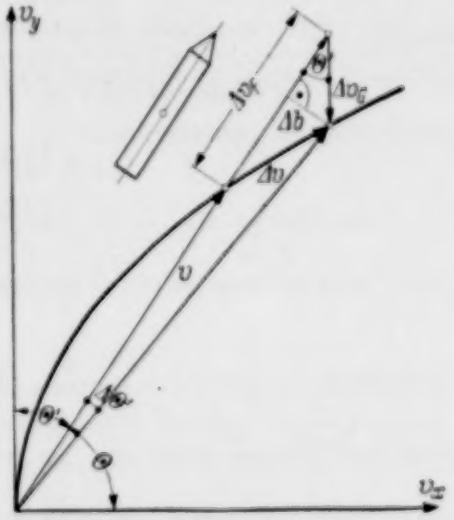


Fig. 3. Velocity Diagram of *A*-Phase.

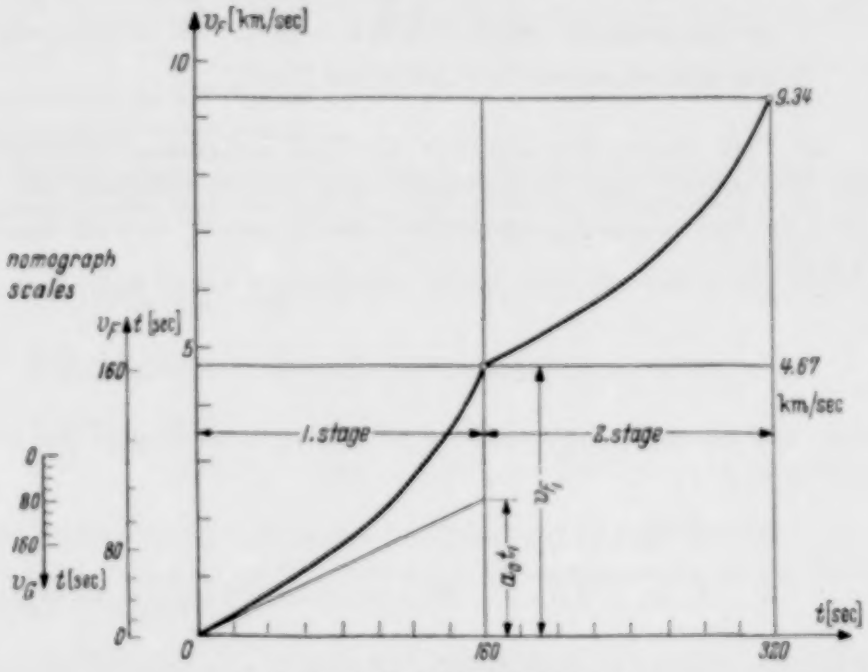


Fig. 4. Propulsion Velocity Component v_F.

function of time: the rate of increase grows continuously, corresponding to the gradual decrease of the rocket mass, starting from the initial acceleration a_0. This can also be seen clearly by an expansion of Eq. (2.5) into a power series:

$$v_F = a_0 t + \frac{a_0}{2 t_U} t^2 + \cdots \tag{2.7}$$

[1] *G. Sutton*, Rocket Propulsion, New York (1956).

The parameters c_F, μ of the second stage (or following stages) are supposed to be the same as for the first one, therefore the velocity diagram of the second stage can be completed very easily: one has just to add the velocity diagram of the first stage to its end velocity v_{F1}, as shown in Fig. 4.

3. A-Phase and Zero α-Program. a) Outline of Program. Big rockets are launched vertically for reasons of structural strength, as already explained. However, for optimal results, the transition to the final elevation angle $\psi(B)$ at the end of the Power Phase should start immediately after launch and be executed according to a continuous program. The velocity diagram can be derived from the zero α-condition Eq. (1.14) by composing the F- and G-components to the compound velocity v, according to Fig. 3, constituting the zero α-Program, or simply denoted as α-Case. The direction of v is coincident with the rocket axis at the moment t, defined by the angle ψ or Θ with respect to the x-axis or its complement Θ' with respect to the y-axis. For small angles Θ', the amount of v is approximately:

$$v \approx v_F - v_G \approx (a_0 - g)\, t\,. \tag{3.1}$$

As the next step, the velocity increments Δv_F, Δv_G of the interval Δt are composed vectorially:

Δv_F in the direction of v,
Δv_G in the direction of the $-y$ axis.

Now there follows the curvature relation directly from the geometry of the diagram: $\Delta b = \Delta v_G \sin\Theta' \approx g\,\Delta t\,\Theta'$,

$$\Delta\Theta' = \frac{\Delta b}{v} \approx \frac{g\,\Delta t\,\Theta'}{(a_0 - g)\,t}\,,$$

or by separation of the variables

$$\frac{\Delta\Theta'}{\Theta'} = n\,\frac{\Delta t}{t}\,,$$

where
$$n = \frac{g}{a_0 - g}\,; \tag{3.2}$$

by integration $\ln\Theta' = n \ln t + \ln C$, $\Theta' = C\,t^n$; (3.3)
the dimension of C is [rd/s^n] or [°/s^n].

b) Tilt Rate Parameter C. The integration constant C is the characteristic parameter for the initial- and consequently also for the complete tilt program. The C-values determine directly the kinematic parameters of the tilt rate $\dot\Theta'$ and tilt acceleration $\ddot\Theta'$, found by differentiating Eq. (3.3):

$$\dot\Theta' = n\,C\,t^{n-1}\,, \tag{3.4}$$

$$\ddot\Theta' = n\,(n-1)\,C\,t^{n-2}\,; \tag{3.5}$$

they are dependent on the value of n or a_0 according to Eq. (3.2) and turn to constants for special values of n:

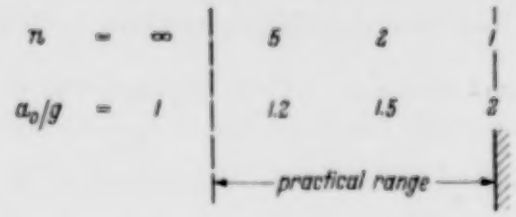
$n = 1,\ a_0 = 2\,g\,,$	$\dot\Theta' = n\,C\,[°/s]$	Constant Tilt Rate
$n = 2,\ a_0 = 1.5\,g\,,$	$\ddot\Theta' = n\,(n-1)\,C[°/s^2]$	Constant Accel. Rate.

Especially for the initial tilt rate $\dot\Theta'_0$ with $t = 0$, there is, according to the sign of the exponent:

n	> 1	< 1
$\dot\Theta'_0$	0	∞,

meaning that in the usual case $n > 1$, the tilt rate starts with zero in accordance with the vertical ascent. In the case $n < 1$, $a_0 > 2\,g$, the tilt rate would start with an infinite value, corresponding to a jump in Θ': this would be equivalent to a tilted launch and not to an initial vertical ascent, as specified; therefore, this case is not considered further. — The above analysis shows that the prac-

tical values of n and a_0 are contained in a rather restricted range, since moreover the initial Thrust to Weight Ratio a_0/g has to be > 1, so that the rocket will rise at all:



c) Integration of *C*-Velocity Curves. The above Eqs. (3.1) through (3.3) are employed to compute the beginning of the v-velocity diagrams, but may only be used to an upper limit of Θ'_{Lm}, tentatively

$$\Theta'_{Lm} < 0.1 \text{ rd},$$

dependent on the final accuracy required. Beyound that limit, the integration has to be carried on by numerical or graphical methods. Here, the transition from the vector $v^{(i)}$ to $v^{(k)}$ within the time interval Δt is shown in Fig. 5: the component $\Delta v_G = -g\,\Delta t$ is split in halves to obtain the mean direction

$$\psi_m \equiv \psi_{ik}$$

for plotting

$$\Delta v_F = v_F^{(k)} - v_F^{(i)}$$

according to Eq. (2.6). This procedure is adopted from that of *Brauer* and *Pflanz*[1] for the computation of ballistic trajectories. The formulae for the transition are:

$$\tan \psi'_{ik} = \frac{v_y^{(i)} + \Delta v_G/2}{v_x^{(i)}}, \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_x &= \Delta v_F \cos \psi_{ik}, & \Delta v_y &= \Delta v_F \sin \psi_{ik} + \Delta v_G, \\ v_x^{(k)} &= v_x^{(i)} + \Delta v_x, & v_y^{(k)} &= v_y^{(i)} + \Delta v_y. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

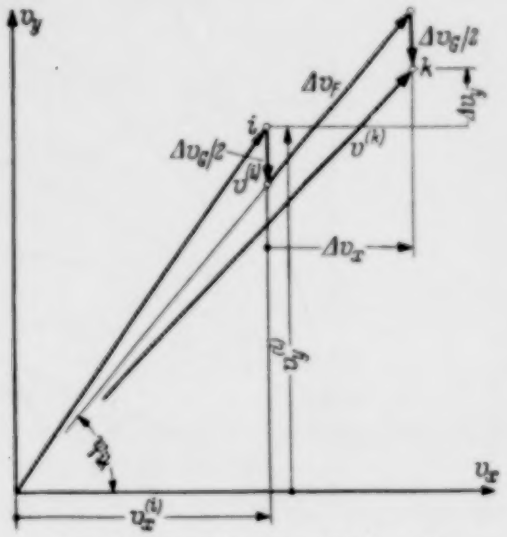


Fig. 5. v-Integration for α-Case ($\alpha = 0$).

The schedule for the numerical computation is set up in Table 1,a. The accuracy of the computation corresponds apparently to the trapezoidal integration rule. The error can be estimated by repeating the computation with steps of half the magnitude; as well known, the error is then reduced to 1/4 of the original amount.

To demonstrate the procedure, a numerical example has been set up, with the following numerical data:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = 14.5 \text{ m/s}^2, \quad t_u = 200 \text{ s}, \quad n = 2.09,$$

$$C = 0,\ 1/200,\ 1/100,\ 1/70,\ 1/50,\ 1/35,\ 1/10,\ 1/8,\ 1/6,\ 1/4,\ 1/3 \quad [^\circ/s^n].$$

The integration has been performed graphically in this case. The resulting C-velocity curves are represented in Fig. 6 and 7: they all start vertically and then turn over continuously to the horizontal, the more rapidly, the higher the C-values.

d) *A*-Layer Condition. The problem is now: where and when does the rocket, moving according to a C-velocity curve, reach the A-point, or emerge from the atmospheric layer h_A, as sketched in Fig. 2. Apparently, if a C-curve bends down to the horizontal axis v_x to rapidly, as happens with higher C-values, it may not reach the h_A-layer at all. — The solution is given by the numerical or graphical integration of the y-component of v, leading to the "A-Layer Condition":

$$y = \int_0^t v_y\, dt = h_A. \tag{3.8}$$

[1] *Brauer* and *Pflanz*, Wehrtechnische Monatshefte, Berlin (1937) p. 532.

The *A*-point can be transferred subsequently to the *C*-curve of Fig. 6. The *A*-Points of all the *C*-curves form there the *A*-Locus. The curves of higher *C*-values, which do not reach the *A*-Locus at all, may be also useful for other special flight programs, as explained below. —

The continuation of the *A*-Phase into the *B*-Phase will be treated in Chp. 5.

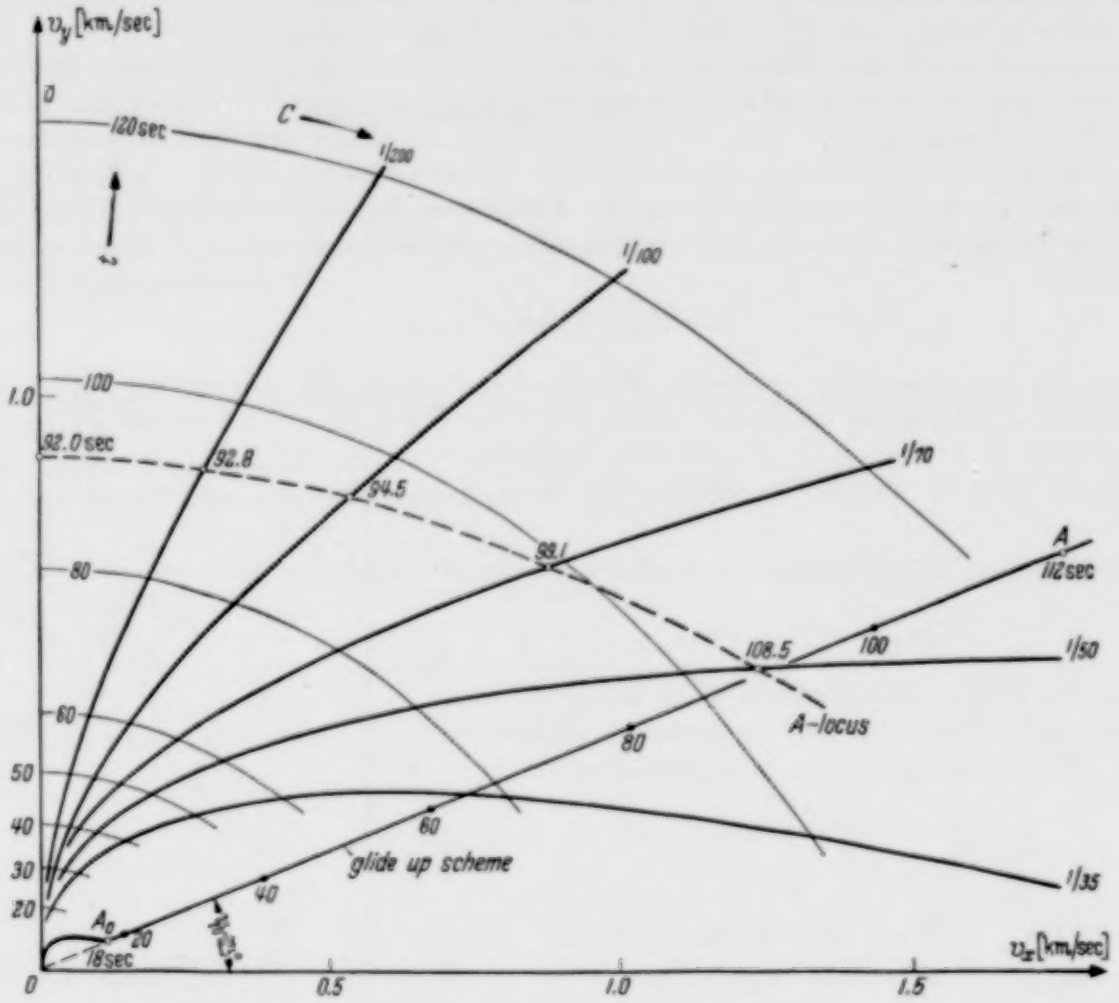


Fig. 6. *C*-Velocity Curves for Low Tilt Rate *C*.

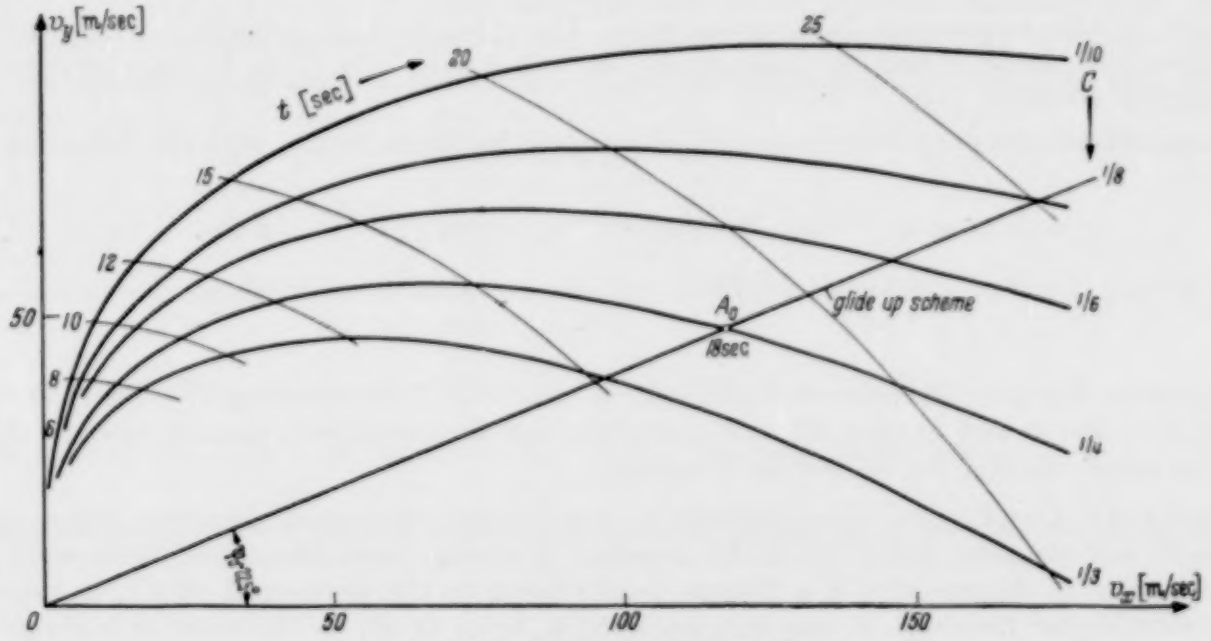


Fig. 7. *C*-Velocity Curves for High Tilt Rate *C*.

e) Tilt Parameter Correlation. After the *C*-curves have been plotted in Fig. 6 & 7, it is now possible to extract from them graphically the tilt angle Θ' as a function of t. This has been done in Fig. 8 for the family of curves of parameter *C*: the tilt programs are sinusoidal curves with

a horizontal tangent at 0, indicating of course, that the motion starts with a vertical ascent. The curves have a curvature $\ddot{\Theta}'_0$ at the origin 0 ($t = 0$), which can be evaluated numerically by equating the second order term of the series expansion:

$$\ddot{\Theta}'_0 = 2\,\Theta'/t^2 .$$

The results are plotted in Fig. 9 as a function of C: it is approximately a linear correlation, which can also be deduced formally from Eq. (3.5) and from the above numerical values, as

$$\ddot{\Theta}'_0 = n\,(n-1)\,C = 2.28\,C \qquad [^\circ s/^2] ,$$

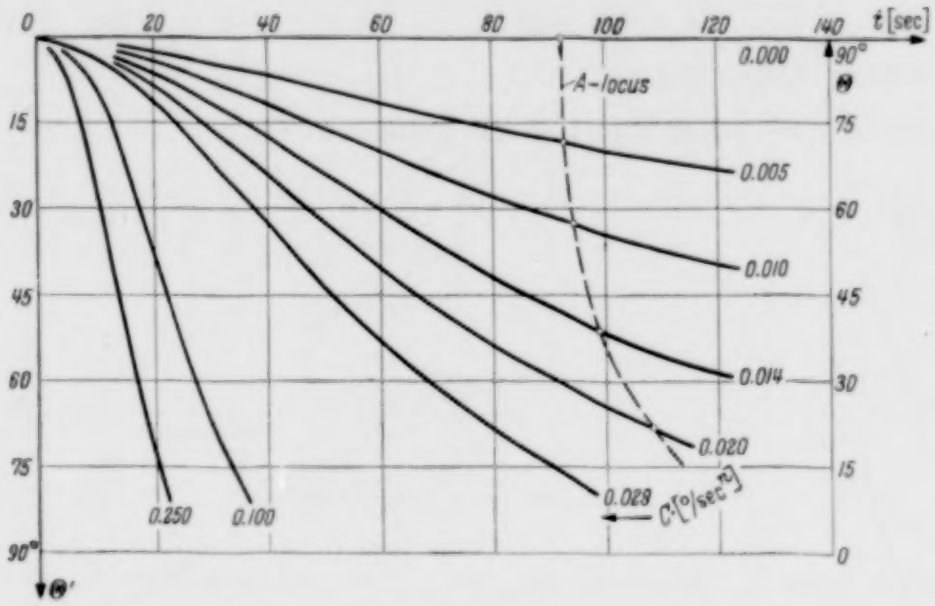


Fig. 8. Tilt Program $\Theta'(t)$.

where the approximation $t^{n-2} \approx t^\circ = 1$ has been introduced. This linear function is plotted in Fig. 9 as the straight line "a", in excellent arppoximation with the actual curve. —

In a next step, the maximum tilt rates $\dot{\Theta}'_{mx}$ of Fig. 8, identical with its inflexion tangents, are plotted in Fig. 9 as a function of C: it is again an essentially linear correlation. The time of $\dot{\Theta}'_{mx}$ is found empirically to be a near constant, $t_{mx} \approx 19.7$ s (see Fig. 9). With this value, it is possible to deduce $\dot{\Theta}'_{mx}$ from $\ddot{\Theta}'_0$ as:

$$\dot{\Theta}'_{mx} = \ddot{\Theta}'_0\, t_{mx} = 45\,C \qquad [^\circ/s] .$$

This linear function is the straight line "b" of Fig. 9, again in excellent agreement with the actual curve.

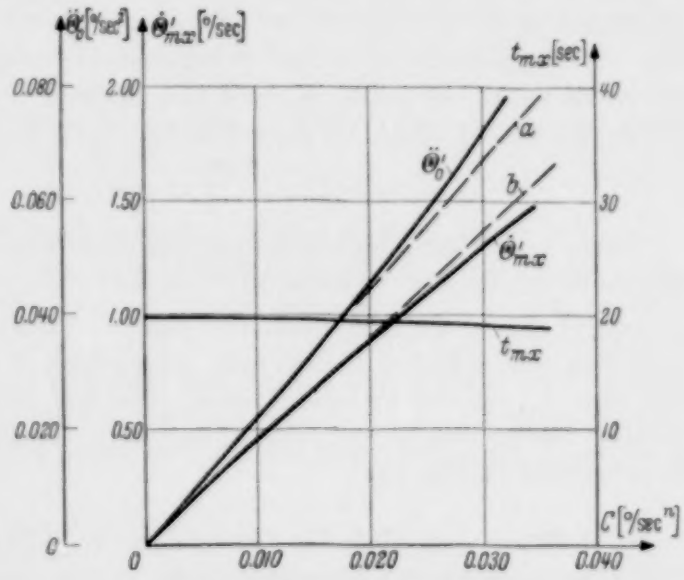


Fig. 9. Tilt Parameter Correlation.

The above analysis proves conclusively, that the Tilt Rate Parameter C defines comprehensively the total tilt program and its kinematic parameters.

f) Modified Tilt Programs. As a next step, one could now design control systems for the above tilt programs. — Moreover, additional simplifications could be considered. for instance, replacing the continuous C-program at 0 by a "Step Program", starting with a strictly vertical ascent during the time t_v. This schedule has been treated under various aspects[1]. However, it can be shown that by a special procedure, the "Tilt Stroke", one can turn over again to the original C-program in a rational manner: after the relatively short ascent time t_v the rocket is tilted instantly to the "Stroke" angle Θ'_S and is kept constant at that angle, until time t_S, when the same

[1] see Ref. 4 of p. 336.

angle would have been attained by the original C-program; angle Θ'_S would correspond to the impulse angle of attack of Ref.[1]. Since the velocity v of the rocket is still small at that time, there will be no excessive aerodynamic side force, so that the composition of velocities of Fig. 3 is still applicable. This is done in the velocity diagram of Fig. 10: components Δv_{FS} and Δv_{GS} result in v_S, while Δv_{FS} and v_S are parallel to the rocket axis in the direction Θ'_S, according to the underlying kinematics. The following kinematical geometrical relations can be deduced from the diagram, owing to the similarity of the triangles:

$$v_S/v_v = \Delta v_{FS}/\Delta v_{GS}$$

and according to Eqs. (3.1), (2.6), (2.3):

$$v_S = (a_0 - g)\, t_S\,, \qquad v_v = (a_0 - g)\, t_v\,, \qquad \Delta v_{FS} = a_0\, \Delta t\,, \qquad \Delta v_{GS} = g\, \Delta t\,;$$

$$\text{by substitution:} \quad t_S/t_v = a_0/g\,. \tag{3.9}$$

This relation shows that the stroke time t_S is independent of Θ'_S.

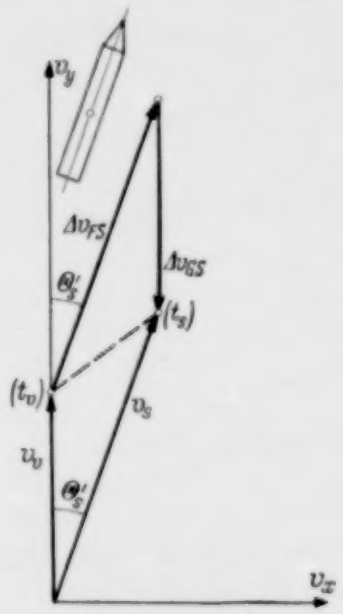


Fig. 10. Tilt Stroke.

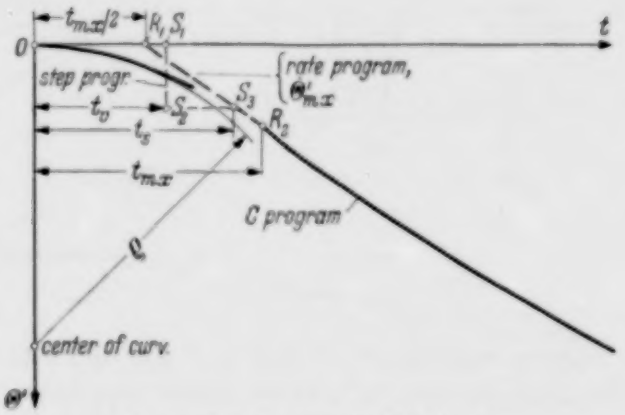


Fig. 11. Tilt Program Modifications.

For a better insight, the "Tilt Stroke" Program is plotted in Fig. 11 as a function of time and presented in its relation to the C-Program: After the time t_v, the tilt angle Θ' jumps from zero to Θ'_S, or from point S_1 to S_2 and is kept at that nagnitude, until time t_v, where the Step Program is absorbed again, at point S_3, into the original C-Program. The amount of Θ'_S can be computed, according to Eq. (3.3), for any selected C-value; a numerical example is:

$$t_v = 12\ \text{s}\,, \qquad t_S = 17.7\ \text{s}\,, \qquad C = 1/70, \qquad \Theta'_S = 2.9^\circ\,.$$

There are other possible transitions from the vertical ascent to the selected C-Program which have a better degree of continuity than the "Tilt Stroke": the "Rate Program" of Fig. 11 provides a vertical ascent until R_1 and after that a change over to the constant tilt rate $\dot{\Theta}'_{mx}$ of the corresponding and selected C-Program, into which it merges again at the inflexion point R_2 of C, at the time t_{mx} of the inflexion point. The arc OR_2 of the C-Program is parabolic. The time of vertical ascent OR_1 of the Rate Program is therefore $t_{mx}/2$, according to basic parabola geometry, as presented in Fig. 11.

4. A-Phase and Glide Up Scheme. a) Equation of Motion and Force Diagram. The search to improve the economy of the rocket propulsion has to look for possibilities to attain a maximum end velocity with a given amount of fuel: one of the feasible approaches is by applying aerodynamic lift forces for compensating partially for the influence of the vehicle weight W. The rocket moves in this case like gliding up on a plane, inclined at a given and constant elevation angle ψ_0. The Force Diagram of such a "Glide Up Scheme" is represented in Fig. 12: Weight W perpendicular to x-axis, Lift L perpendicular to and Drag D opposite to the direction of motion v and Rocket Trust F in the direction of the rocket axis under angle Θ; this configuration is also

[1] see Ref. 4 of p. 336.

noted shortly as "L-Case". The resultant R in flight direction v and the condition of equilibrium perpendicular to v are, respectively:

$$R = F\cos\alpha - D - W\sin\psi_0\,, \tag{4.1}$$

$$W\cos\psi_0 = L + F\sin\alpha\,. \tag{4.2}$$

The angle of attack α can be determined by Eq. (4.2) as a function of velocity v and air density ϱ, or altidude h; it is normally a small quantity, and therefore, its cosine can be taken approximately as 1. — A third equation would express the equilibrium of moments around the lateral axis through 0

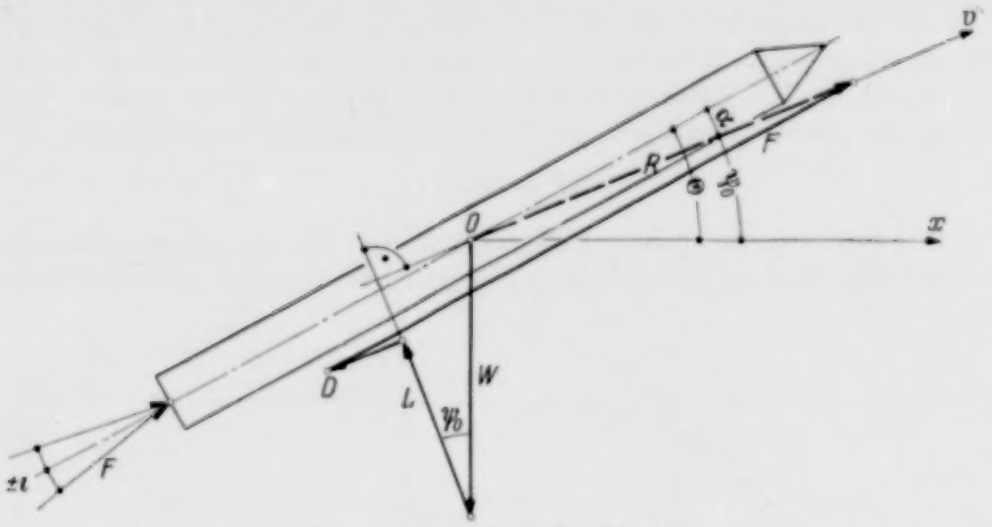


Fig. 12. Force Diagram of Glide Up Scheme.

(center of gravity), which could be used to determine the small deflection angles ι of the rocket motor, needed for pitching equilibrium. But this constitutes a separate problem of stability control and is not trated here. The aerodynamic Drag D is neglected at first, in accordance with Chp. 2. Using these approximations, Eq. (4.1) simplifies to:

$$R = F - W\sin\psi_0\,; \tag{4.3}$$

this leads to the equation of motion along the flight path Ψ_0:

$$\dot v = \frac{R}{m} = \frac{F}{m} - \frac{m\,g}{m}\sin\psi_0 = \dot v_F - g\sin\Psi_0\,;$$

by integration from the beginning A_0 of the Glide Up Phase, at the time $t(A_0)$ and with v_F according to Eq. (2.3):

$$\left.\begin{aligned} v &= v(A_0) + \Delta v_F - g\sin\psi_0\,\Delta t\,, \\ \text{where}\qquad \Delta v_F &\equiv v_F - v_F(A_0)\,, \qquad \Delta t \equiv t - t(A_0)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

b) Composition of the Launch- and Glide Up Sections of the A-Phase.

Also with the Glide Up Scheme, the rocket has to be launched vertically at first: During this first phase, it has to be transferred suitably from the vertical launch point at O in the velocity diagram of Fig. 7 to the Glide Up path at A_0, along a C-curve of high tilt rate: The rocket should reach its scheduled elevation angle ψ_0 as soon as possible; but on the other hand the velocity $v(A_0)$ must also be big enough to produce the required L with an acceptable α. These conditions seem to be reasonably well met with the tentative numerical values, underlying the example of Fig. 7:

$$C = 1/4\,, \qquad t(A_0) = 18\text{ s}\,.$$

Now the A-Layer condition, according to Eq. (3.8), can be evaluated. The results are transferred to Fig. 6: there is a considerable gain in the end velocity $v(A)$ of roughly 30% compared with the values of the Zero α-Program. However, this advantage will be decreased relatively during the B-Phase, where the major velocity built up takes place for both cases (α- and L case) by identical subprograms; nevertheless, there is still a perceptible end gain.

5. B-Phase. a) Optimal Θ Theorem. After the vehicle has passed point A of the appreciable atmosphere, its attitude angle Θ can be set independently of the flight path angle ψ, since the aerodynamic forces can be neglected above the A-Layer. The problem is now to find that Θ angle,

which gives the maximum end velocity vector v with a specified direction angle ψ. Obviously the rocket axis has to have a certain lead angle α in order to compensate the gravitational influence (see Fig. 13): the increments of the rocket velocity Δv_F and the gravitational component Δv_G define the increment Δv in the corresponding differential triangle. — The nearest approach is seemingly to integrate the increments Δv_F vectorially in such a way, that the resultant increments Δv all add up in the one fixed direction

$$\psi = \text{const}\,.$$

This integration is made graphically in the a-case of Fig. 13 with the values v_F according to the first stage of Fig. 4: The integrated Δv_F elements present the curved line $v_F(a)$, whose arc length is identical with the velocity v_F. It is obvious now that the a-case is not the optimum configuration, but can be transformed into it by simply stretching the $v_F(a)$ to a straight line $v_F(b)$ and moving the end point B_F along the given v_G-Parallel: this leads to the optimal configuration of the b-case with

$$\Theta = \text{const}\,.$$

The meaning of this well known optimum theorem is that the rocket propulsion should best be applied in one fixed direction in inertial space, in order to transfer the total momentum output into the vehicle. —

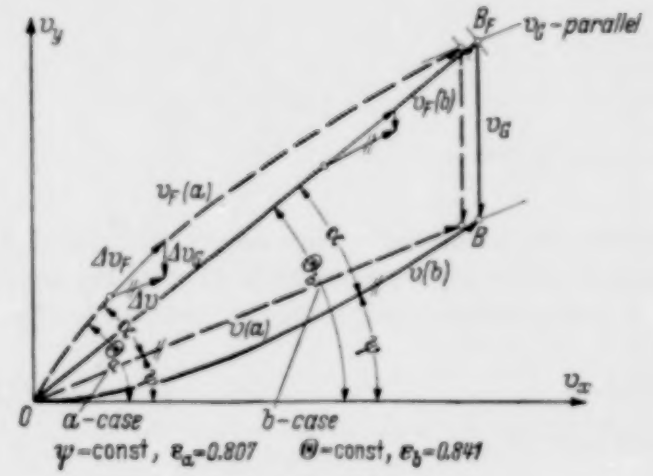


Fig. 13. Optimal Θ-Thorem.

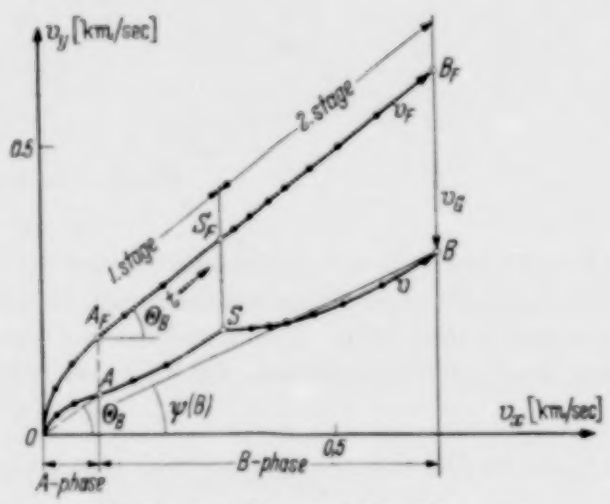


Fig. 14. v_F, v-Diagram, a-Case ($C = 1/70$).

For the case of a constant rocket acceleration $a_F = \text{const}$, all the differential triangles of the a-case for equal time intervals are identical. Therefore, the Δv_F elements line up in one straight direction: the a- and b-case are here identical. The same conclusion is applicable, if one considers only the average acceleration $a_{Fm} = v_F(B)/t(B)$.

The Optimum Θ Theorem will be employed generally for the composition of the A- and B-Phases: it means that the attitude angle Θ, attained at point A, will be maintained throughout the B-Phase until Burn Out point B

$$\Theta(A) = \Theta(B) = \text{const}\,; \tag{5.1}$$

the tilt program curves of Fig. 6 for the time $t(A)$ establish these end values.

b) Formantion of v-Diagrams. It is instructive to design the v-Diagram (Hodograph) for the complete Power Phase. This is done in Fig. 14 for the α-case and $C = 1/70$: the v-curve of the A-Phase is already plotted in Fig. 6 and can be transferred to the new graph in correct scale. The arc OA of the resultant velocity v is now reduced to the propulsion velocity v_F by vectorially substracting the component

$$v_G = g\,t\,,$$

resulting in the arc OA_F. The direction OA defines the angles

$$\psi(A) = \Theta(A) = \Theta(B)$$

and simultaneously is also tangent to the v_F-curve in A_F; according to the Optimal Θ-Theorem, it is also the constant direction for the v_F-increments during the B-Phase. The v_F- and v_G-increments for 20 sec intervals have been prepared in the nomograph scales of Fig. 4 for convenient plotting: at first v_F for the B-Phase is completed for the successive t-intervals, and after that, the corre-

sponding v_G-components are plotted, leading to the resultant v-curve. It is to be noted, that the tangents of the v- and v_F-curves in A respectively A_F are continuous, as an evident consequence of the Optimal Θ-Theorem. On the other hand, the staging point S shows a discontinuity, caused by a jump in acceleration.

In Fig. 14, the whole range of v_F and v is shown with respect to the time t, for a specific and characteristic example. Similar diagrams can be drawn for other parameters and their variations; also other cases, like the L-Case, could be included. However, to investigate the efficiency of different combinations, it is sufficient to compare their end velocity $v(B)$ only, with reference to the Burn Out point B. The formation of $v(B)$ is shown in Fig. 15 for the different basic cases.

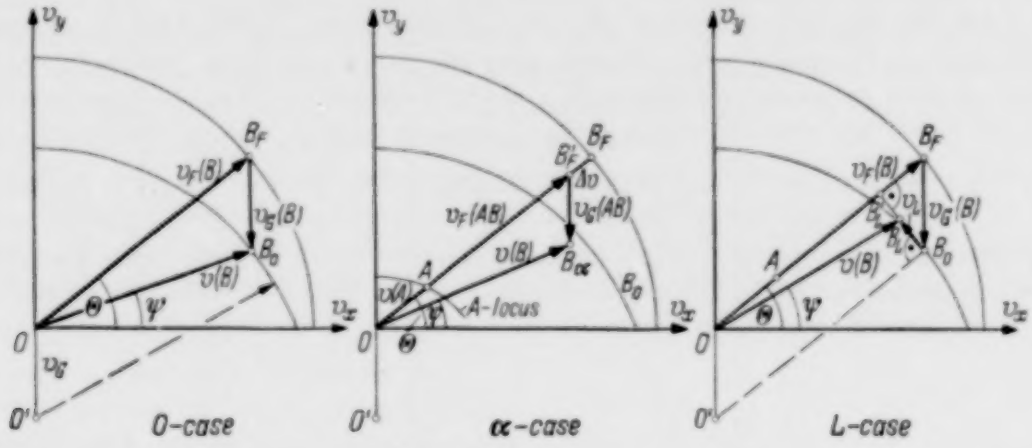


Fig. 15. $v(B)$-Formation.

O-Case. This case is named according to the abstraction, that the influence of the A-Phase is gradually decreasing and is put finally to zero, at the limit: it consists therefore only of the B-Phase. — This case is important as a referenc standard, inasmuch as both the α- and L-case converge towards it, if the A-Phase vanishes gradually. — The diagram shows the formation of $v(B)$ for varying angles ψ and Θ. The locus B_F of $v_F(B)$ is a circle around O with radius $v(B)$. The locus B_0 of $v(B)$ is formed by translating locus B_F by the vector $v_G(B)$: it is therefore also a circle with radius $v_F(B)$ but around O', this time. For numerical computation, it is according to the geometry of the graph:

$$v(B)_x = v_F(B)\cos\Theta\,, \qquad v(B)_y = v_F(B)\sin\Theta - v_G(B)\,,$$
$$\tan\psi = v(B)_y/v(B)_x\,.$$

α-Case. The O-case is here used as a reference basis. Point B_F is defined by Θ and $v_F(B)$. Point B_F' of the α-case is found by the displacement

$$\Delta v = v_F(A) - v(A)\,,$$

where $v(A)$ can be taken from Fig. 6. — After that, point B_α of the $v(B)$-Locus is fixed by the displacement

$$v_G(AB) = g\,[t(B) - t(A)]\,.$$

It can be clearly seen that B_α lies under the B_0-Locus. — For numerical computation, the following formulae may be used:

$$v(B)_x = [v_F(B) - \Delta v]\cos\Theta\,, \qquad v(B)_y = [v_F(B) - \Delta v]\sin\Theta - v_G(AB)\,,$$
$$\tan\psi = v(B)_y/v(B)_x\,.$$

L-Case. The transition period OA_0 from the vertical start to the "Glide Up" path (see Fig. 7) is so short with respect to the total Power Phase, that it can be neglected for a simplified survey. — The "Glide Up" path runs then from O to A with the flight path angle $\psi(A) = \Theta$, maintained by the lift $L = W\cos\Theta$ (Fig. 12), perpendicular to OA (Fig. 15). Beyond point A, the attitude angle Θ is maintained during the whole B-Phase. Point B_0 of the reference O-Case can now be plotted in a first step (Fig. 15). From here, the transition is made to the end point B_L of $v(B)$, by adding vectorially the velocity increment v_L, corresponding to the impulse of the Lift L during the "Glide Up" time $t(A) - t(A_0) \approx t(A)$, representing the only missing supplementary term, with respect to the O-Case:

$$v_L = g''\,t(A) = g\cos\Theta\,t(A)\,.$$

Obviously point B_L lies above the locus of B_0. — It is further noted that, if the A-Phase would extend until the Burn Out point B, or if $t(A) = t(B)$, then point B_L would fall into the end point B'_L of the perpendicular.

The computation formulae for $v(B)$ can directly be deduced from the geometry of the graph:

$$v(B)_x = v_F(B)\cos\Theta - v_L\sin\Theta\,, \qquad v(B)_y = v_F(B)\sin\Theta - v_G(B) + v_L\cos\Theta\,,$$
$$\tan\psi = v(B)_y/v(B)_x\,.$$

The optimal end velocities for the different power programs of the O-, α-, L-Case have been computed according to the above deductions and have been plotted in the diagram of Fig. 16. The following features are remarkable:

a. For all cases, the amount of $v(B)$ or the momentum output of the propulsion phase increases with decreasing ψ, i. e., the more nearly horizontal the rocket is fired (see below).

b. Case L is always superior to Case α for any elevation ψ. For $\psi = 0$, where the rocket weight would be borne by the lift during the complete power phase, one could achieve even

$$v(B) = v_F(B)\,,$$

which would mean a 100% efficiency in impulse transfer. — However, this particular case has to be analyzed eventually in more detail, in view of the increasing influence of the aerodynamic Drag.

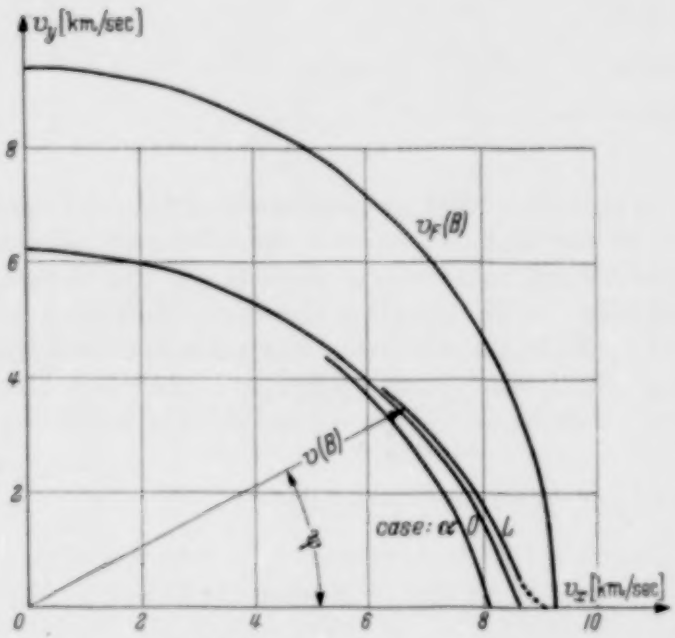


Fig. 16. End Velocity Diagram $v(B)$.

c) Stretch Factor ε. The objective of the power phase is to transfer the highest possible amount of the propulsion velocity v_F (corresponding to the propulsion impulse), into

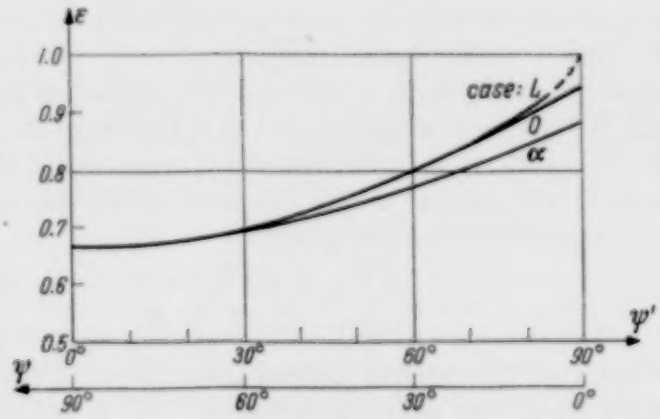


Fig. 17. $\varepsilon(B)$-Chart.

the compound end velocity v. The efficiency of this transfer can be characterized by the ratio of these two velocities. This special parameter shall be noted as "Stretch Factor"

$$\varepsilon \equiv v/v_F\,;$$

the name just indicates, that v would have to be stretched by a certain amount to obtain v_F.

The numerical values of ε for the different cases of the power program have been evaluated and plotted in Fig. 17: they increase with decreasing ψ and are greater for the L- than for the α-case. In the L-case and for $\psi = 0$, it is even possible to reach the upper limit $\varepsilon \to 1$, as mentioned already above.

The concept of the Stretch Fact oıproves especially valuable in design studies. Here, the initial velocity v of the free flight for a special trajectory or orbit is known or has ben computed under the abstraction of impulse launching, i. e., impulse transfer in a negligibly short time. However in reality, the impulse has to be transferred during the well perceptible time of the power phase, which requires the input of a larger propulsion velocity v_F. The formal transition from v to v_F can be conveniently made by means of the stretch factor ε, which can be considered as a known quantity, prepared by preliminary computations and tabulations. — After the propulsion velocity v_F is known, one could proceed, for instance, to design the details of a suitable propulsion system.

d) Conditions for Maximal Energy Content. Reviewing the end velocities of Fig. 16, it can be seen that they approach the closer the limit velocity v_F of the impulse input, the more they are approaching the horizontal. Simultaneously, the Kinetic Energy K of the vehicle, with the end mass m is also increasing:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 .$$

By differentiating

$$\Delta K = m v \cdot \Delta v ,$$

one sees that the same input Δv by the rocket propulsion is multiplied by the factor v in obtaining the energy increase ΔK. For maximum energy effect, it is therefore best, to transfer the rocket impulse to the vehicle at as high velocities as possible. This means that a velocity decrease by gaining altitude should be avoided. Though potential energy would be gained in this case, the total loss by the diminished efficiency in the transfer of the kinetic energy surpasses the gain by far, as will be shown by the following discrete example.

For a simplified survey, it is assumed that the launch will be made by a mean and constant acceleration a_m, during the Burning Time t_B. Two cases will be considered, Case "a" — horizontal launch and Case "b" — vertical launch. For both cases, the Total Energy E as the sum of Kinetic (K)- and Potential (P)-Energy will be computed; $E = K + P$ is an important quantity in the orbit theory, determining directly the semi major axis "a" of the orbital ellipse, according to Eq. (1.4).

Case "a":

$$v = a_m t_B , \qquad h = 0 ,$$

$$E_a = K + P = \frac{1}{2} m v^2 + 0 ,$$

$$E_a \frac{2}{m t_B^2} = a_m^2 .$$

Case "b":

$$v = (a_m - g) t_B , \qquad h = \frac{1}{2} v t_B ,$$

$$E_b = K + P = \frac{1}{2} m v^2 + m g h ,$$

$$E_b \frac{2}{m t_B^2} = a_m (a_m - g) .$$

The ratio $E_a/E_b =$ is found by division:

$$E_a/E_b = a_m/(a_m - g) .$$

Numerically, according to the rocket data of Fig. 4, the mean acceleration is $a_m = v_{F1}/t_{B1} \approx 3\,g$; therefore

$$E_a/E_b \approx 1.5 .$$

This verifies, that the horizontal launch is distinctly superior to the vertical launch and by inference also to any intermediate inclined case, since it contains a vertical component.

The above principle, to transfer the rocket impulse to the vehicle at as high a velocity level as possible, is of a general nature. It can be applied to both, missile- and satellite launching.

6. Integration of A-Phase Perturbations. a) Perturbation Terms. After the Reference Trajectory has been computed according to the above procedures, its numerical values can be refined by applying the formerly neglected perturbation terms. They consist of:

D-Term, dealing with the influence of the aerodynamic forces, in the α-case particularly with the Drag D, which is applied vectorially in the opposite direction of v or Δv_F of Fig. 5.

H-Term, for the decrease of the amount of the gravitational constant g with increasing altitude, applied in the y-direction.

C-Term, for the directional variation of g with respect to the inertial xy-system, due to the curvature of the earth, and having a x- and y-component (see Fig. 19).

D-Term

The Drag force is usually written in the form

$$D = c_D \frac{\varrho}{2} v^2 A ,$$

where

c_D Drag coefficient, a function of *Mach* Number $M \equiv v/c_S$, plotted in Fig. 18 for a conventional two stage rocket,
ϱ air density,
A rocket maximum cross section.

Substitution of D into the equation of motion (2.1) for P, and integration gives the D-velocity component Δv_D,

$$\Delta \dot{v}_D = D/m \equiv a_D\,, \qquad \Delta v_D = \int a_D\, dt\,, \tag{6.1}$$

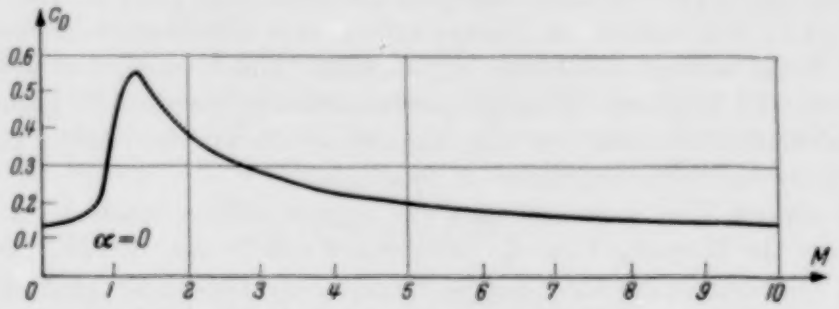


Fig. 18. Drag Coefficient c_D for Conventional Two Stage Rocket.

while a_D [m/s²] can be expressed in g_0 and two dimensionless factors:

$$a_D = g_0 \cdot \frac{q_0 A}{W_0} \cdot \mu\, M^2\, c_D\, R_\varrho\,,$$

where

g_0	gravitational constant at sea level,
$q_0 = \frac{\varrho_0}{2} c_S^2$	dynamic pressure for $M = 1$ at sea level,
$M = v/c_S$	*Mach* Number,
c_S	velocity of sound,
W_0, m_0	take off weight, mass of rocket,
$\mu = m/m_0 = 1/(1 - t/t_U)$	mass ratio,
$R_\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_0} = e^{-h/h_\varrho}$	density ratio, h_ϱ rate altitude.

The second dimensionless factor combines exclusively all the variable factors of a_D. The quantity R_ϱ defines the density decrease of the atmosphere with increasing altitude. The above e-function is well suited for usual computations. The rate altitude h_ϱ can be computed or estimated for an isothermal atmosphere by

$$h_\varrho = R\, T\,,$$

with average values of the gas constant R and the absolute temperature T for the considered altitude range to be covered. — Further refinement can be readily implemented any time, if deemed desirable and if an accurate tabulated function of R and T is available.

The above quantities are all numerically known; the integration can therefore be performed as a straightforward quadrature.

b) Coordinate Transformation. Before proceeding to the other terms, it is necessary to deduce the formulae for transforming the cartesian coordinates xy of the vehicle at O_v into the geocentric coordinates $\varphi\, r$, Fig. 19:

Range Angle	$\tan \varphi = x/(r_0 + y)\,,$
Radius	$r = [(r_0 + y)^2 + x^2]^{1/2}\,,$
Altitude	$h = r - r_0\,.$

These relations can be transformed by series expansion into the following approximations:

$$\varphi \approx \frac{x}{r_0 + y}\,, \qquad h_C = h - y \approx \frac{x^2}{2\,(r_0 + y) + h_C} \approx \frac{x^2}{2\,(r_0 + y)}\,; \tag{6.2}$$

they are very accurate for small angles, and their application will be restricted to that range.

c) *H*-Term. The gravity acceleration g is dependent on the distance from the earth center r, according to the well known relation

$$g = g_0(r_0/r)^2 ;$$

by differentiation $\quad \Delta g = -g_0 \cdot 2\, h/r_0 ,$

where $\quad \Delta g = g - g_0 , \qquad \Delta r = r - r_0 = h .$

Practically, the accuracy of the series expansion can be further increased by taking as reference value the estimated mean radius r_m or mean altitude h_m of the *A*- or *B*-Phase respectively, instead of the surface radius r_0; then it is more generally:

$$\Delta g = -g_m \cdot 2\, \Delta h/r_m , \tag{6.3}$$

where $\quad \Delta h = h - h_m , \qquad g_m = g_0(r_0/r_m)^2 .$

The velocity correction Δv_H follows by integration

$$\Delta v_H = -\int \Delta g\, dt , \tag{6.4}$$

to be added in the $+y$ direction. — The signs have to be handled consistently: for a positive Δh, the sign of Δg is negative according to Eq. (6.3), and therefore according to Eq. (6.4) that of Δv_H is positive, i. e., Δv_H would be applied in the $+y$ direction.

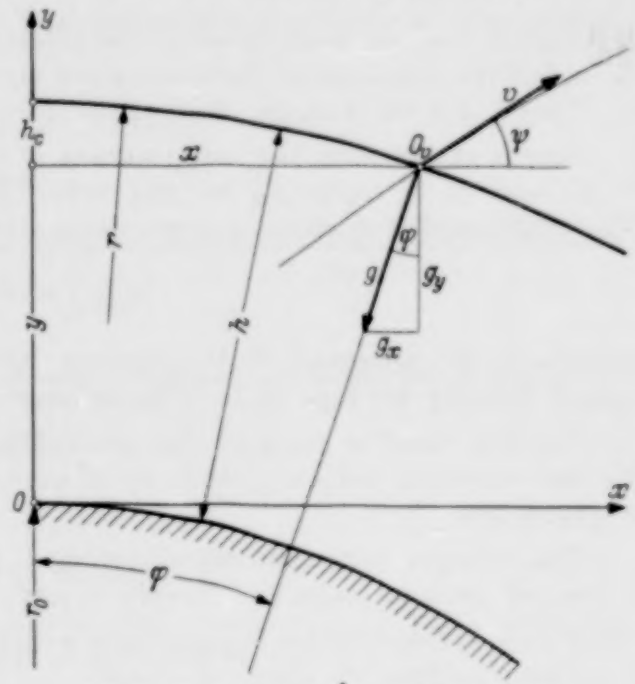


Fig. 19. Trajectory—Coordinate Transformation.

d) *C*-Term. The gravity acceleration vector g is inclined to the y axis by the range angle φ, since it always points towards the earth center. Its components in the xy-system are

$$g_x = -g \sin\varphi , \qquad g_y = -g \cos\varphi ;$$

they can be expanded into series with respect to φ and for the following initial- or reference values

$$g_{0x} = 0 , \qquad g_{0y} = -g_m ;$$

the first terms of the series or the g-increments are then

$$g_{Cx} = g_x - g_{0x} = -g_m \varphi , \qquad g_{Cy} = g_y - g_{0y} = g_m(1 - \cos\varphi) = +g_m \frac{\varphi^2}{2} . \tag{6.5}$$

The velocity corrections are found by integration:

$$\Delta v_{Cx} = -g_m \int \varphi\, dt , \qquad \Delta v_{Cy} = +g_m \int \frac{\varphi^2}{2}\, dt . \tag{6.6}$$

Of course, the same mean value g_m has also to be applied in the reference value $\Delta g_G = g_m \Delta t$ of Eqs. (2.3) and (3.7).

e) Computation Schedule. The above deduced relations for the *A*-Phase are arranged and compiled in the schedule of Table 1 for convenient use in practical computation. It is subdivided into two parts:

Table 1. *Computation Schedule of A-Phase*, $\alpha = 0$

a. Integration Scheme

	← *t*-Step Computation →										Quadrature ←				
	$\Delta v_G + \Delta v_y^{(s)}$	$\Delta v_F - \Delta v_D$	$\operatorname{tn}\varphi_m$	$\operatorname{cs}\varphi_m$	$\operatorname{sn}\varphi_m$	Δv_x [1] $+ \Delta v_{Cx}$ [2]	Δv_y	v_x	v_y	v	x	y	h_C	h	φ
ϑ	m/s	m/s				m/s [3]	m/s	m/s	m/s	m/s	km	km	km	km	rd
Reference Function, *It*-Step 0															
⋮															
Iterated Function, *It*-Step 1 . . . *n*															

[1] Reference Heading
[2] Iteration Heading
[3] Dimension

b. Perturbation Terms, by Quadrature

←			D			→	← H →	←	C	→		
t	μ	M	e_D	h/h_Q	R_Q	a_D	Δv_D	Δg	Δv_H	$g\varphi$	Δv_{Cx}	$\frac{1}{2} g \varphi^2$	Δv_{Cy}
s						m/s²	m/s	m/s²	m/s	m/s²	m/s	m/s²	m/s

Iterated Terms, *It*-Step 1 . . . *n*

⋮

Part *a*, for the integration of the reference trajectory and the absorption of the perturbation terms of the subsequent Iteration steps (It-steps);

Part *b*, for the computation of the perturbation terms.

Part *a* starts with the computation of the reference trajectory by *t*-steps, according to Eqs. (3.6) and (3.7), resulting in the velocity components of v (portion: "*t*-Step Computation"). The additional quantities $x\,y$ are computed by straightforward integration

$$x = \int v_x\, dt\,, \qquad y = \int v_y\, dt\,, \tag{6.7}$$

preferably by *Simpson*'s Rule (portion: "Quadratures"); the remaining quantities h_C h φ are computed directly by Eqs. (6.2). The reference values are noted as It-step 0.

Part *b* is used to compute the perturbations $D\,H\,C$ according to Eqs. (6.1) through (6.6), fed by the reference values (*It*-step 0) of part *a*, and by direct quadrature. The schedule is self explanatory.

The velocity perturbations of *It*-step 1, part *b*, are fed back to part *a* for absorption into the corrected integral values of *It*-step 1, part *a*. They are arranged into the groups

$$\Delta v_y^{(s)} \equiv \Delta v_H + \Delta v_{Cy}\,, \qquad -\Delta v_D\,, \qquad \Delta v_{Cx} \tag{6.8}$$

and added to the columns for

$$\Delta v_G\,, \qquad \Delta v_F\,, \qquad \Delta v_s$$

respectively. The geometrical addition of the velocity terms is shown in the diagram of Fig. 20. — Going back to the computation schedule, the portion of *t*-step computation, part *a* has to be reiterated, since the velocity increments (6.8) change the angles ψ_m and therewith the conditions of the subsequent *t*-steps. The procedure leads to the integral values of *It*-step 1, part *a* and is self explanatory. The computation is reiterated by switching over from part *a* to *b* and back again, until the end values of the last *It*-step of part *a* are not changed any more, compared with the precedent step. — The convergence rate is very rapid.

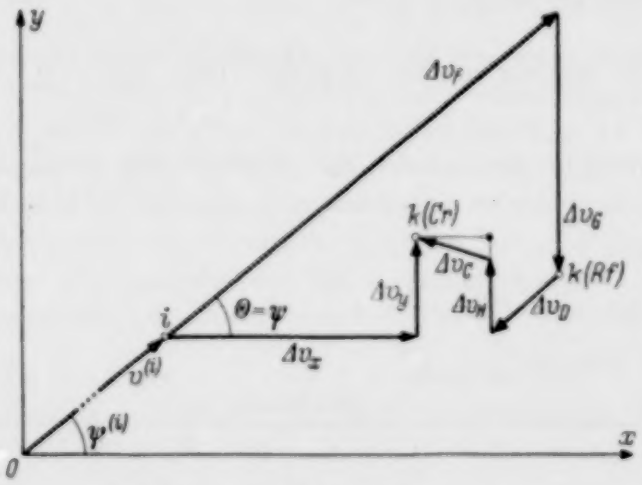


Fig. 20. Velocity Terms, *A*-Phase, a-Case.

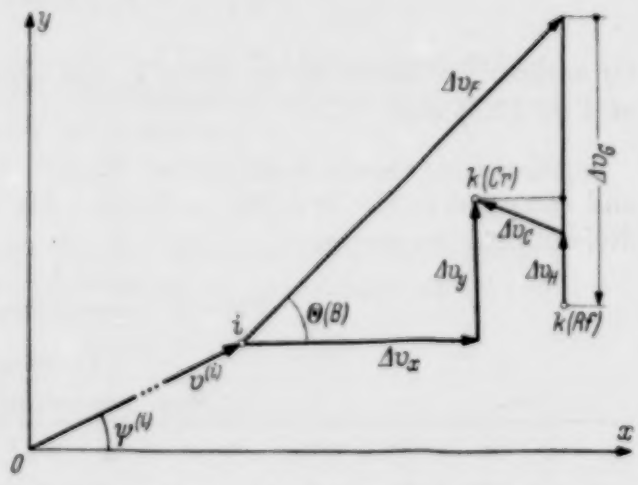


Fig. 21. Velocity Terms, *B*-Phase.

7. Integration of *B*-Phase Perturbations. a) Computation Schedule. The computations of the *B*-Phase are assembled in Table 2, parts *a* and *b*; they are strictly analogous to those of the *A*-Phase. Moreover, appreciable simplifications are possible here, due to the fact that the *D*-Term

is absent and that the angle $\Theta(B)$ is constant. The reference trajectory is computed in part *a*, *t*-step portion, by the simplified formulae, analogous to Eqs. (3.7):

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_x &= \Delta v_F \cos\Theta(B)\,, & \Delta v_y &= \Delta v_F \sin\Theta(B) + \Delta v_G\,, \\ v_x^{(k)} &= v_x^{(i)} + \Delta v_x\,, & v_y^{(k)} &= v_y^{(i)} + \Delta v_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

where k and i are consecutive *t*-steps. The numerical integration is subsequently performed in the portion of "Quadrature", preferably by *Simpson*'s Rule.

The computations of part *a*, *It*-step 0, and part *b*, *It*-step 1, are identical in formulae and schedule with those of the *A*-Phase. The diagram of Fig. 21 demonstrates the vectorial composition of the velocity terms of the *B*-Phase.

Table 2. *Computation Schedule of B-Phase.*

a. Integration Scheme

	← *t*-Step Computation →						← Quadrature →				
t	Δv_G	Δv_F	Δv_x	Δv_y	v_x $+\Delta v_{Cx}$	v_y [1] $+\Delta v_y^{(s)}$ [2]	x $\Delta x^{(s)}$	y $\Delta y^{(s)}$	h_C	h	φ
s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s	m/s [3]	km	km	km	km	rd

Reference Function, *It*-Step 0
⋮
Iterated Function, *It*-Step 1 . . . n

[1] Reference Heading
[2] Iteration Heading
[3] Dimension

b. Perturbation Terms, by Quadrature

	← *H* →		← *C* →				← *S* →		
t	Δg	Δv_H	$g\varphi$	Δv_{Cx}	$\frac{1}{2} g \varphi^2$	Δv_{Cy}	$\Delta x^{(s)}$	$\Delta v_y^{(s)}$	$\Delta y^{(s)}$
s	m/s²	m/s	m/s²	m/s	m/s²	m/s	km	m/s	km

Iterated Terms, *It*-Step 1 . . . n
⋮

Another considerable simplification is made possible by the condition:

$$\Theta(B) = \text{const}\,.$$

The velocity corrections

$$\Delta v_{Cx}\,, \qquad \Delta v_y^{(s)} \equiv \Delta v_H + \Delta v_{Cy}$$

can be integrated and transformed into the coordinate corrections by the quadratures

$$\Delta x^{(s)} = \int \Delta v_{Cx}\, dt\,, \qquad \Delta y^{(s)} = \int \Delta v_y^{(s)}\, dt\,. \tag{7.2}$$

These quantities are added to the corresponding values of part *a* to obtain the integral values of the next *It*-step $(n+1)$, part *a*, without additional *t*-step computation, since angle Θ is constant:

$$\left.\begin{aligned} v_x^{(n+1)} &= v_x^{(n)} + \Delta v_{Cx}\,, & v_y^{(n+1)} &= v_y^{(n)} + \Delta v_y^{(s)}\,, \\ x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \Delta x^{(s)}\,, & y^{(n+1)} &= y^{(n)} + \Delta y^{(s)}\,; \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

the superscripts (n) and $(n+1)$ indicate subsequent *It*-steps.

b) Integration Formulae for Reference Case. The first computation phase is the determination of the reference values. For the general case of rocket propulsion or any other propulsion system, one employs the above Eqs. (7.1) and numerical step by step integration. However, under the assumption that the mass flow rate $\dot{m}$ of the rocket is constant, one can compute the velocity components and the coordinates of the flight path directly by elementary integral formulae, as shown for example in Ref.[1]

The *B*-Phase is subdivided by "Stage" points, for example at *S* for the two stage rocket of Fig. 14, resulting in the intervals *AS* and *SB*. The integration has to be made for each of the

[1] see Ref. 1 of p. 339.

two intervals separately with due consideration of the respective initial values and interval limits. According to Chp. 2, it is for v_F:

$$\frac{dv_F}{dt} = \frac{c_F}{t_U}\frac{1}{1-t/t_U},$$

or

$$\frac{dv_F}{d\tau} = c_F\frac{1}{1-\tau},$$

where $\tau \equiv t/t_U$ time ratio, $\mu \equiv 1/(1-\tau)$ mass ratio.

Interval AS

Starting with the interval AS, the velocity v_F is found by a first integration:

$$\Delta v_F = c_F \ln\mu\,|_{l(A)}^{l} = c_F\,\Delta l\,, \tag{7.4}$$

where $\Delta l \equiv l - l(A)\,, \quad l \equiv \ln\mu\,, \quad \Delta v_F = v_F - v_F(A)\,.$

The second integration yields the displacement s; it is:

$$\frac{ds}{dt} = v(A) + \Delta v_F\,, \qquad \text{where} \qquad \Delta v_F = c_F\left|\ln\frac{1}{1-\tau} - l(A)\right|;$$

by transposition:

$$ds = C_F \ln\frac{1}{1-\tau}\,d\tau + [v(A) - c_F\,l(A)]\,dt$$

and integrating from $t(A)$ to t

$$\Delta s = s\,|_{t(A)}^{t} = C_F\,\Delta L + [v(A) - c_F\,l(A)]\,\Delta t\,, \tag{7.5}$$

where $C_F \equiv c_F\,t_U\,, \quad \Delta L \equiv L - L(A)\,, \quad L \equiv 1 - (1+l)/\mu\,. \quad \Delta t = t - t(A)\,.$

These general results for the arbitrary direction Θ are now separated into x- and y-components:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(A) + c_x\,\Delta l\,, \qquad v_y = v_y(A) + c_y\,\Delta l + v_G\,,\\ x &= x(A) + [v_x(A) - c_x\,l(A)]\,\Delta t + C_x\,\Delta L\,,\\ y &= y(A) + [v_y(A) - c_y\,l(A)]\,\Delta t + C_y\,\Delta L + y_G\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

where $c_x = c_F\cos\Theta\,, \quad c_y = c_F\sin\Theta\,, \quad v_G = -g_m\,\Delta t\,,$

$\Delta t = t - t(A)\,, \quad C_x = C_F\cos\Theta\,, \quad C_y = C_F\sin\Theta\,, \quad y_G = -\frac{1}{2}g_m\,\Delta t^2.$

c) Interval SB. For the interval SB the same relations are applicable with the additional simplification that μ starts from $\mu = 1$ anew. Therefore, the following substitutions have to be made, with respect to the S-point:

$$\mu(A) = \mu(S) = 1\,, \qquad l(A) = l(S) = 0\,, \qquad L(A) = L(S) = 0;$$

hence

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(S) + c_x\,l\,, \qquad v_y = v_y(S) + c_y\,l + v_G\,,\\ x &= x(S) + v_x(S)\,\Delta t + C_x\,L\,, \qquad y = y(S) + v_y(S)\,\Delta t + C_y\,L + y_G\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

where $\Delta t = t - t(S)\,.$

The above formulae are evaluated numerically by means of the computation schedule of Table 3, for any specified Θ.

Table 3. *Schedule for B-Phase Reference Values.*

t	μ	l	v_G	v_x	v_y	L	y_G	x	y
s			m/s	m/s	m/s		km	km	km

8. Numerical Computation. a) Numerical Data. The effectiveness of this method of iterative integration has been checked by elaborating the numerical example of the optimized trajectory of Fig. 14, for:

$$C = 1/70\ °/s^n, \qquad \alpha = 0\,, \qquad \Theta(B) = 36.5°, \qquad \Phi(B) = 22.5°.$$

The numerical data correspond to the conventional design of a two stage rocket:

$c_F = 2900$ m/s	$c_x = 2331$ m/s	$c_y = 1725$ m/s
$c_S = 330$ m/s	$g_0 = 9.81$ m/s²	$I_S = 295$ s
$C_F = 580$ km	$C_x = 466.1$ km	$C_y = 345.0$ km
$R_0 = 6370$ km	$h_\varrho = 7.1$ km	$h_A = 32.7$ km
$t_U = 200$ s	$t_B = 160$ s	$\zeta = \tau_B = 0.8$
$W_0 = 107.5$ t	$F = 158.0$ t	$A = 7.30$ m²
$\varrho_0 = 0.125$ kp m^{-4} s²	$q_0 = 1.36 \cdot 10^4$ kp/m²	

b) Comparison of End Results. The results of this computation are shown in Table 4, namely the end velocity $v(B)$, its components $v_x(B)$, $v_y(B)$ and the coordinates $x(B)$, $y(B)$ for the Burn Out point B: both the reference values and the final iterated values have been arranged term to term for convenient comparison. The difference is rather small. The influence of the

Table 4. *Compilation of End Values and Perturbation Terms.*

	Term	$v_x(B)$		$v_y(B)$		$v(B)$	$x(B)$	$y(B)$
	Dimension	m/s	%	m/s	%	m/s	km	km
	Reference Value	6800		3020		7410	818.8	405.3
	Final Value	6600		2980		7210	813.2	404.5
	Total Correct. Δv_{Tt}	−200		−40				
Perturb. Terms Δv	Drag D	−100	1.3	−60	0.8			
	Grav. Decrease H	0	0	+16	0.2			
	Earth Curvat. C	−100	1.3	+ 4	0.1			

different perturbations terms of v, as key quantity, are set up separately as relative numbers, referenced to the end values: it gives a clear insight into their distribution; their numerical values amount to only about 1% or less.

c) *Convergence Rate.* The convergence rate of the iterative method is very rapid, as verified practically by the numerical computation of this example: By each iteration step, the subsequent corrections are reduced by a factor of approximately 1/20 for the A-Phase and 1/100 for the B-Phase. Hence it is practically sufficient to compute just the first It-step completely and to approximate the second It-step by a rough evaluation of mean values.

d) *Error Analysis.* The accuracy of the computation is primarily dependent on the integration errors of the reference trajectory, as the subsequent iteration steps are checked in themselves by their convergence corrections. The reference trajectories of both the A- and B-Phase are integrated in the general case according to the trapezoidal rule. Their residual error is dependent on the step interval. By repeating the integration with half intervals, the residual error is reduced to 1/4 of its original amount, as well known, and can be determined consequently by taking 1/3 of the difference between the first and second calculation.

9. Summary of Results. a) *Optimal Integration Methods for Design Parameter Study.* The mechanics of the launching- and power phase of missiles and satellites are analyzed in a step by step procedure. The whole motion is first simplified by disregarding minor influences like aerodynamic drag, variation of the gravity factor g and earth curvature, which makes it possible to integrate the trajectories by simple methods: "Reference Integration". The trajectories are further subdivided into appropriate phases and characterized by suitable parameters. By means of these tools, different cases of practical power programs are analyzed and compared alternately with respect to optimal composition theorems, end velocities and energy content.

This overall survey can be supplemented at discretion by the rapidly converging "Iterative Integration" of the perturbation terms; thus the computation process can be refined to any degree of accuracy. — By these methods it is possible to analyze numerically the design of missile- and satellite launching and propulsion for best economy and effectiveness.

b) Impact Orbit Elements. The "end" conditions of the Power Phase with respect to the velocity and position of the vehicle are simultaneously the "initial" conditions of the free

flight phase, i. e. of the corresponding *Keplerian* orbit. By means of these initial conditions it is possible to determine the parameters of the orbit ellipse, fixing its impact point on the earth surface. Further refinements could account for the earth rotation during the flight time and for the details of the Re-Entry Phase into the atmosphere. The latter is, of course, a separate problem in itself; but the methods deduced here could also be applied for its solution.

c) Potential Applications. The methods described in the preceding chapters can be applied, after appropriate adaptations, to the analysis of any propulsion system replacing conventional chemical rockets, used here as an example, for instance to air breathing propulsion systems, ram jets, exotic fuel rockets, prospective atomic- and nuclear devices. Such an analysis could be used to delineate and compare the respective performance parameters and fields of application.

Moreover, these methods could be also employed to analyze problems similar to the "Glide Up" scheme, for instance, in moving the vehicle at the fringe of the atmosphere in a "Skim Orbit". — Other problem areas are indicated by the navigation of space vehicles: transfer, by means of controlled power bursts, between stationary *Keplerian* orbits, e. g., from launch orbit to terrestrial-, lunar-, or planetary satellite orbits.

The above methods of numerical analysis could be adapted and applied for contributing to the progress in these fields.

(Eingegangen am 21. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *C. A. Traenkle*, Aeronautical Research Laboratory, Wright Air Development Center, Dayton/Ohio, USA.

Ein Beitrag zu den Stabilitätskriterien der Elastizitätstheorie

Von **Udo Wegner**

Im wesentlichen existieren zwei im Prinzip verschiedene Ableitungen für die Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts. Es ist dies die *Biezeno-Grammel-Henckysche* Herleitung aufgrund dynamischer Überlegungen, wie man sie ausführlich in dem Standardwerk der Dynamik im 5. Paragraphen und 1. Kapitel dargestellt findet. Das andere mal ist es die energetische Betrachtungsweise, wie sie *Trefftz*[1,2] und *Kreutzer*[3] durchgeführt haben.

Ausgehend von der Tatsache, daß der Vorgang des Überschreitens der Stabilitätsgrenze kinematisch gesehen dem zeitlichen Durchgang durch eine Diskontinuität entspricht, ähnlich dem Überschreiten einer Wellenfläche, soll gezeigt werden, daß das sogenannte „gefährliche" Verschiebungssystem, nach der Terminologie von *Trefftz*, gerade das ist, was zu einer bestimmten „Wellenfläche" im klassischen Sinne der Mechanik der Kontinua führt. Es sei mir hier gestattet, einen kurzen Überblick als Festgabe zu geben, um dann in einer später in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit in aller Ausführlichkeit und mit Beispielen den oben genannten Gedankengang zu verfolgen.

$\mathfrak{K}$ sei ein einfach-zusammenhängendes, endliches Kontinuum, begrenzt von stückweise mindestens viermal stetig differentiierbaren Flächen Γ_i. x^1, x^2, x^3 seien die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte im Ausgangszustand, zur Zeit $t = 0$. X_1, X_2, X_3 seien die Komponenten der stetig verteilten Volumkräfte pro Volumeneinheit. $\varrho(x^1, x^2, x^3)$ bezeichne die stetige Dichte im Grundzustand und e die innere Energie pro Volumeneinheit. Die mindestens viermal stetig differentiierbaren Funktionen in allen Variablen

$$\xi^\alpha = x^\alpha + u^\alpha(x^1, x^2, x^3; t)\,,$$

bestimmen die Lage des Punktes x^1, x^2, x^3 zur Zeit t, bedingt durch Volumenkräfte und den Oberflächenkräften pro Flächeneinheit mit den Komponenten: Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3.
(Wir bedienen uns der Schreibweise von *Trefftz* und *Kreutzer*.)

Aus der Deformationsmatrix

$$T = E + \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right) = E + (u_{\alpha\beta})\,,$$

bilden wir die positiv definite Matrix:

$$T' \cdot T = E + (\gamma_{\alpha\beta})\,,$$

wobei T' die transponierte Matrix von T bezeichnet. Sollen nun die klassischen *Newton*schen Impulssätze auch für unsere Kontinuumsmechanik gelten, so darf bekanntlich e nur von den $\gamma_{\alpha\beta}$ abhängen, speziell nur von den 3 orthogonalen Invarianten, wenn man sich auf isotrope Medien bezieht, was aber hier nicht der Fall zu sein braucht. Bei uns ist also:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \sum_{\varkappa=1}^{3} \frac{\partial u^\varkappa}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial u^\varkappa}{\partial x^\beta}\,.$$

Die *Lagrange*'sche Spannungsmatrix wird dann:

$$S = \left(\frac{\partial e}{\partial u_{\alpha\beta}}\right) = (\sigma^{\alpha\beta})\,,$$

die im allgemeinen Falle nicht symmetrisch ist. Das *Hamilton*sche Prinzip liefert dann für $\mathfrak{K}$:

I. $$\varrho \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = X_\alpha + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\,; \qquad \alpha = 1, 2, 3\,.$$

Für Γ_i erhält man bekanntlich:

II. $$\sum_\beta \sigma^{\alpha\beta} \cos(n, \beta) = \Xi_\alpha\,; \qquad \alpha = 1, 2, 3\,.$$

[1] *E. Trefftz*, Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen. Internationaler Kongreß für techn. Mechanik 1930, Stockholm, Teil III, S. 44.
[2] *E. Trefftz*, Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts. ZAMM, 13 (1933) H. 2, S. 160 u. ff.
[3] *K. Kreutzer*, Die Stabilität des gedrückten Stabes. ZAMM, 12 (1932) H. 6, S. 351 u. ff.

I. ausgeschrieben lautet:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = X_\alpha + \sum_{\beta,\mu,\nu=1}^{3} \frac{\partial^2 e}{\partial u_{\alpha\beta}\, \partial u_{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial^2 u^\mu}{\partial x^\nu \cdot \partial x^\beta} + \sum_{\nu,\beta=1}^{3} \frac{\partial'}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial e}{\partial n_{\alpha\beta}}\right); \qquad \alpha = 1, 2, 3 .$$

(∂' bedeutet die Differentiation nach den in e explizit auftretenden x^ν.) Die *Euler*schen nicht-linearen Gleichungen und Matrizen werden in dieser Note nicht benötigt.

$$t = \varphi(x^1, x^2, x^3)$$

sei eine Wellenfläche, mit der Eigenschaft, daß die Partikelchen ihre Geschwindigkeit beim Durchdringen derselben nicht ändern, hingegen aber ihre Beschleunigungen einen Sprung:

$$Sp\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2}\right) = s^\alpha$$

erfahren. Dann ist:

$$Sp\left(\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^\nu\, \partial x^\beta}\right) = Sp\left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} .$$

Somit folgt aus I:

$$\varrho\, s^\alpha = \sum_{\beta,\mu,\nu}^{3} \frac{\partial^2 e}{\partial u_{\alpha\beta}\, \partial u_{\mu\nu}} \cdot s^\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} = \sum_{\mu=1}^{3} s^\mu \cdot h_{\alpha\mu} \qquad \alpha = 1, 2, 3 .$$

Damit wird:

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \varrho & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} - \varrho & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0 ,$$

falls nicht alle s^α gleichzeitig verschwinden, was evt. nur an Punkten oder Linien der Fall sein soll. Für eine „stationäre" Wellenfläche ist dann:

$$|h_{ik}| = 0 .$$

Wir zeigen nun, daß das lineare Differentialgleichungssystem, das die sogenannten „gefährlichen" Verschiebungen bestimmt, genau die obige charakteristische Mannigfaltigkeit besitzt, die zur Bestimmung der Stabilitätswerte völlig ausreicht. Zu diesem Zwecke bilden wir:

$$\delta^2 E = \iiint_{\mathfrak{M}} \delta^2 e \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 ,$$

wobei

$$\delta^2 e = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \frac{\partial^2 e}{\partial u_{\alpha\beta}\, \partial u_{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial \delta u^\mu}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial \delta u^\alpha}{\partial x^\beta}$$

ist. (Nur diese Größe kommt zur Beurteilung der Stabilität in Frage, wie *Trefftz* gezeigt hat, vgl. [1] S. 47). Setzen wir $\delta u^\alpha = v^\alpha$ so wird das „gefährliche" Verschiebungssystem aufgrund des *Jacobi*schen Kriteriums bestimmt aus:

$$\delta J = \delta \int \int_{\mathfrak{M}} \int \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} \frac{\partial^2 e}{\partial u_{\alpha\beta}\, \partial u_{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 = 0 .$$

Mit den Randbedingungen:

IV. $$\sum_{\beta} \frac{\partial e}{\partial u_{\alpha\beta}} \cos(n, \beta) = 0 ; \qquad \alpha = 1, 2, 3 ,$$

d. h. es muß sein:

III. $$\sum_{\alpha,\beta,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial^2 e}{\partial u_{\alpha\beta}\, \partial n_{\mu\nu}} \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}\right) = 0 ; \qquad \mu = 1, 2, 3 .$$

Für den Knickstab ist, wie man sofort aus den *Trefftz*schen Formeln (vgl. [1] S. 48, Formel 28) bei der von *Trefftz* gemachten speziellen Annahme über die Abhängigkeit der inneren Energie e von den γ_{ik} errechnet:

$$h_{11} = G\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{G}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{G}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{p}{2\,(1+\varepsilon_{x^1})^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)^2 ,$$

$$h_{22} = \frac{G}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right)^2 + G\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{G}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{p}{2\,(1+\varepsilon_{x^2})^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)^2 ,$$

$$h_{33} = \frac{G}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right)^2 + \frac{G}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + G\frac{m-1}{m-2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{p}{2\,(1+\varepsilon_{x^3})^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)^2 ,$$

$$h_{12} = h_{21} = \frac{G}{m-2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\,,$$

$$h_{23} = h_{32} = \frac{G}{m-2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\,,$$

$$h_{13} = h_{31} = \frac{G}{m-2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\,.$$

$|h_{ik}| = 0$ ist dann die charakteristische Mannigfaltigkeit von dem System:

$$G\left(\Delta v^\nu + \frac{m}{m-2}\,\frac{\partial\Theta}{\partial x^\nu}\right) = \frac{p}{(1+\varepsilon_{x^\nu})^2}\,\frac{\partial^2 v^\nu}{(\partial x^3)^2}\,; \qquad \nu = 1, 2, 3\,.$$

Das sind aber genau die *Jacobi*schen Gleichungen für das „gefährliche" Verschiebungssystem v^1, v^2, v^3, das durch III gegeben ist.

Die Randbedingungen IV bleiben dieselben. Aus diesem System hat *Kreutzer* (vgl. [3] S. 361) aber in sehr sinnvoller Weise die *Euler*schen Knicklasten berechnet.

In diesem kurzen Überblick sollte nur die Methode angedeutet werden, Stabilitätsfälle des elastischen Kontinuums zu erfassen und sie einzuordnen in die bekannten Wellenflächentheorien, aus denen dann noch recht interessante Parallelen zwischen den Wellenflächen in der Gasdynamik einerseits und den „gefährlichen" Verschiebungssystemen andererseits der anisotropen elastischen Medien gezogen werden können. Auch beim Fallenlassen der klassischen Impulssätze ergeben sich interessante Parallelen zwischen der Kristalloptik und dem „Stabilitätskriterium" in einem Äthermedium. Das alles soll in der ausführlichen Untersuchung behandelt werden.

(Eingegangen am 1. Januar 1959.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Udo Wegner*, Saarbrücken, Universität.

Zur Abhängigkeit der Festigkeit von der Probengröße

Von **W. Weibull**

Die klassische Festigkeitstheorie geht von einem idealisierten, gleichförmigen Material aus, und die Bruchbedingung wird eindeutig aus Spannungen oder Dehnungen berechnet. Keine Rücksicht auf die Probengröße wird — oder eben kann — in dieser Weise genommen werden.

Wirkliche Materialien sind aber gar nicht gleichförmig, sondern enthalten eine große Menge von Fehlerquellen, sei es submikroskopische Dislokationen in den Kristallen, mikroskopische Diskontinuitäten und Verschiebungen im Kristallkorn, oder sogar makroskopische Risse und eingeschlossene Fremdpartikel. Die Beachtung dieser Tatsache gibt ein mehr realistisches Bild der Festigkeit und auch eine natürliche Erklärung warum — nach alter Erfahrung — große Körper schwächer sind als kleine Körper.

Die Fehlerstellen sind vollkommen ungeordnet über das Volumen des Körpers verteilt. Es ist aber trotzdem möglich bei Verwendung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen Gesetze von sehr allgemeiner Gültigkeit herzuleiten. Wird die Wahrscheinlichkeit des Nichterscheinens einer spezifizierten Fehlerstelle im Gebiet A mit $Q(A)$ und im Gebiet B mit $Q(B)$ bezeichnet, dann ist, wenn diese beide Wahrscheinlichkeiten voneinander unabhängig sind, für beliebige A und B

$$Q(A+B) = Q(A) \cdot Q(B), \tag{1}$$

woraus durch Differentiation nach A folgt

$$Q'(A+B) = Q'(A) \cdot Q(B). \tag{2}$$

Dividiert man alsdann (2) durch (1), so findet man:

$$\frac{Q'(A+B)}{Q(A+B)} = \frac{Q'(A)}{Q(A)}.$$

Da diese Gleichung für beliebige B gültig sein soll, muß

$$\frac{Q'(A)}{Q(A)} = \text{const}$$

sein und folglich, da $Q(0) = 1$ ist,

$$Q(A) = e^{-kA}, \tag{3}$$

wo k eine positive Konstante ist.

Die Gleichung (3) hat eine große Reichweite. Die Quantität A mag ein Volumen, eine Fläche oder eine Länge repräsentieren, eben eine Anzahl von Kerben, Löchern u. dgl., ja sogar eine Zeitspanne; zum Beispiel, den Zeitabstand zwischen zwei sukzessiven Emissionen von α Partikeln, wie mit großem Erfolg von *Mardsen* u. *Barratt*[1] gezeigt worden ist.

Die grundlegende Bedingung der Gleichung (3) mag selbstverständlich in einigen Fällen fraglich sein, aber sie ist sicher befriedigt wenn $A = L =$ die Länge einer Stichprobe die vollkommen zufällig aus einem langen Draht oder Faden herausgegriffen wird, oder auch wenn die Probestäbe mit mehreren von einander unabhängigen Kerben versehen sind.

Da Q die Wahrscheinlichkeit des Nichterscheinens einer Fehlerstelle bedeutet, muß selbstverständlich die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens P gleich $(1-Q)$ sein und demzufolge die Bruchwahrscheinlichkeit

$$P = 1 - e^{-kL}. \tag{4}$$

Wenn diese Gleichung nicht von den Meßergebnissen bestätigt wird, dann kann man ziemlich sicher sein, daß die Versuchsbedingungen nicht einwandfrei waren.

Solch eine Störung, die bei Zugversuchen schwer zu vermeiden ist, wird durch die Einspannung eingeführt, und zwar zufolge zusätzlicher Spannungssteigerungen, wodurch die wirkliche Spannung etwas höher als die nominelle ausfällt.

Diese Steigerung bedeutet eine Erhöhung der Reißwahrscheinlichkeit und ist daher äquivalent mit einer Vergrößerung der Einspannlänge L. Wird diese zusätzliche Länge mit L_0 bezeichnet, bekommen wir:

$$P = 1 - e^{-k(L+L_0)}. \tag{5}$$

---

[1] *E. Marsden* und *T. Barratt*, Proc. Phys. Soc. Lond., 23 (1911).

Die Größe von L_0 hat nichts mit dem Material zu tun, sondern gibt ein Maß für die Störungsfreiheit der Einspannung.

Die Konstante k definiert die durchschnittliche Zahl pro Längeneinheit solcher Fehlerstellen, die bei einer gegebenen Belastung X zum Bruch führen. Sie ist selbstverständlich von dieser Belastung abhängig. Die schon 1939 vom Verfasser[1] vorgeschlagene Funktion

$$k = \left(\frac{X - X_u}{X_0}\right)^m \tag{6}$$

hat sich gut bewährt. Sie besitzt für die Belastung eine untere Grenze X_u, denn es ist $P = 0$ für $X \leq X_u$, aber keine obere Grenze. Eine solche wäre einfach einzuführen, z. B. durch die Modifikation

$$k = \left(\frac{X - X_u}{X_0 - X}\right)^m, \tag{7}$$

wo $P = 0$ für $X \leq X_u$ und $P = 1$ für $X \geq X_0$.

Diese Komplikation konnte bisher immer vermieden werden und zwar weil die Festigkeit eines vollkommen fehlerfreien Materials mehrhundertfältig größer als dieselbe eines „technischen" Materials ist. Ob diese Behauptung, die für kristallinische Materialien gültig ist, auch für künstliche Fäden aus makromolekularem Rohstoff gilt, ist noch eine ungeklärte Frage.

Der Mittelwert von einer großen Menge von einzelnen Meßwerten mit der Verteilungsfunktion (5) und (6) läßt sich schreiben:

$$\bar{X} = X_u + X_0 (L + L_0)^{-1/m} \cdot \pi (1/m), \tag{8}$$

wo π die Fakultät bezeichnet.

Statt den Mittelwert von einzelnen Beobachtungen zu verwenden, führt man unter Umständen die Meßergebnisse in Gruppen zu n Messungen zusammen und benutzt das schlechteste oder das beste Ergebnis. Die Mittelwerte verschiedener Ordnungszahlen (i) können gemäß Formeln von *Lieblein*[2] berechnet werden. (Tafeln über diese Konstanten sind vom Verfasser hergestellt und werden demnächst erscheinen.) Anstatt des Faktors $\pi (1/m)$ in Gleichung (8) wird diese Konstante, die von m, n und i abhängig ist, eingeführt, z. B.

$$0{,}10 \text{ für } m = 1, \quad i = 1, \quad n = 10,$$
$$2{,}93 \text{ für } m = 1, \quad i = 10, \quad n = 10.$$

Der Mittelwert des besten Meßergebnisses aus einer Gruppe zu 10 Messungen ist demgemäß für $m = 1$

$$\bar{X} = X_u + 2{,}93 \cdot X_0 (L + L_0)^{-1} \tag{9}$$

oder auch

$$\frac{1}{X - X_u} = b (L + L_0). \tag{10}$$

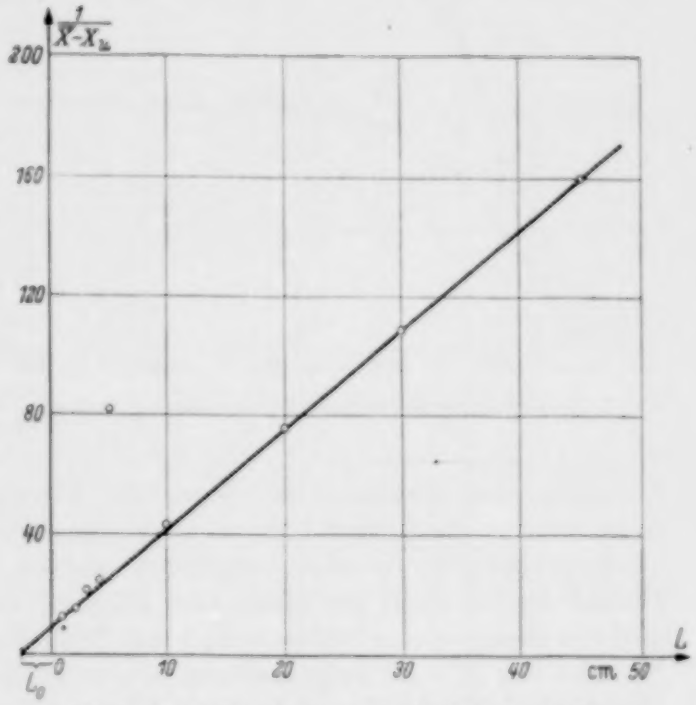


Abb. 1. Die Reißfestigkeit von Zweieinhalb-acetat-Fäden bei verschiedenen Längen.

Diese Formel wird jetzt an einer großen Meßreihe, die von *Sippel* u. *Hützen*[3] kürzlich durchgeführt ist, geprüft. Die Meßwerte sind von Herrn Dr. *Sippel* freundlichst zur Verfügung gestellt. Zur Untersuchung wurde ein Zweieinhalbacetat-Faden, 100 dernier, herangezogen. Für je eine bestimmte Einspannlänge wurden je 60 Reißversuche ausgeführt. Das beste Meßergebnis aus einer Gruppe zu 10 Messungen wurde benutzt und hieraus die Mittelwerte für alle sechs Gruppen gebildet. In Abb. 1 sind die Werte von $1/(\bar{X} - X_u)$ über verschiedenen Längen L aufgetragen. Gemäß (10) soll dann die Meßpunkte auf einer Geraden liegen, was ausgezeichnet bestätigt wird mit Ausnahme von $L = 5$, wo die Probe einer größeren als normalen Luftfeuchte entspricht. Der Wert von L_0 ist graphisch zu $L_0 = 3$ cm ermittelt. Es ist zu bemerken, daß bei einer Änderung der

[1] *W. Weibull*, Ing. Vet. Akad. Handl., No. 153 (1939).
[2] *J. Lieblein*, Ann. Math. Statist. 26 (2) (1955) S. 330—333.
[3] *A. Sippel* und *E.-H. Hützen*, Faserforschung und Textiltechnik 9 (5) (1958) S. 163—167, (6) (1958) S. 213—217.

Länge von 2 zu 5 cm nur eine Änderung der Reißfestigkeit von etwa 4% gemessen wurde. Der gefundene Wert von L_0 wird daher schon durch eine kleine Spannungserhöhung hervorgebracht.

Die Gleichung (4) kann zu einem ganz anderen Zwecke gebraucht werden und zwar zur Kontrolle der Prüfmaschine, was speziell bei Maschinen für schwingende Beanspruchung sehr nötig ist.

Die Konstante k ist, wie schon gesagt, eine Funktion $f(X)$ der Belastung X, die nicht nur eine statische sondern ebensogut eine schwingende Beanspruchung sein mag. In dem letzten Falle bedeutet X die Last, die zum Bruch führt nach einer vorgeschriebenen Lastspielzahl N (für statische Belastung $N = 1$).

Die Wahrscheinlichkeiten P_1 und P_2 für zwei Proben von den Längen L_1 und L_2, die dem gleichen X entsprechen, werden aus Gleichung (4) einfach hergeleitet. Wir haben:

$$e^{-f(X)} = (1 - P_1)^{1/L_1} = (1 - P_2)^{1/L_2}. \tag{11}$$

Eine grundsätzliche Voraussetzung ist natürlich, daß die experimentell gefundene Verteilung von X nur vom Probestab und nicht von der Ungenauigkeit der Prüfmaschine abhängt. Wenn dann die beiden Kurven $P_1 = F_1(X)$ und $P_2 = F_2(X)$ mit beliebigen Koordinaten aufgetragen werden, und man findet, daß zusammengehörige Werte von P_1 und P_2 gemäß (11) verknüpft sind, dann kann man daraus schließen, daß die Streuung eine wirkliche ist. Wenn die Streuung dagegen nur von der Prüfmaschine stammt, dann werden die beiden Kurven zusammenfallen.

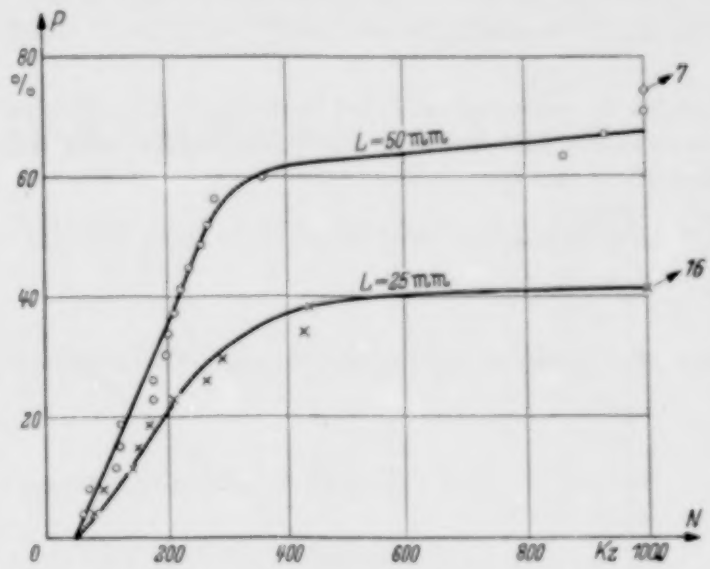


Abb. 2. Verteilung der Lastspielzahl bei verschiedenen Probenlängen.

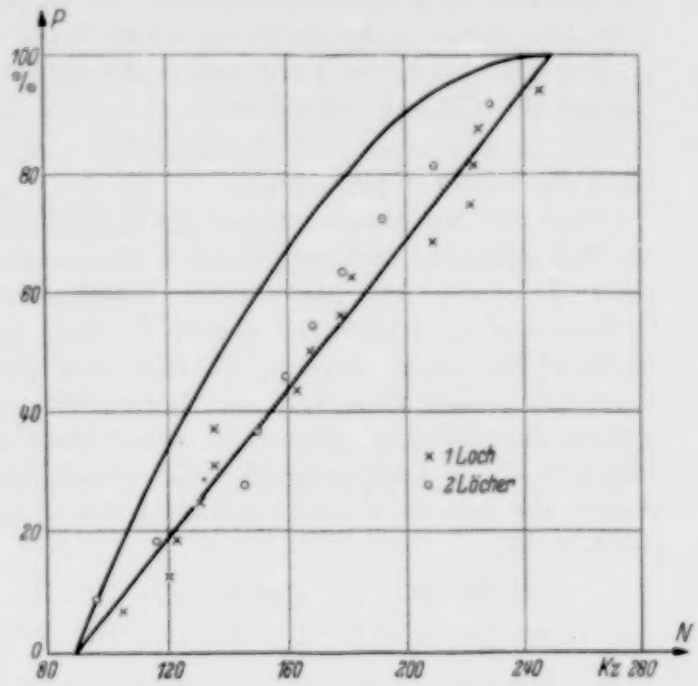


Abb 3. Verteilung der Lastspielzahl bei einer und zwei Kerben.

Zwei Beispiele werden vorgeführt werden. Die beiden Kurven in Abb. 2 entsprechen der Ermüdungsfestigkeit bei rotierender Biegung von 26 Stahlstäben mit einer Prüflänge von 50 mm und von ebenso vielen Stäben mit 25 mm Prüflänge. Die Belastung war in beiden Fällen ± 31 kg/mm². Von der für $L = 50$ aufgetragenen Kurve ist die Kurve für $L = 25$ berechnet und gezogen. Die Meßergebnisse schließen sich dieser Kurve zufriedenstellend an, und es wird geschlossen, daß die Streuung nicht von der Prüfmaschine beeinflußt war.

Ganz anders sind die Verhältnisse in Abb. 3. Hier wurden 15 Flachstäbe, die mit einem Loch versehen waren, bei einer schwingenden Zugbelastung von 25 ± 15 kg/mm² bis zum Ermüdungsbruch geprüft. Die Verteilung der Lastspielzahl ist durch eine gerade Linie näherungsweise wiederzugeben. Die entsprechende Verteilung für einen Probestab mit zwei Löchern ist gemäß Gleichung (11) berechnet. Die 10 Meßwerte schließen sich aber viel besser der ersten Kurve an, und daraus wird geschlossen, daß die Streuung in diesem Falle zum größten Teil von der Prüfmaschine hervorgebracht ist. Es scheint als ob solche Fälschungen von experimentellen Verteilungen der Lastspielzahl nicht allzu selten vorkommen; dafür ist der letzterwähnte Fall ein besonders drastisches Beispiel.

(Eingegangen am 7. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. phil. *Waloddi Weibull*, Bockamöllan, Brösarps Station, Schweden.

Berechnung des Membranspannungszustandes doppelt gekrümmter Schalen über beliebigem Grundriß

Von **W. Zerna**

1. Einleitung. Bei der Gestaltung von Schalen geht die neuzeitliche Architektur von überkommenen Formen mehr und mehr zu ausdrucksvolleren Baukörpern über, die die Phantasie nicht einengen und zugleich zweckmäßig sind. Dabei treten häufig Grundrisse und Dachformen von kühner Unregelmäßigkeit auf, und der Ingenieur steht dann vor der nicht ganz einfachen Aufgabe, das statische Verhalten derartiger Konstruktionen, die meist Stahlbetonschalen sind, zu berechnen. Die nachfolgenden Ausführungen wollen dazu einen Beitrag liefern; sie sollen zeigen, daß es möglich ist, den Membranspannungszustand doppelt gekrümmter Schalen über weitgehend beliebigem Grundriß rechnerisch zu erfassen.

2. Geometrische Beziehungen. Über einem Grundriß wie ihn Abb. 1b zeigt, soll ein doppelt gekrümmtes Schalendach errichtet werden. Die beiden links und rechts gezeichneten in der Grundrißebene liegenden Begrenzungskurven sind beliebig, verlaufen aber bezüglich einer Mittellinie — der x-Achse — symmetrisch.[1] Sie sind durch den Abstand $b(x)$ von der x-Achse bestimmt. Die oberen und unteren im Abstand L im Grundriß eingetragenen Begrenzungslinien seien parallel und geradlinig. Es werde nun ein Schnitt A—A senkrecht zur Grundrißebene an einer beliebigen Stelle $x = \text{const}$ betrachtet (Abb. 1a), der die Schalenmittelfläche in einem Kreisbogen vom Radius $r(x)$ schneiden soll. Der Radius $r(x)$ trifft die auf der Grundrißebene (mit der x-Achse als Spur) stehende Ebene unter dem Winkel α. Der Schnittpunkt hat von der Grundrißebene den Abstand $u(x)$. Es werde angenommen, daß der Winkel α für alle Punkte, die den Begrenzungskurven zugeordnet sind, der gleiche ist. Auf diese Weise entsteht eine Fläche, die längs der Begrenzungskurven den Abstand $z(x)$ und längs der x-Achse den Abstand $H(x)$ von der Grundrißebene hat. Aus der Abb. 1a lassen sich sofort die folgenden Beziehungen ablesen:

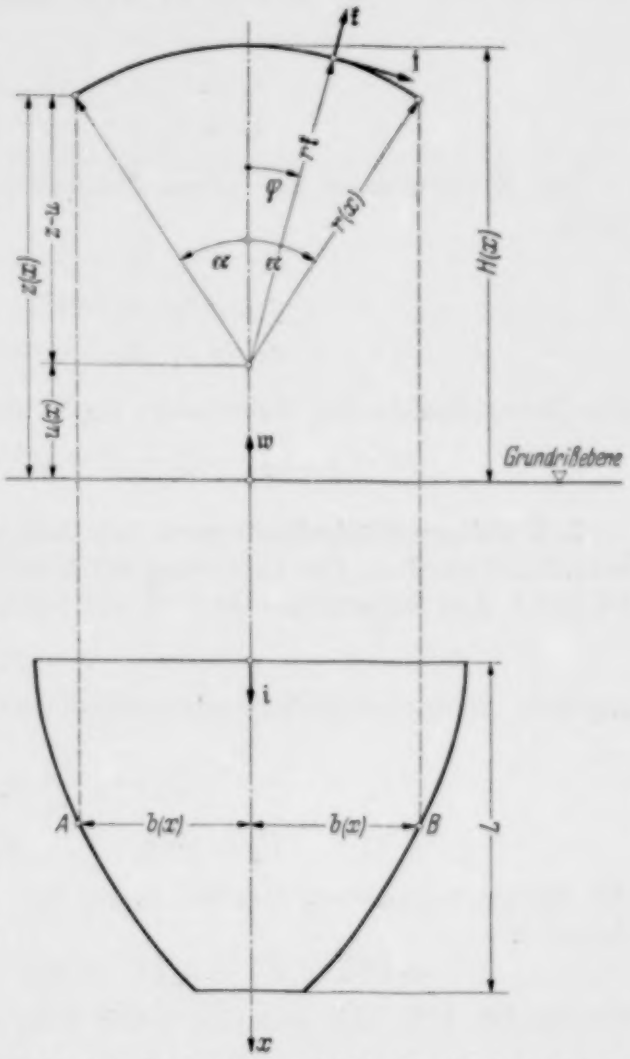


Abb. 1a/1. Schnitt und Grundriß der Mittelfläche der Schale.

$$\sin\alpha = \frac{b}{r}\,, \tag{1}$$

$$u = z - b\cot\alpha\,, \tag{2}$$

$$H = u + r = z + c\,b\,, \tag{3}$$

worin

$$c = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{4}$$

ist; aus (3) folgt:

$$z = H - c\,b \tag{5}$$

oder auch mit (1)

$$u = H - \frac{b}{\sin\alpha}. \tag{6}$$

Wenn $b(x)$ gegeben ist, können H und c beliebig gewählt werden. Die Randkurve $z(x)$ der Schalenmittelfläche folgt dann aus (5). Es kann aber auch die Randkurve z und die Konstante c vorgegeben werden. Dann folgt aus (3) der Verlauf von H. Die Schalenmittelfläche läßt sich auf

[1] Wenn diese Symmetriebedingung nicht erfüllt ist, so kann man sich dadurch helfen, daß man die Schale bezüglich einer beliebigen Achse in zwei Hälften teilt, jede Hälfte für sich betrachtet und dann in geeigneter Weise zusammensetzt.

diese Weise den verschiedensten Forderungen gut anpassen. So besteht beispielsweise die Möglichkeit, den Schalenrändern fast jede gewünschte Form zu geben oder auch den Längsschnitt längs der x-Achse beliebig vorzuschreiben.

Zur Darstellung der Punkte der Schalenmittelfläche werden die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{w}$ benutzt, deren Bedeutung aus Abb. 1 ersichtlich ist. Neben der Koordinate x wird als weitere Koordinate der Winkel φ eingeführt, der die Lage eines Punktes auf der Schnittkurve $x = \text{const}$ angibt. Ein beliebiger Punkt der Schalenmittelfläche ist dann durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + u(x)\,\mathfrak{w} + r(x)\,\mathfrak{k}(\varphi) \tag{7}$$

gegeben.

Ableitungen nach x werden durch Striche und Ableitungen nach φ durch Punkte angezeigt. Es bestehen folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial \varphi} &= \mathfrak{k}^{\cdot} = \mathfrak{j} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{k}}{\partial \varphi^2} &= \mathfrak{k}^{\cdot\cdot} = -\mathfrak{k} \\ \mathfrak{w} &= \cos\varphi\,\mathfrak{k} - \sin\varphi\,\mathfrak{j}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Unter Beachtung von (8) lassen sich aus (7) die folgenden geometrischen Größen ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{r}' = \mathfrak{i} + (u'\cos\varphi + r')\,\mathfrak{k} - u'\sin\varphi\,\mathfrak{j}, \\ \mathfrak{a}_1' &= \mathfrak{r}'' = (u''\cos\varphi + r'')\,\mathfrak{k} - u''\sin\varphi\,\mathfrak{j}, \\ \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{r}^{\cdot} = r\,\mathfrak{j}, \\ \mathfrak{a}_2^{\cdot} &= \mathfrak{r}^{\cdot\cdot} = -r\,\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{a}_2' &= \mathfrak{a}_1^{\cdot} = \mathfrak{r}^{\cdot\prime} = r'\,\mathfrak{j}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Fläche (Komponenten des Maßtensors) sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_{11} &= \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_1 = 1 + u'^1 + r'^2 + 2\,r'\,u'\cos\varphi, \\ \mathfrak{a}_{22} &= \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_2 = r^2, \\ \mathfrak{a}_{12} &= \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = -u'\,r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Determinante des Maßtensors ergibt sich damit zu:

$$a = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 = (1 + u'^2 + r'^2 + 2\,r'\,u'\cos\varphi)\,r^2 - (u'\,r\sin\varphi)^2. \tag{11}$$

3. Gleichgewichtsbedingungen. Die Längskräfte mögen mit n_x und n_φ, die Schubkräfte mit T bezeichnet werden. Die Belastung der Schale bezogen auf die Flächeneinheit mit der Mittelfläche sei durch den Belastungsvektor in der Form

$$\mathfrak{p} = p_x\,\mathfrak{i} + p_\varphi\,\mathfrak{j} + p_r\,\mathfrak{k} \tag{12}$$

gegeben. Es werden die folgenden reduzierten Längskräfte und Belastungskomponenten eingeführt:

$$N_x = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,n_x, \qquad N_\varphi = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\,n_\varphi, \tag{13}$$

$$P_x = \sqrt{a}\,p_x, \qquad P_\varphi = \sqrt{a}\,p_\varphi, \qquad P_r = \sqrt{a}\,p_r. \tag{14}$$

Mit diesen reduzierten Größen lautet die allgemeine Gleichgewichtsbedingung der Membrantheorie[1]:

$$\mathfrak{a}_1\,(N_x' + T^{\cdot}) + \mathfrak{a}_2\,(T' + N_\varphi^{\cdot}) + \mathfrak{a}_1'\,N_x + 2\,\mathfrak{a}_2'\,T + \mathfrak{a}_2\,N_\varphi + \sqrt{a}\,\mathfrak{p} = 0. \tag{15}$$

Mit (8), (9), (12), (13) und (14) erhält man daraus die 3 skalaren Gleichungen:

$$N_x' + T^{\cdot} = -P_x, \tag{16}$$

$$T' + N_\varphi^{\cdot} - N_x\frac{u^{\cdot}}{r}\sin\varphi + 2\,T\frac{r'}{r} = -\frac{1}{r}\,(P_\varphi + P_x\,u'\sin\varphi), \tag{17}$$

$$N_x\left(\frac{u^{\cdot}}{r}\cos\varphi + \frac{r^{\cdot}}{r}\right) - N_\varphi = \frac{P_x}{r}\,(u'\cos\varphi + r') - \frac{P_r}{r}. \tag{18}$$

[1] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 149 oder *A. E. Green — W. Zerna*, Theoretical Elasticity, Oxford: At the Clarendon Press, 1954, S. 408.

4. Differentialgleichung des Problems. Werden (16) nach x und (17) nach φ differentiert und beide Gleichungen voneinander subtrahiert, so ergibt sich

$$N_x'' - N_\varphi'' + \left[N_x \frac{u''}{r} \sin\varphi\right]^{\cdot} - 2\frac{r'}{r} T' = -P_x' + \left[\frac{P_\varphi}{r} - \frac{P_x}{r} u' \sin\varphi\right]^{\cdot}.$$

Mit Hilfe von (16) läßt sich T und mit Hilfe von (18) N_φ eliminieren. Es ergibt sich:

$$N_x'' - N_x''\left(\frac{u''}{r}\cos\varphi + \frac{r''}{r}\right) + 3\,N_x'\frac{u''}{r}\sin\varphi + 2\,N_x\frac{u''}{r}\cos\varphi + 2\,N_x'\frac{r'}{r} = q \tag{19}$$

mit

$$q = -\left[P_x\left(\frac{u'}{r}\cos\varphi + \frac{r'}{r}\right)\right]'' + \frac{P_r''}{r} - 2\frac{r'}{r}P_x - P_x' + \frac{P_\varphi'}{r} + \left[P_x\frac{u'}{r}\sin\varphi\right]^{\cdot}. \tag{20}$$

(19) ist die das Problem beschreibende Differentialgleichung. Sie läßt sich noch etwas vereinfachen, wenn man

$$\Phi = r\,N_x \tag{21}$$

setzt:

$$\Phi'' - \Phi\left[\frac{r''}{r} + 2\frac{u''}{r}\cos\varphi\right] - \Phi''\left[\frac{u''}{r}\cos\varphi + \frac{r''}{r}\right] + 3\,\Phi'\frac{u''}{r}\sin\varphi = q\cdot p\,. \tag{22}$$

Sind am Rande der Schale die Längskräfte n_x bzw. n_φ vorgeschrieben, wie dies meistens der Fall ist, so sind mit (13), (18) und (21) auch sofort die Randbedingungen für φ bekannt, so daß die Lösung der Differentialgleichung nach einem Näherungsverfahren leicht möglich ist.

(Eingegangen am 25. November 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *W. Zerna*, Technische Hochschule Hannover, Lehrstuhl für Massivbau.

Die Wärmeleitgleichung bei Wärmespannungen

Von **K. Zoller**

Die *Fourier*sche Wärmeleitgleichung ist als Energiebilanz bei instationären Wärmespannungsfeldern nicht vollständig. Auch bei reversibler Arbeitsleistung bleibt die Energiegleichung mit den übrigen Grundgleichungen gekoppelt.

1. Einleitung. Die Wärmespannungen in einem elastischen, isotropen Körper pflegt man auf folgendem Wege zu ermitteln[1]. Man bestimmt erst für sich das Temperaturfeld $T(\mathfrak{r}, t)$ als Funktion des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ und der Zeit t aus der *Fourier*schen Wärmeleitgleichung

$$\varrho\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + W(\mathfrak{r}, t); \tag{1.1}$$

in dieser bedeutet ϱ die Dichte, c die auf die Masse bezogene spezifische Wärme, λ die Wärmeleitzahl und W die auf die Volumeinheit bezogene Ergiebigkeit etwaiger räumlich verteilter Wärmequellen. Dazu kommen noch Anfangs- und Randbedingungen für die Temperatur T oder für den Vektor der Wärmestromdichte

$$\mathfrak{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \tag{1.2}$$

Wir fassen die einem materiellen Teilchen durch Leitung und durch Wärmequellen in der Zeiteinheit und je Volumeinheit zugeführte Wärmemenge in

$$Q \equiv -\operatorname{div} \mathfrak{q} + W \tag{1.3}$$

zusammen und haben damit statt (1.1) kürzer

$$\varrho\, c_v\, \frac{\partial T}{\partial t} = Q. \tag{1.4}$$

In einem zweiten Schritt berechnet man die Spannungen, z. B. bei einer Gleichgewichtsaufgabe aus den Gleichgewichtsbedingungen, den Randbedingungen für die Kräfte und Verschiebungen sowie den thermoelastischen Spannungs-Verzerrungsgleichungen als den Zustandsgleichungen des Körpers.

Dieses Vorgehen, das die Wärmeerscheinungen ohne Rücksicht auf etwaige innere Zusammenhänge dem mechanischen Verformungsprozeß hinzufügt, ist daraufhin zu prüfen, ob es mit der Energiebilanz des Gesamtvorganges verträglich ist. Man hat diese Frage schon frühzeitig gestellt. So hat *F. Neumann*[2] bemerkt, daß die *Fourier*sche Wärmeleitgleichung (1.1) als Energiebilanz, d. h. als Ausdruck des ersten Hauptsatzes nur bei isochoren Zustandsänderungen gelten könne, für die die spezifische Wärme bei konstantem Volum $c = c_v$ zu nehmen ist. Bei thermoelastischen Vorgängen sei die Wärmeleitgleichung um ein Glied zu erweitern, das die Wärme betrifft, die auf Kosten der Ausdehnung der Teilchen verbraucht wird. Die von *F. Neumann* verbesserte Gleichung lautet

$$\varrho\, c_v\, \frac{\partial T}{\partial t} = Q - \frac{\varrho}{\alpha}(c_p - c_v)\, \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{u}; \tag{1.5}$$

in ihr ist $\mathfrak{u}$ der Verschiebungsvektor, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck und α der kubische Ausdehnungskoeffizient. Diese Energiegleichung ist mit den übrigen thermoelastischen Gleichungen vor allem über den Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ gekoppelt; dadurch ist, wenigstens grundsätzlich, die Ermittlung von Wärmespannungen bei instationären Feldern wesentlich erschwert.

In der *Neumann*schen erweiterten Wärmeleitgleichung entspricht das Zusatzglied einer Arbeitsleistung, wie man sie bei vollkommenen Gasen ansetzt. Da aber ein elastischer Körper nicht nur auf Druck, sondern auch auf Schub beansprucht wird, fragt es sich, ob dieses Zusatzglied vollständig ist. Bei der wachsenden Aufmerksamkeit, mit der man sich neuerdings dem Gebiete der Wärmespannungen zugewendet hat, mag es erwünscht sein, den wahren Sachverhalt ausführlicher darzustellen, als es gewöhnlich in den Lehrbüchern geschieht — im Unterschied zu allgemeineren

[1] *E. Melan, H. Parkus*, Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder, Wien 1953, S. 1—8.

[2] *F. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers, Leipzig 1885, S. 118ff.

Untersuchungen über das Verhalten nichtstarrer Kontinuen[1,2,3,4]. Hierzu gehen wir von den Grundgleichungen für ein bewegtes Kontinuum aus, wie sie zuletzt *C. Truesdell*[5] eingehend und sehr allgemein behandelt hat[6]. Zu Vergleichszwecken seien erst die Gleichungen (1.4), (1.5), die sich offenbar nur auf kleine Verschiebungen beziehen, etwas allgemeiner gefaßt, indem wir anstelle der lokalen zeitlichen Ableitung $\partial/\partial t$ die substantielle Ableitung

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{w} \cdot \nabla \tag{1.6}$$

einführen, in der $\mathfrak{w}$ der Geschwindigkeitsvektor und ∇ der Nablaoperator ist. Damit lauten diese Gleichungen

$$\varrho\, c\, \frac{dT}{dt} = Q\,, \tag{1.7}$$

bzw.

$$\varrho\, c_v\, \frac{dT}{dt} = Q - \frac{\varrho}{\alpha}\,(c_p - c_v)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w}\,. \tag{1.8}$$

Von allen auftretenden Größen ist im folgenden vorausgesetzt, daß sie so oft stetig differentiierbar sind, wie der Gegenstand es erfordert. Unstetigkeitsstellen irgendwelcher Art werden nicht betrachtet. Alle Vektoren und Tensoren sind auf ruhendes, rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem bezogen, so daß ihre Komponenten die mit entsprechender Dimension behafteten physikalischen Komponenten sind.

2. Die Grundgleichungen für ein Kontinuum[7]. Die Bewegung und Verformung eines Kontinuums genügt in der Dichte $\varrho(\mathfrak{r}, t)$ und dem Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{w}(\mathfrak{r}, t)$ der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0 \tag{2.1}$$

und dem Impulssatz

$$\varrho\,\frac{d\mathfrak{w}}{dt} - \nabla \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{k}\,, \tag{2.2}$$

der das Feld der Beschleunigung in Abhängigkeit vom Spannungstensor $\mathfrak{S}(\mathfrak{r}, t)$ und den eingeprägten Kräften von der Kraftdichte $\mathfrak{k}(\mathfrak{r}, t)$ gibt. Von eingeprägten Momenten und der Möglichkeit, daß das Kontinuum auf Momentenspannungen beansprucht werden kann, wollen wir absehen, da hierdurch unser Ergebnis nicht wesentlich beeinflußt wird. Damit vereinfacht sich der Drehimpulssatz in die Aussage, daß der Spannungstensor symmetrsich ist, also die Matrix seiner Komponenten mit der transponierten Matrix übereinstimmt:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'\,. \tag{2.3}$$

Eine Energiebilanz gibt vollends die Änderungsgeschwindigkeit der Gesamtenergie infolge der Leistung der eingeprägten Kräfte und der von außen zugeführten Wärme. Aus dieser Energiegleichung lassen sich die eingeprägten Volumkräfte $\mathfrak{k}$ und zugleich die kinetische Energie mit Hilfe des aus dem Impulssatz gewonnenen Energiesatzes der Mechanik eliminieren. Es bleibt der erste Hauptsatz als Bilanzgleichung für die spezifische innere Energie U allein:

$$\varrho\,\frac{dU}{dt} = I(\mathfrak{S}\mathfrak{D}) + Q\,. \tag{2.4}$$

In ihm kommt als Arbeitsglied nur die Leistung der in den Spannungen ausdrückbaren Oberflächenkräfte vor. Es ist dies die erste Invariante (die „Spur") $I(\mathfrak{S}\mathfrak{D})$ des Matrizenprodukts aus dem Spannungstensor $\mathfrak{S}$ und dem Tensor der Verformungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{D} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{r}} + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \mathfrak{r}}\right)'\right], \tag{2.5}$$

[1] *G. Hamel*, Elementare Mechanik, Leipzig und Berlin 1912, S. 571 ff.

[2] *R. Kappus*, Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) 271—285, S. 284.

[3] *M. A. Biot*, Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics, J. appl. phys. 27 (1956) 240—253, S. 243.

[4] *H. Ziegler*, An Attempt to generalize Onsager's Principle, and its Significance for Rheological Problems, Techn. Rep. No. 13, Div. Appl. Math. Brown University, Providence, R. I. 1957, S. 3 f.

[5] *C. Truesdell*, The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics, J. rational mech. anal. 1 (1952) 125—300, 2 (1953) 593—616.

[6] Verf. verdankt außer der in Fußn. 5 genannten Arbeit von *C. Truesdell* wesentliche Anregungen dessen noch nicht veröffentlichtem Abriß der klassischen und nichtlinearen Feldtheorien der Mechanik, der eine stark erweiterte Fassung dieser Arbeit ist und im Handbuch der Physik, Bd. 3, 1 (herausgeg. von S. Flügge) erscheinen wird.

[7] *C. Truesdell*, S. 154 ff., a. a. O. Fußn. 5.

dessen Komponenten mit $\mathfrak{r}(x_1, x_2, x_3)$ und $\mathfrak{w}(w_1, w_2, w_3)$

$$d_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\right), \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2.6}$$

sind.

Die Gleichungen (2.1), (2.2), (2.3) und (2.4) samt den Anfangs- und Randbedingungen reichen nicht aus, um die Bewegung und Zustandsänderung des Kontinuums zu bestimmen. Es kommen noch die Zustandsgleichungen hinzu, die sein physikalisches Verhalten beschreiben, so die kalorische Zustandsgleichung für die innere Energie U, ein Spannungs-Verzerrungsgesetz für den Spannungstensor $\mathfrak{S}$, das *Fourier*sche Gesetz (1.2) bei Isotropie für die Wärmestromdichte $\mathfrak{q}$. Wie der Vergleich von (2.4) mit (1.7) zeigt, wird es vor allem von der besonderen Form der kalorischen Zustandsgleichung abhängen, ob sich der erste Hauptsatz in die *Fourier*sche Wärmeleitgleichung vereinfacht. Zugleich sieht man, daß die Fassung (1.4) dieser Gleichung bei instationären Vorgängen das konvektive Glied $\mathfrak{w} \cdot \nabla T$ der Temperaturänderung gegenüber der lokalen Änderung $\partial T/\partial t$ vernachlässigt. Dies ist zwar bei kleinen Verzerrungen eines thermoelastischen Körpers in der Regel zulässig, streng genommen sind aber die Grundgleichungen über dieses konvektive Glied verkoppelt.

3. Stationäres Gleichgewicht. Befindet sich das Kontinuum in stationärem Gleichgewicht, dann gilt wegen $\mathfrak{w} = 0$ und $dU/dt = 0$ unabhängig von der kalorischen Zustandsgleichung mit (1.3)

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + W = 0\,. \tag{3.1}$$

Hier läßt sich also das Temperaturfeld unabhängig von den übrigen Feldgrößen berechnen, vorausgesetzt, daß man die Randbedingungen am verformten Körper kennt. Dies wird im allgemeinen wieder nur näherungsweise bei kleinen Verformungen zutreffen oder wenn an der gesamten Oberfläche des Körpers die Verschiebungen vorgeschrieben sind und nicht teilweise die Spannungen. Andernfalls bleibt auch (3.1), über die Randbedingungen, an die übrigen Gleichungen gekoppelt.

4. Die kalorische Zustandsgleichung.[1] In der Form (2.4) gilt der erste Hauptsatz für jedes Kontinuum. Zur weiteren Behandlung dieser Gleichung nehmen wir die kalorische Zustandsgleichung hinzu. Gewöhnlich nimmt man an, daß die innere Energie nicht vom makroskopischen Bewegungszustand, d. h. vom Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{w}(\mathfrak{r}, t)$ abhängt[2]. Im Bereiche der Wärmespannungserscheinungen werden wir demgemäß voraussetzen, daß die innere Energie U nur von der spezifischen Entropie s und vom augenblicklichen Verformungszustand bestimmt wird. Sei dieser durch gewisse n Zustandsparameter $v_1, \ldots, v_n$ hinreichend gekennzeichnet, so ist die kalorische Zustandsgleichung eine Beziehung

$$U = U(s, v_1, \ldots, v_n)\,. \tag{4.1}$$

Aus ihr ist die absolute Temperatur T der Teilchen durch

$$T \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{v_1, \ldots, v_n} = T(s, v_1, \ldots, v_n) \tag{4.2}$$

definiert. Die übrigen Ableitungen

$$P_i \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{s,\, v_k \neq v_i} = P_i(s, v_1, \ldots, v_n) \tag{4.3}$$

heißen die „thermodynamischen Spannungen". (Die Zeiger an den Ableitungen geben die bei der Differentiation festgehaltenen Zustandsveränderlichen an.)

Man darf die thermodynamischen Spannungen P_i nicht mit den Komponenten des Spannungstensors $\mathfrak{S}$ verwechseln. Dies folgt nicht nur aus ihrer Definition, sondern auch aus ihrer physikalischen Dimension: Sei $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a}$ der Ort eines bestimmten Teilchens zu Beginn der Verformung ($t = 0$), dann bildet man aus der Schar der Bahnkurven

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}, t) \tag{4.4}$$

den Tensor der Verformungsgradienten

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{a}}\right)_t \tag{4.5}$$

mit den Komponenten

$$a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial a_k}\,. \tag{4.6}$$

[1] S. Fußn. 6, S. 367.

[2] *G. Kirchhoff*, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig 1894, S. 113.

Es ist möglich, daß diese neun Komponenten a_{ik} als Zustandsparameter $v_1, \ldots, v_n$ ausreichen[1]. Da die a_{ik} physikalisch dimensionslos sind, haben die thermodynamischen Spannungen die Dimension von U, d. i. einer Energie pro Masse oder eines Geschwindigkeitsquadrats.

Übrigens läßt sich in unserem Beispiel die Art und Weise, wie die innere Energie von $\mathfrak{A}$ abhängt, bei homogenen, isotropen Kontinuen näher kennzeichnen: In die Zustandgleichung

$$U = U(s, \mathfrak{A}) \tag{4.7}$$

geht $\mathfrak{A}$ über den aus $\mathfrak{A}$ gebildeten Tensor

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}' \tag{4.8}$$

gemäß

$$U = U\,(s, I(\mathfrak{B}), I(\mathfrak{B}^2), I(\mathfrak{B}^3)) \tag{4.9}$$

ein[2].

Die Unbestimmtheit, die dem Begriff der Zustandsparameter anhaftet, ist nicht ohne Einschränkung. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine brauchbare Schar von Parametern. Wir fragen, ob die Transformation auf eine andere Parameterschar $\omega_1, \ldots, \omega_n$ außer den üblichen Bedingungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit weiteren Forderungen genügen muß. Rein formal könnte man z. B. die zu den v_i gehörigen Spannungen P_i als neue Zustandsparameter wählen, da sie jedenfalls Zustandsgrößen sind. Die Bedingung aber, daß die Temperatur T bei Transformationen

$$v_i = f_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.10}$$

invariant bleibe, verlangt

$$\frac{\partial f_i}{\partial s} = 0\,, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.11}$$

wonach mit (4.3) die thermodynamischen Spannungen in der kalorischen Zustandsgleichung als Zustandsparameter ungeeignet sind. Betrachten wir weiter die Änderungsgeschwindigkeit der inneren Energie

$$\frac{dU}{dt} = T\,\frac{ds}{dt} + \sum_i P_i\,\frac{dv_i}{dt}\,. \tag{4.12}$$

Da U nach Voraussetzung nur vom augenblicklichen Verformungszustand, nicht aber von dessen Änderungsgeschwindigkeit abhängen soll, werden wir verlangen, daß für $\partial \mathfrak{w}/\partial \mathfrak{r} = 0$, also $\mathfrak{D} = 0$ auch alle dv_i/dt verschwinden, d. h. als Zustandsparameter sind nur kinematische Größen brauchbar. Unser Beispiel (4.6) erfüllt diese Bedingung.

Mit (4.12) lautet der erste Hauptsatz (2.4) ausführlicher[3]

$$\varrho\,T\,\frac{ds}{dt} + \varrho \sum_i P_i\,\frac{dv_i}{dt} = I(\mathfrak{S}\,\mathfrak{D}) + Q \tag{4.13}$$

und zwar gilt diese Gleichung in jedem Falle, auch dann, wenn der Spannungstensor $\mathfrak{S}$ dissipative Spannungen enthält, deren irreversible Arbeit die Entropie vermehrt[4]. Führen wir noch die spezifische Wärme c bei der Zustandsänderung ds, dv_i durch

$$c \equiv \frac{T\,ds}{dT} = c(s, v_1, \ldots, v_n,\ ds, dv_1, \ldots, dv_n) \tag{4.14}$$

ein, so kommt anstelle von (4.13)

$$\varrho\,c\,\frac{dT}{dt} + \varrho \sum_i P_i\,\frac{dv_i}{dt} = I\,(\mathfrak{S}\,\mathfrak{D}) + Q\,. \tag{4.15}$$

Damit lassen sich die Wärmeleitgleichungen (1.7) und (1.8) mit dem ersten Hauptsatz vergleichen.

[1] *E. Hellinger*, Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, Enz. Math. Wiss. IV. 4, Leipzig 1914, S. 601—694, §§ 7, 9, 15.

[2] *W. Noll*, On the Continuity of the Solid and Fluid States, J. rational mech. anal. 4 (1955) 3—81, S. 45.

[3] Die in den Lehrbüchern der elementaren Thermodynamik für vollkommene Gase angegebene Gleichung

$$dU = T\,ds - p\,dv \tag{2.4a}$$

kann zweierlei bedeuten. Meistens meint sie, nachdem die Entropie hergeleitet ist, den ersten Hauptsatz, eingeschränkt auf reversible Zustandsänderung; dann ist (2.4a) ein Sonderfall von (2.4), d. h. eine physikalische Erkenntnis.— (2.4a) kann aber auch als Sonderfall von (4.12) stehen, also etwas über die kalorische Zustandsgleichung vollkommener Gase aussagen. Bei nur zwei unabhängigen Zustandsveränderlichen s, v verwischt sich so der Bedeutungsunterschied zwischen (2.4) und (4.12), weshalb man (4.12) als Verallgemeinerung von (2.4a) mißverstehen könnte. Die Bemerkungen zu den thermodynamischen Spannungen P_i und nach (4.16) über dissipative Spannungsanteile in $\mathfrak{S}$ richten sich zugleich gegen ein solches Mißverständnis.

[4] *G. Hamel*, S. 582 f., a. a. O. s. Fußn. 1, S. 367.

Man sieht: Der erste Hauptsatz vereinfacht sich in die *Fourier*sche Wärmeleitgleichung dann, wenn das Spannungs-Verzerrungsgesetz für den Spannungstensor $\mathfrak{S}$ auf eine Spannungsleistung führt, für die

$$I(\mathfrak{S}\,\mathfrak{D}) = \varrho \sum_i P_i \frac{dv_i}{dt} = \left(\frac{dU}{dt}\right)_s \tag{4.16}$$

ist. Dies ist nur möglich, wenn die Spannungsleistung $I(\mathfrak{S}\,\mathfrak{D})$ keinen irreversiblen Anteil enthält. Ein solcher kommt z. B. durch die dissipativen Spannungen bei zähen Flüssigkeiten oder durch die bleibenden Verformungen beim plastischen Fließen zustande. Fehlen solche Entropie erzeugende Erscheinungen, dann heißt die Spannungsarbeit „vollständig zurückgewinnbar", und der erste Hauptsatz spaltet sich in die zwei Teilaussagen (4.16) und (1.7) auf. Nachdem der kinematische Zusammenhang zwischen den Änderungen dv_i/dt und dem Tensor $\mathfrak{D}$ der Verformungsgeschwindigkeit festgestellt ist, liefert (4.16) die Beziehungen zwischen dem Spannungstensor $\mathfrak{S}$ und den thermodynamischen Spannungen P_i. Dies bedeutet wegen (4.3), daß im Falle vollständig zurückgewinnbarer Arbeit das Spannungs-Verzerrungsgesetz mit Einschluß der Wärmespannungen aus der kalorischen Zustandsgleichung ableitbar ist[1].

Tritt dagegen eine irreversible Spannungsleistung auf, dann gilt (4.16), nach Definition, nur noch für den zurückgewinnbaren Anteil der Spannungsleistung, und (1.3) ist keine reine Wärmeleitungsgleichung mehr, da Q durch die irreversible Spannungsleistung zu ergänzen ist. Damit bleibt diese Gleichung mit den übrigen Gleichungen nicht nur über ϱ und c, sondern auch über die Spannungsleistung verbunden. Als Beispiel sei die Wärmeleitung in einer zähen Flüssigkeit genannt. Sei $\mathfrak{S}_\mu$ die durch die Zähigkeit bei der Bewegung erzeugte Zusatzspannung, so kommt statt (1.4)

$$\varrho\, c \frac{dT}{dt} = I(\mathfrak{S}_\mu \mathfrak{D}) + Q\,. \tag{4.17}$$

Man kennt nur wenige strenge Lösungen des aus (2.1), (2.2) und (4.17) gebildeten nichtlinearen Gleichungssystems[2]. Daher vernachlässigt man oft die Wärmeerzeugung durch Dissipation neben der Wärmeleitung, d. h. man sieht von der Zähigkeit des Kontinuums ab. Ebenso verfährt man vorläufig bei Wärmespannungsproblemen mit plastischem Fließen mangels geeigneter Ansätze und Erfahrungswerte[3]. Man könnte fragen, ob es physikalisch sinnvoll ist, bei Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldern mit nicht verschwindenden Gradienten anzunehmen, daß eine nichttriviale Wärmeleitgleichung ($\lambda \neq 0$) und der Fall vollständig zurückgewinnbarer Arbeit zusammen vorkommen, treten doch schon bei den einfachsten Modellen der kinetischen Gastheorie die Erscheinungen der Zähigkeit und der Wärmeleitung als Transport von Impuls und von Bewegungsenergie nur miteinander auf, so daß der erste Hauptsatz hier immer auf eine Beziehung (4.17) mit nicht verschwindender Dissipationsarbeit führt.

Aus unserer Betrachtung geht noch hervor, welche genaue Bedeutung die spezifische Wärme c in (1.7) hat. Es ist für jedes Teilchen diejenige spezifische Wärme c (4.14) einzusetzen, die zu seinem augenblicklichen Zustand und zu seiner Zustandsänderung gehört. Grundsätzlich bleibt also auch bei vollständig zurückgewinnbarer Arbeit die Wärmeleitgleichung (1.7) mit den übrigen Grundgleichungen gekoppelt, sowohl über die Dichte ϱ wie über die spezifische Wärme c. Empirisch weiß man freilich über c (4.14) in den meisten Fällen nur sehr wenig. Man berechnet daher Wärmespannungen in festen Körpern in der Regel mit konstanten Mittelwerten ϱ und c. In dem Sonderfalle, daß Teilchen, etwa infolge entsprechender Randbedingungen, ihren Verformungszustand zeitlich nicht ändern, ist

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \frac{dv_i}{dt} = 0\,. \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.18}$$

Dazu gehört als Verallgemeinerung der spezifischen Wärme von Gasen bei konstantem Volum die spezifische Wärme bei konstantem Verzerrungszustand

$$c_V \equiv T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{v_1,\ldots,v_n} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{v_1,\ldots,v_n}. \tag{4.19}$$

---

[1] *G. Hamel*, S. 573 ff., a. a. O. s. Fußn. 1, S. 367; *E. Hellinger*, S. 684 f., a. a. O. s. Fußn. 1, S. 369; *R. Kappus*, S. 283 ff., a. a. O. s. Fußn. 2, S. 367; dazu die kritischen Bemerkungen von *C. Truesdell*, S. 170 f., a. a. O. s. Fußn. 5. S. 367.

[2] Z. B. *H. Schlichting*, Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strö- Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) 78—83.

[3] Z. B. *F. Chmelka*, Wärmespannungen in einem Prandtl-Reußschen Körper, Österr. Ing.-Arch. 10 (1956) 133—140, S. 137.

Da mit $\mathfrak{D}$ auch div $\mathfrak{w} = I(\mathfrak{D})$ verschwindet, ist eine solche Zustandsänderung nach (2.1) isochor. Hier geht der erste Hauptsatz mit $c = c_V$ in die Wärmeleitgleichung (1.7) über, gleichgültig, ob (4.16) zutrifft oder nicht.

Es ist zweckmäßig, die spezifische Wärme c explizit in den Zustandsänderungen auszudrücken. Hierzu denken wir uns die innere Energie als Funktion der Temperatur T und der Verformungsparameter $v_1, \ldots, v_n$ gegeben:

$$U = U(T, v_1, \ldots, v_n)\,. \tag{4.20}$$

Wegen

$$c\,dT = T\,ds = dU - \sum_i P_i\,dv_i = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{v_1,\ldots,v_n} dT + \sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] dv_i$$

wird so mit (4.19)

$$c = c_V + \sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \frac{dv_i}{dT}\,. \tag{4.21}$$

Führen wir als Verallgemeinerung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten eines Gases

$$\alpha \equiv \varrho \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial T}\right)_p$$

die Größen

$$\alpha_i \equiv \frac{1}{v_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial T}\right)_{P_1,\ldots,P_n} \tag{4.22}$$

ein, so kommt insbesondere für die spezifische Wärme bei konstanten thermodynamischen Spannungen

$$c_P = c_V + \sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \alpha_i\, v_i \tag{4.23}$$

und damit wird allgemein

$$c = c_V + (c_P - c_V) \frac{\sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \frac{dv_i}{dT}}{\sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{dv_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \alpha_i\, v_i} \tag{4.24}$$

oder auch, wenn wir aus (4.21) und (4.23) c_V eliminieren, als Gegenstück zu (4.21)

$$c = c_P + \sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \left(\frac{dv_i}{\partial T} - \alpha_i v_i\right). \tag{4.25}$$

Mit (4.24) schreibt sich die Wärmeleitgleichung ausführlich

$$\varrho\, c_V \frac{dT}{dt} + \varrho\,(c_P - c_V) \frac{\sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \frac{dv_i}{dt}}{\sum_i \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T, v_k \neq v_i} - P_i\right] \alpha_i\, v_i} = Q\,. \tag{4.26}$$

Damit haben wir die Verallgemeinerung der *Neumann*schen Gleichung (1.8) gefunden. Auf diese kommen wir zurück, wenn in der kalorischen Zustandsgleichung (4.1) neben der Entropie s als weiterer Zustandsparameter nur das spezifische Volum

$$v_1 = v \equiv \frac{1}{\varrho} \tag{4.27}$$

erscheint. Wegen $P_1 = -p$ und

$$c_P = c_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T + p\right] \alpha\, v = c_p$$

vereinfacht sich jetzt (4.26) in

$$\varrho\, c_v \frac{dT}{dt} + \frac{\varrho}{\alpha\, v}\,(c_p - c_v)\,\frac{dv}{dt} = Q\,.$$

Beachtet man noch, daß nach (2.1) und (4.27)

$$\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt} = \operatorname{div} \mathfrak{w} \tag{4.28}$$

ist, so kommt schließlich

$$\varrho\, c_v \frac{dT}{dt} + \frac{\varrho}{\alpha}\,(c_p - c_v)\,\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = Q\,,$$

d. i. die *Neumann*sche Gleichung (1.8). Zugleich ist bestätigt, daß die *Neumann*sche Gleichung nur gilt, wenn in dem Kontinuum keine Schubspannungen möglich sind und die Spannungsleistung vollständig zurückgewinnbar ist.

Die Wärmeleitgleichung (1.7) würde sich wesentlich vereinfachen, wenn das Kontinuum nur die eine spezifische Wärme $c = c_V = \text{konst.}$ hätte. Dies tritt nach (4.21) ein, wenn

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{T,\, v_k \neq v_i} = P_i \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial v_i}\right)_{s,\, v_k \neq v_i} \tag{4.29}$$

ist, woraus

$$T = T(s)\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial v_i} = 0 \tag{4.30}$$

folgt. Mit (4.19) gilt genauer

$$T = T_0\, e^{(s - s_0)/c_V}\,, \qquad s = s_0 + c_V \ln \frac{T}{T_0}\,, \tag{4.31}$$

wenn wir die Werte T_0 und s_0 einander zuordnen. Nach (4.2) kommt schließlich

$$U = c_V\, T_0\, e^{(s - s_0)/c_V} + f(v_1, \ldots, v_n) = c_V\, T + f(v_1, \ldots, v_n)\,. \tag{4.32}$$

In diesem ausgearteten Falle hängen die thermodynamischen Spannungen P_i (4.3) nicht von der Entropie oder von der Temperatur ab. Zugleich verschwinden die verallgemeinerten thermischen Ausdehnungskoeffizienten α_i (4.22). Ein Kontinuum mit einer solchen kalorischen Zustandsgleichung heißt piezotrop; es ist frei von Wärmespannungen.

Ergebnis: Im allgemeinen läßt sich die Energiebilanz bei der Bewegung und Verformung eines Kontinuums nur dann auf eine Wärmeleitgleichung (1.7) zurückführen, wenn die Spannungsleistung vollständig zurückgewinnbar ist, d. h. insbesondere, wenn die Spannungen keinerlei dissipative Anteile enthalten oder wenn keine bleibenden Verformungen auftreten. Diese Wärmeleitgleichung bleibt mit dem System der übrigen Bewegungsgleichungen (2.1), (2.2), (2.3) über die Dichte ϱ, die spezifische Wärme c (4.21) und die substantielle Ableitung dT/dt sowie über die Randbedingungen gekoppelt. Sie spaltet sich streng nur ab im Falle eines stationären Gleichgewichtszustandes (Ziff. 3) oder bisweilen bei entsprechenden Randbedingungen. Das schließt nicht aus, daß man, wie seither, viele Probleme über Wärmespannungen in guter Näherung unter Abtrennung der Wärmeleitaufgabe behandeln darf und, wegen der in den strengen Gleichungen liegenden Schwierigkeiten, dies auch muß.

(Eingegangen am 23. September 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *K. Zoller*, (14a) Stuttgart-Sillenbuch, Kirchheimerstr. 21.

VERFORMUNG UND FLIESSEN DES FESTKÖRPERS

Kolloquium Madrid, 26. bis 30. Sept. 1955

DEFORMATION AND FLOW OF SOLIDS

Colloquium Madrid September 26—30, 1955

Herausgegeben von R. GRAMMEL

Mit 188 Abbildungen. XII, 324 Seiten Gr.-8°. 1956.

Ganzleinen DM 37,50

„. . . In der Einführung umschreibt der Herausgeber in prägnanter Kürze die Wandlung der Mechanik von einer Idealmechanik zu einer Realmechanik. Hauptsächlich durch bestimmte Idealisierungen kam die Mechanik als Wissenschaft von den Kräften und Bewegungen in ihrer klassischen Zeit dem Ziel, eine exakte Wissenschaft zu sein, sehr nahe. In den letzten Jahrzehnten bemüht sich die Mechanik, ihre Fundamente, die zunächst aus wenigen Axiomen bestanden, zu revidieren und zu vertiefen. Man will wissen, was Elastizität, Plastizität, Verfestigung, Sprödigkeit, Viskosität u. a. m. wirklich sind und wie sie aus den Grundphänomenen der Physik heraus verstanden und wenn möglich berechnet werden können. Auch die Mechanik ist zu einer Verbindung von empirischer Induktion und theoretischer Deduktion geworden, was zu mancherlei Unvollkommenheiten des heutigen Zustandes geführt hat.

Das Madrider Kolloquium, auf dem Mechanikforscher alten Stils und Physiker in englischer, französischer und deutscher Sprache zum Wort kamen, galt in diesem Sinne der weiteren Abklärung der Festkörpermechanik. Das Buch vermittelt einen fesselnden Einblick in den sehr vielseitigen Problemkreis." *Schweizerische Bauzeitung*

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

TECHNISCHE DYNAMIK

Von Dr. C. B. BIEZENO, Professor an der Technischen Hochschule Delft, und Dr. Dr.-Ing. R. GRAMMEL, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Zweite, erweiterte Auflage. In zwei Bänden. (Jeder Band ist einzeln käuflich.)

I. Band:

Grundlagen und einzelne Maschinenteile

Mit 413 Abbildungen und 2 Anhängen. XII, 699 Seiten Gr.-8°. 1953.

Ganzleinen DM 66,—

II. Band:

Dampfturbinen und Brennkraftmaschinen

Mit 315 Abbildungen und 3 Anhängen. VIII, 452 Seiten Gr.-8°. 1953.

Ganzleinen DM 44,—

„. . . Die didaktische Gestaltung macht das Werk zu einem Studienführer für Fortgeschrittene geeignet, die gebotene Fülle an Anwendungsstoff verleiht ihm den Rang eines zuverlässigen Wegweisers für die speziellen Aufgaben der Konstruktions- und Entwicklungsabteilungen in der Maschinenindustrie. Das Buch stellt eine ‚Summa ad analysim rerum machinarum' dar, die sobald nicht veralten oder durch etwas Gründlicheres überboten werden wird." *Technische Rundschau*

„. . . Die neue Auflage des Werkes zeichnet sich ebenso wie die alte wiederum besonders durch ihre klare Darstellungsweise und straffe Gliederung der einzelnen Abschnitte aus. Aus diesem Grunde und nicht zuletzt auch durch das ausführliche Sachverzeichnis kann das Werk auf dem Gebiete der höheren Dynamik arbeitenden Wissenschaftlern und Ingenieuren zur Bewältigung ihrer Probleme wärmstens empfohlen werden." *Werkstatt und Betrieb*

DER KREISEL

Seine Theorie und seine Anwendungen

Von Dr. Dr.-Ing. R. GRAMMEL, o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

Zweite, neubearbeitete Auflage. In zwei Bänden.

I. Band:

Die Theorie des Kreisels

Mit 137 Abbildungen. XI, 281 Seiten Gr.-8°. 1950.

DM 30,—; Ganzleinen DM 33,—

II. Band:

Die Anwendungen des Kreisels

Mit 133 Abbildungen. VI, 268 Seiten Gr.-8°. 1950.

DM 30,—; Ganzleinen DM 33,—

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG